

# 土石方测量误差公式推导及其有效性验证

拓万兵<sup>1</sup>, 包玉斌<sup>2</sup>, 王志有<sup>2</sup>

<sup>1</sup>银川科技学院, 宁夏 银川

<sup>2</sup>宁夏回族自治区遥感测绘勘察院(宁夏回族自治区遥感中心), 宁夏 银川

收稿日期: 2022年8月12日; 录用日期: 2022年9月12日; 发布日期: 2022年9月21日

## 摘要

在实际工作中, 地形图测绘和土石方计算方法均较为成熟, 有大量的文献研究了采用各种方法测绘地形图的相关问题, 也有大量的文献研究了土石方的计算问题, 但是对于如何测绘地形图才能满足土石方测量精度的研究还很不充分。本文从方格网高程精度的视角, 推导了方格网高程点数量、精度与土石方相对误差关系公式, 并采用数学模拟的方法, 初步验证了公式的有效性。

## 关键词

土石方误差, 公式, 验证

# Derivation and Validity Verification of Earthwork Measurement Error Formula

Wanbing Tuo<sup>1</sup>, Yubin Bao<sup>2</sup>, Zhiyou Wang<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Yinchuan University of Science and Technology, Yinchuan Ningxia

<sup>2</sup>Ningxia Remote Sensing Surveying and Mapping Institute (Ningxia Remote Sensing Center), Yinchuan Ningxia

Received: Aug. 12<sup>th</sup>, 2022; accepted: Sep. 12<sup>th</sup>, 2022; published: Sep. 21<sup>st</sup>, 2022

## Abstract

In practice, the methods of topographic mapping and earthwork calculation are relatively mature. There is a great deal of literature on surveying and mapping topographic maps by various methods. There is also a large number of literature on the calculation of earthwork. However, the research on how to map topographic maps to meet the accuracy of earthwork measurement is still insufficient. In this paper, from the perspective of grid elevation accuracy, the formulas of the relationship between the number of grid elevation points, the accuracy error, and the relative error of earthwork measurement are derived, and the method of mathematical simulation was used to verify the effectiveness of the formula.

## Keywords

### Earthwork Error, Formula, Verification

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

土方量的计算是建筑工程施工的一个重要步骤。工程施工前的设计阶段必须对土石方量进行预算,它直接关系到工程的费用概算及方案选优[1][2]。土石方测绘主要有两项主要任务,即地形图测绘和土石方计算。地形图测绘主要依据《工程测量规范》《水利水电工程测量规范》等技术标准,采用全站仪或GPS-RTK方式现场实地采集地形点的平面位置和高度;土石方计算常用的方法有:方格网法、等高线法、断面法、DTM法、区域土方量平衡法和平均高程法等,信息化时代,主要通过测绘软件进行土石方计算。

但在目前的工程实践中,相关工程测量标准[3][4][5],对地形测量精度均做了规定,但对如何确定地形图方格网高程的精度才能满足土石方计算的误差限制要求,保证土石方测量的精度,确保土石方总量的误差小于一定数值,进而避免或减少施工单位和委托方对土石方量的争议,却没有具体规定,相关的理论研究也较少。然而,这一问题成为现阶段影响土石方测绘工程的主要问题。基于以上实际工程实践问题,本文重点推导地形图测绘中方格网高程点测量误差与土石方量相对误差的关系与规律,为从事土石方量计算的同行提高计算精度提供参考。

## 2. 土石方测量误差公式推导

计算土石方的方法通常有两种:实测方格网法和断面法,利用地形图(非数字化图)内插方格网或断面线来计算土石方工程量。填挖土石方工程量要分别计算,不得正负抵消。非带状区域的土方测量一般采用方格网法[6]。

单个方格网计算体积的公式如下:

$$V_i = S \times (h_1 + h_2 + \dots + h_n) \quad (1)$$

式(1)中:  $S$  为方格网面积,  $h_i$  为第  $i$  个方格的平均填挖高度,  $V_i$  为第  $i$  个方格的体积。

现实情况下的土石方测量区域,一般是不规则的多边形区域。采用方格网法计算土石方,主体上不但解决了完整单元格的体积计算问题,也解决了测量区域边缘处非完整的方格网的问题,如1/2方格网、1/3方格网等的问题。区域边缘地区的格网数量占比较小。

当不考虑测量区域的边缘处不完整的格网时,且设式(1)中,  $h_1, h_2, \dots, h_n$  的平均值为  $h$ , 则采用式(2)计算:

$$V = n \times h \times S \quad (2)$$

式(2)中  $V$  为体积,  $S$  为方格网面积。高程中误差分别为  $m_{h_1}, m_{h_2}, \dots, m_{h_n}$

根据线性函数误差传播定律,则式(2)的误差计算如式(3):

$$m_v^2 = S^2 m_{h_1}^2 + S^2 m_{h_2}^2 + \dots + S^2 m_{h_n}^2 \quad (3)$$

一般作业过程中都采用同等精度的仪器，高程中误差分别为  $m_{h_1} = m_{h_2} = \dots = m_{h_n} = m_h$ ， $m_h$  为高程中误差。则体积误差计算如式(4)：

$$m_v = \pm(S \times \sqrt{n} \times m_h) \quad (4)$$

式(4)中  $m_v$  为体积中误差。

如果设 3 倍限差为最大误差，则体积最大误差计算如式(5)：

$$m_{v\max} = \pm 3S \times m_h \quad (5)$$

根据偶然误差统计学特性， $m_{v\max}$  的置信率约为 99.7%。则可得出土石方相对误差计算如式(6)：

$$m_{\text{rel}} = \frac{m_{v\max}}{V} \leq \pm \frac{3m_h}{\sqrt{n} \times h} \times 100\% \quad (6)$$

式(6)中  $n$  为单元格数量， $m_h$  为单元格高程中误差， $h$  为平均土层厚度。

从式(6)可以得到：土石方相对误差与方格网的高程精度成正比，与平均土(石)层厚度成反比，与单元格数量的开平方成反比。

该公式在实际使用过程中，当采用逐个单元格测量的高程点方法时，单元格数量此处理解为高程测量点的数量；当采用高程点内插生成 DEM 时，应为 DEM 高程中误差。

该公式满足偶然误差特性，即当观测值无限增加时，观测误差的算数平均值无限趋近于零。

该公式是采用设计基准面为基准的开挖上面(或下面)测量方法时应用。当需要两个高程面都要进行测量时，公式中  $m_h$  数值发生了变化，测量精度需要相应提高。

现实测绘生产中，作业区域是固定的，当某作业人员采用某种特定的测绘仪器，其作业精度基本固定，这时要满足土石方测量的相对误差精度，则可以根据公式(6)，通过提高或降低高程点测量精度，或者增加高程点的密度来满足精度要求。

### 3. 公式有效性验证

#### 3.1. 模拟验证思路

设定某一地区地形的 DEM 为标准地形，通过数学函数模拟带有测量误差的数字高程模型，分析模拟的地形误差是否符合上述公式，证明上述公式的有效性。

验证以上公式是否符合实际，最直接的方法就是依据测量中误差，模拟每个单元格高程误差值，并与单元格真值相加，生成带有模拟测量误差的单元格高程值，然后验证这种模拟方法的模拟结果是否满足误差正态分布规律。具体步骤如下：

1) 采用正态随机变量函数计算每一个高程点的误差返回值。验证误差返回值是否符合正态分布规律。

2) 误差返回值与原始高程数据值相加，生成新的模拟的测量高程点。采用模拟高程值计算土石方量，采用原始高程计算土石方量，求取二者差值。多次重复以上步骤，求取土石方量的最大误差，与采用公式计算的最大误差比较，验证公式的有效性。

#### 3.2. 高程点模拟及其误差分布

采用正态分布函数“NORMINV(RAND(),0,5)”模拟高程点的误差分布情况，函数中 5 代表高程中误差为 5 cm。本测区共有高程点 2791 个。把模拟误差与原始高程相加，然后生成新的高程中误差为 5 cm 的高程点模拟图。

第一次模拟高程点模拟数据平均值  $u$  为  $-0.000092$ ，标准差为  $0.050038$ ，超出 3 倍中误差的数据有 1 个。误差分布统计见图 1。经统计分析，模拟数据符合正态分布规律。

本次共模拟高程点数据 2791 个，共计模拟了 30 次。其余 29 次模拟误差分布情况不再列出。

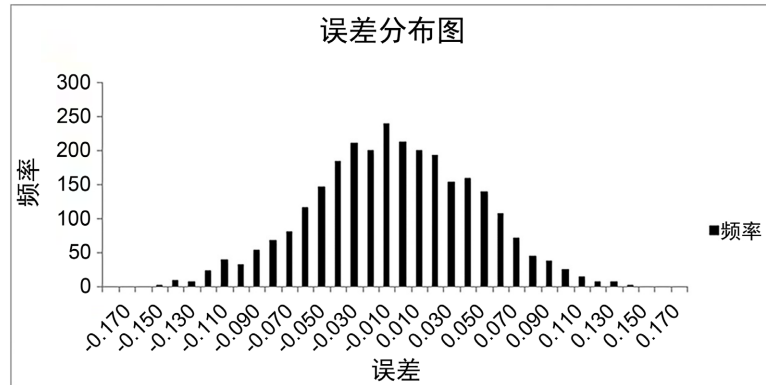


Figure 1. Error distribution  
图 1. 误差分布

### 3.3. 公式验证

本研究共计做了 30 次方格网高程模拟。土方计算采用南方 CASS9.1，采用方格网法计算土方量，高程设计面采用 1953.836 m，单元格采用 5.0 m。依据标准地形图计算标准填方真值和挖方真值，分别为  $22114.4 \text{ m}^3$  和  $22174.9 \text{ m}^3$ 。

30 次模拟的填挖土方量和填挖土方的相对误差数据见表 1。

Table 1. The relative error of the filling and excavation quantity and the filling and excavation quantity in 30 simulations  
表 1. 30 次模拟的填挖土方量和填挖土方的相对误差

序号	填方( $\text{m}^3$ )	填方误差(%)	挖方( $\text{m}^3$ )	挖方误差(%)
1	22193.20	0.356	22273.27	0.444
2	22083.00	-0.142	22158.57	-0.074
3	22111.20	-0.014	22258.93	0.379
4	22171.30	0.257	22205.62	0.139
5	22197.60	0.376	22221.62	0.211
6	22111.75	-0.012	22199.28	0.110
7	22135.95	0.097	22185.95	0.050
8	22131.80	0.079	22257.62	0.373
9	22193.10	0.356	22243.50	0.309
10	22153.10	0.175	22207.20	0.146
11	22193.00	0.355	22215.17	0.182
12	22154.70	0.182	22148.32	-0.120
13	22168.12	0.243	22231.62	0.256
14	22150.40	0.163	22297.45	0.553

## Continued

15	22127.57	0.060	22195.50	0.093
16	22166.50	0.236	22197.20	0.101
17	22100.35	-0.064	22174.00	-0.004
18	22220.35	0.479	22163.55	-0.051
19	22114.40	0.000	22174.90	0.000
20	22147.95	0.152	22233.82	0.266
21	22127.12	0.058	22172.75	-0.010
22	22145.25	0.140	22123.25	-0.233
23	22108.50	-0.027	22258.93	0.379
24	22174.00	0.270	22123.38	-0.232
25	22165.38	0.231	22126.85	-0.217
26	22170.40	0.253	22127.42	-0.214
27	22171.70	0.259	22128.75	-0.208
28	22190.95	0.346	22130.80	-0.199
29	22182.08	0.306	22118.05	-0.256
30	22163.50	0.222	22131.27	-0.197

填方区域总面积为 27211.3 m<sup>2</sup>，填方区域土层平均厚度为 0.704 m，高程点总量为 1092 个。以高程点中误差 0.05 m 代替 DEM 的高程中误差，带入土石方相对误差公式(6)，计算求得该区域土方测量相对误差。填方最大相对误差( $F$ )计算如下：

$$F = 0.15 / \sqrt{1092 \times 0.704} = \pm 0.645\%$$

计算求得该区域土方测量相对误差应小于 $\pm 0.645\%$ 。

通过上表统计得出，该区域填方量 3 个最大相对误差为 0.356%、0.376%和 0.479%。

挖方区域总面积为 42470.2 m<sup>2</sup>，土层平均厚度为 0.580 m，高程点总量为 1699 个。高程点中误差 0.05 m 代替 DEM 的高程中误差，土方计算的单元格长度为 5.0 m。将以上数据带入土石方相对误差公式(6)，计算求得该区域土方测量相对误差。挖方最大相对误差( $C$ )计算如下：

$$C = 0.15 / \sqrt{1699 \times 0.580} = \pm 0.627\%$$

计算求得该区域土方测量相对误差应小于 $\pm 0.627\%$ 。

通过上表统计得出，该区域挖方 3 个最大相对误差为 0.379%、0.444%和 0.471%。

表 1 中填、挖方的相对误差均不超过公式求得的误差量，表明土方最大相对误差公式是有效的，实际生产当中可以使用。

#### 4. 结论

本文推导了采用方格网法计算土石方量时，高程点中误差、平均土(石)层厚度及单元格数量与土方相对误差计算的公式。公式表明：土方量的相对误差与高程点中误差成正比，与平均土层厚度成反比、与单元格数量的开平方成反比。

同时, 由于测绘实际工作量大, 一般不会为了某一具体的公式验证, 进行某一区域多次的测量, 采用数学模拟的方式, 可以高效快速的解决此问题。本文采用已有的数字地形图作为真值, 以计算机数学模拟的方式生成测量数据, 计算带有测量误差的土石方填方和挖方的数量, 并与公式计算结果进行对比, 来验证公式可靠性。

应用该公式可以根据不同的测区条件, 有效的设定测量精度和高程点的密度以保证土方相对误差, 并且可以避免不必要的测绘工作量。

本研究有两个不足之处。一是模拟的数据种类还不够多, 对于不同土层厚度、不同测量格网点数量的情况较多, 由于工作量的限制, 还没有一一模拟实验。二是实际工作中主要采用采集地形特征点的方法测绘地形图, 由散点推球格网点高程的误差也是误差的来源之一, 此误差没有讨论。

## 基金项目

宁夏高校本科重点建设专业(测绘工程)。

## 参考文献

- [1] 刘亮. 几种工程土石方量计算方法的比较[J]. 山西建筑, 2019, 45(8): 182-183.
- [2] 张蒙, 王想红, 徐胜华, 肖冰, 文化立. 等高线约束的 Delaunay 三角网在土石方量计算中的应用[J]. 地理与地理信息科学, 2020, 36(4): 14-18.
- [3] 中华人民共和国建设部及国家质量监督检验检疫总局. GB50026-2007 工程测量规范[S]. 北京: 中国计划出版社, 2008.
- [4] 中华人民共和国水利部. SL197-2013 水利水电工程测量规范[S]. 北京: 中国水利水电出版社, 2013.
- [5] 中华人民共和国住房和城乡建设部. CJJ/T8-2011 城市测量规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2011.
- [6] 中华人民共和国水利部. SL52-2015 水利水电工程施工测量规范[S]. 北京: 中国水利水电出版社, 2015: 69.