**Hans Journal of Civil Engineering** 土木工程, **2022, 11(9), 1037-1045**
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/hjce
https://doi.org/10.12677/hjce.2022.119114

Hans汉斯

# 水泥基体结构异质性多重分形分析与模拟

**蒋燕伟[1]，奚亚男[2*]**

[1]中铁四局集团有限公司，安徽 合肥
[2]河海大学力学与材料学院，江苏 南京

收稿日期：2022年9月6日；录用日期：2022年9月22日；发布日期：2022年9月29日

## 摘 要

**水泥基体由具有不规则几何形貌的组分无序堆积而成，在空间维度上呈现出典型的结构异质性。本文以不同养护龄期(7 d, 28 d)的普通硅酸盐水泥净浆为例，基于X射线计算机断层扫描(X-ray Computed Tomography, XCT)技术获取其三维灰度图像。针对水泥基体的三维结构，以局部孔隙率为指标开展多重分形分析。结果表明，多重分形分析对于定量描述水泥基体结构异质性具有很好的适用性。此外，本文提出利用一般化二项迭代方法模拟水泥基体的结构异质性。**

## 关键词

**水泥基体，结构异质性，X射线计算机断层扫描，多重分形分析，一般化二项迭代方法**

# Multifractal Analysis and Modeling of Structural Heterogeneity in Cement Paste

**Yanwei Jiang[1], Yanan Xi[2*]**

[1]China Railway No. 4 Engineering Group Co., Ltd., Hefei Anhui
[2]College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing Jiangsu

Received: Sep. 6th, 2022; accepted: Sep. 22nd, 2022; published: Sep. 29th, 2022

## Abstract

**Cement paste is comprised of anhydrous clinkers and hydrates of irregular morphology, which manifests an intrinsic structural heterogeneity in spatial domain. Taking ordinary Portland cement paste cured at 7 d and 28 d into account, we use the X-ray Computed Tomography (XCT) to acquire their 3-dimensional structural features. With the 3-dimensional XCT images as input, the multifractal analysis is performed based on a definition of local porosity. Results indicate that the**

*通讯作者。

文章引用: 蒋燕伟, 奚亚男. 水泥基体结构异质性多重分形分析与模拟[J]. 土木工程, 2022, 11(9): 1037-1045.
DOI: 10.12677/hjce.2022.119114

**multifractal analysis shows a good applicability in quantification of the structural heterogeneity in cement paste. Besides that, a generalized binomial multiplicative cascade is introduced to model the multifractal structural heterogeneity.**

## Keywords

**Cement Paste, Structural Heterogeneity, X-Ray Computed Tomography, Multifractal Analysis, Generalized Binomial Multiplicative Cascade**



## 1. 引言

深刻理解材料的内部结构特征属于材料科学研究的重要范畴。众所周知，水泥基体在混凝土材料中占据至关重要的地位，其由水化产物、未水化相以及孔隙等无序堆积而成，且各种组分具有不规则的几何形貌，因此在空间维度上呈现出典型的结构异质性。时至今日，研究人员已经获得大量有关水泥基体的物相组成和微观结构信息。然而，由于缺乏行之有效的研究手段，针对其结构异质性的定量描述仍然进展甚微。

研究人员在小角度 X 射线散射实验基础上使用分形理论描述水泥基体的结构异质性[1]。相较于使用相关函数等传统数学工具，分形理论具有简洁和高效的优势，因而备受关注。除小角度 X 射线散射技术外，扫描电镜技术[2]、压汞技术[3]、气体吸附技术[4]以及 X 射线计算机断层扫描(X-ray Computed Tomography, XCT)技术[5] [6] [7] [8]等也被用于探讨水泥基体的分形特征。

事实上，虽广泛使用，分形理论对于描述水泥基体却也存在一定的不足[9]。一方面，若整体孔隙率相近，其分形维数也大致相同，即分形维数只能反映全局结构信息；另一方面，水泥基体的结构指标与测量尺度之间通常只能满足近似的幂函数关系，即不具有严格意义上的分形特征。Stanley 和 Meakin 提出，相较于分形理论，多重分形理论更适于对结构异质性的深入描述[10]。近年来，多重分形理论无论是分析领域还是模拟领域均已取得长足进步[11] [12]。特别地，关于水泥胶凝体系研究，Valentini 等应用多重分形理论描述水化硅酸钙凝胶的团聚概率[13]；Gao 等发现水泥基体的局部孔隙率分布呈现出典型的多重分形特征[14]；Paggi 和 Carpinteri 提出混凝土名义强度的多重分形尺度依赖律[15]。这些探索性工作显示多重分形理论在描述胶凝体系结构异质性方面具有巨大的潜在优势。

## 2. 材料与实验

### 2.1. 样品制备

本文使用南京小野田 PII 52.5 水泥，制备不同养护龄期(7 d, 28 d)的普通硅酸盐水泥浆体，水灰比固定为 0.4。将水泥称重完毕后，倒入搅拌锅中，先干拌 3 分钟，以防止结块的产生。之后，加入称量好的水，边搅拌边加水，待原材料全部加入后按照低速 3 分钟 − 高速 2 分钟 − 低速 3 分钟的顺序搅拌充分，完毕后装入 40 × 40 × 160 $mm^3$ 的棱柱模具成型，并放到振动台上振动 60 次抹平。成型后的试件用保鲜膜覆盖进行静置，常温养护 1 天待其硬化后脱模。随后置于标准养护室(温度 20℃ ± 1℃，相对湿度 ≥ 95%)养护至设计龄期。待养护完成后，先从试件中心部位钻取直径 2 mm、高度 5 mm 的样品，再手工打磨至直径 1 mm、高度 4 mm。最后将样品置于乙醇溶液中浸泡 48 小时终止水化，加以冷冻干燥法做干燥处理。

## 2.2. XCT 实验

如图 1 所示，本文采用的实验仪器是德国制造的蔡司 Xradia 510 型 X 射线显微镜，主要由微焦点射线源、精密样品台、高分辨率探测器、控制以及成像单元所组成。该仪器包含两级放大系统，第一级是传统的 X 射线几何放大，第二级是将 X 射线经闪烁体转化为可见光之后用镜头进行的光学放大，由此得以在较大样品尺寸、较远工作距离下实现亚微米级的空间分辨率。X 射线扫描待测样品时，材料局部的 X 射线吸收系数存在差异，投射至探测器上对应不同的像素灰度值。对于水泥净浆样品，一般认为 X 射线吸收系数即像素灰度值与局部材料密度成正比关系。

XCT 图像的空间分辨率和像素对比度受到射线功率和样品尺寸的影响。一方面，较高的射线功率提高空间分辨率，但降低像素对比度；另一方面，更薄的样品导致更高质量的图像。应当注意的是，当样品太薄时，其图像会在厚度方向上受到边壁效应的影响，无法代表真正的水泥浆体。本文所有扫描均以 60 kV 的 X 射线峰值能量和 83 μA 的电流进行，样品距射线源和探测器分别为 14 mm、80 mm。每次扫描获得 1601 帧二维 XCT 图像，每个投影的采集时间为 6 s，像素的空间分辨率为 1 μm 以及像素灰度值变化范围为 0~255。如图 2 所示，顺序裁取 128 帧二维 XCT 图像(128 × 128 $\mu m^2$)，将其重构成三维 XCT 图像(128 × 128 × 128 $\mu m^3$)。图 3 所示为重构后的胶凝体系三维 XCT 图像，其中灰度值已做归一化处理。

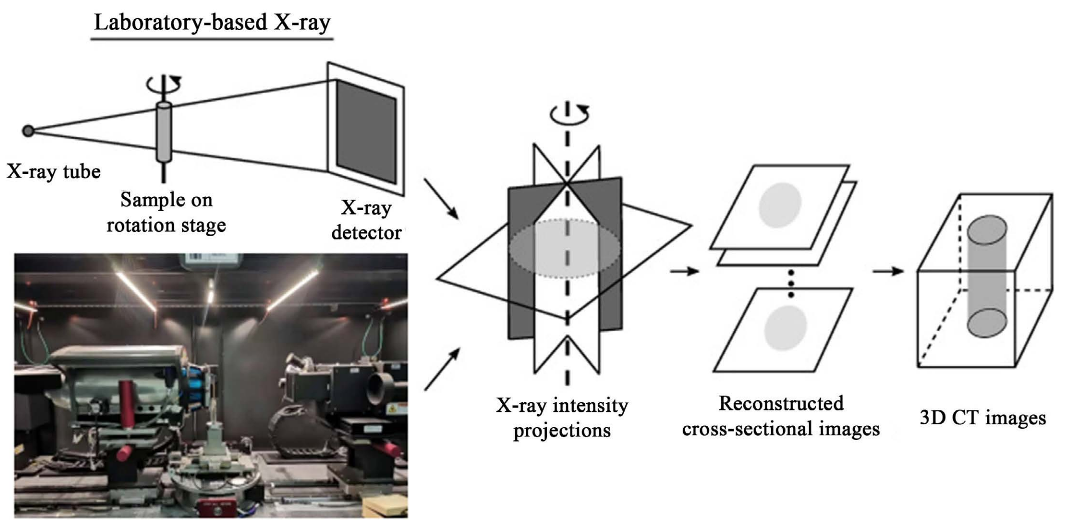



**Figure 1.** Xradia 510 X-ray microscopy and schematic of work principle
**图 1.** Xradia 510 型 X 射线显微镜及工作原理示意图

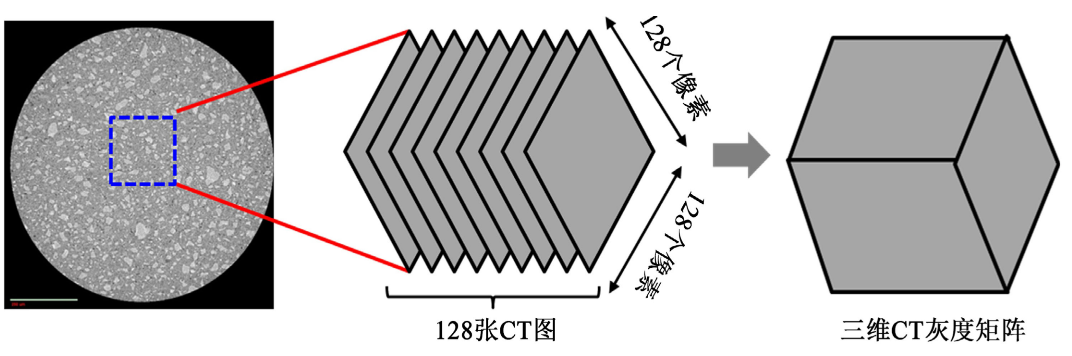



**Figure 2.** Schematic of 3D XCT image reconstructed from 2D XCT images
**图 2.** 三维 XCT 图像重构示意图

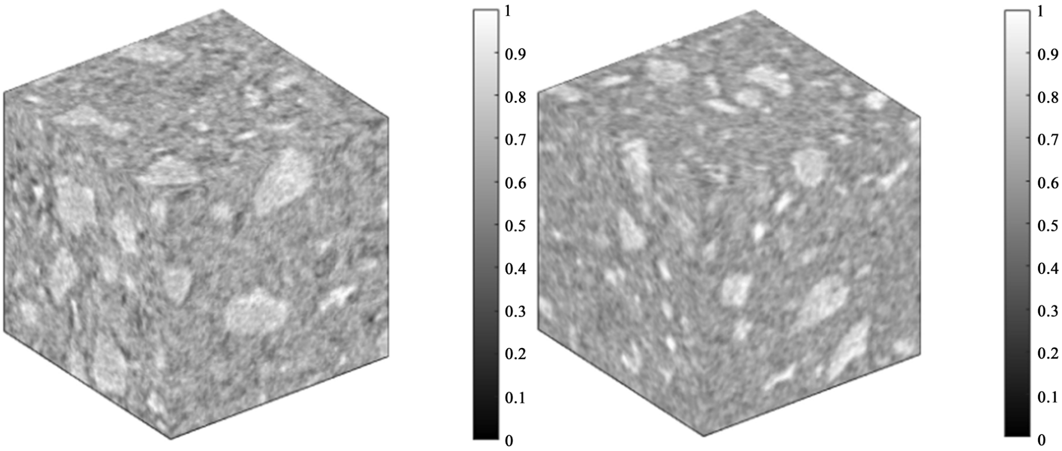



**Figure 3.** 3D XCT image of cement paste at a curing age of (a) 7 d; (b) 28 d
**图 3.** 不同养护龄期的水泥浆体三维 XCT 图像(a) 7 d；(b) 28 d

## 3. 多重分形理论

Mach 等从随机过程角度考虑，将研究对象视为有限单元的集合，并构建函数 Φ 关联起概率测度与空间尺度如下[16]：

$$\Phi(q,\tau)=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^q}{\delta_i^\tau} \tag{1}$$

$N$ 为单元数目，$q$、$\tau$ 为实数变量，$p_i$、$\delta_i$ 为单元 $i$ 对应的概率测度、空间尺度。对于多重分形，满足 $\Phi(q,\tau)=1$。取 $\delta_i=\delta$，结合式(1)，则有

$$\chi(q)=\sum_{i=1}^{N}p_i^q\propto\delta^{\tau(q)} \tag{2}$$

$\chi(q)$、$\tau(q)$ 称为配分函数、尺度函数。式(2)构成以 $q$ 为基本变量的多重分形表达式，相应地，也可以取 $p_i=p$ 建立以 $\tau$ 为基本变量的多重分形表达式。$q$ 的取值不同，对应 $p_i$ 对 $\chi$ 的贡献不同。具体地，当 $q$ 为负值时，$p_i$ 越小，对 $\chi$ 的贡献越大；当 $q$ 为正值时，$p_i$ 越大，对 $\chi$ 的贡献越大。将 $q$ 视为自变量，对 $\chi$ 求一阶导数，则有

$$\sum_{i=1}^{N}\left(p_i^q\ln p_i\right)\propto\delta^{\tau(q)}\ln\delta\frac{\mathrm{d}\tau(q)}{\mathrm{d}q} \tag{3}$$

引入 $\alpha$ 满足

$$\sum_{i=1}^{N}\left(p_i^q\ln p_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left[p_i^q\ln\left(\delta^{\alpha(q)}\right)\right] \tag{4}$$

将式(4)、式(2)代入到式(3)，则有

$$\alpha(q)=\frac{\mathrm{d}\tau(q)}{\mathrm{d}q} \tag{5}$$

$\alpha(q)$称为奇异指数或者 Hölder 指数，满足 $\alpha_{\min}\le\alpha\le\alpha_{\max}$，其中 $\alpha_{\min}=\alpha(q\to+\infty)$，$\alpha_{\max}=\alpha(q\to-\infty)$。Hölder 指数 $\alpha$ 直接联系着概率测度 $p_i$ 与空间尺度 $\delta$，即

$$p_i \overset{law}{=} \delta^{\alpha} \tag{6}$$

具有 Hölder 指数为 $\alpha$ 的单元数目

$$N_\alpha = N \cdot \delta^{-f(\alpha)} \tag{7}$$

$f(\alpha)$称为 Hausdorff 维数。$f(\alpha)$、$\alpha(q)$以及 $\tau(q)$不是互相独立的，满足

$$f(\alpha) = q(\alpha)\cdot\alpha - \tau\left[q(\alpha)\right] \tag{8}$$

$f(\alpha)$对 $\alpha$ 的函数关系称为多重分形谱。

## 4. 多重分形分析

对于三维 XCT 图像，假定每个像素包含凝胶孔和毛细孔，其对应的局部孔隙率 $f_v$ 定义如下：

$$f_v = \frac{1-h_v}{1-<h_v>} f_c \tag{9}$$

$h_v \in [0,1]$ 代表像素的归一化灰度值，<>代表关于图像内所有像素的平均值，$f_c$ 为整体孔隙率。当 $h_v$ = 1 时，$f_v = 0$；当 $h_v = 0$ 时，$f_v = f_c/(1 - \langle h_v \rangle)$以及$\langle f_v \rangle = f_c$。

如图 4 所示，在多重分形分析中，将三维 XCT 图像划分成不同空间尺度的立方体单元。对于每个立方体单元，其对应的概率测度 $p_i$ 的计算式如下：

$$p_i = \frac{\sum_i f_v}{\sum f_v} \tag{10}$$

$\sum i$ 代表对单元 $i$ 包含的像素求和，$\sum$代表对 XCT 图像包含的所有像素求和，显然有 $\sum p_i = 1$。

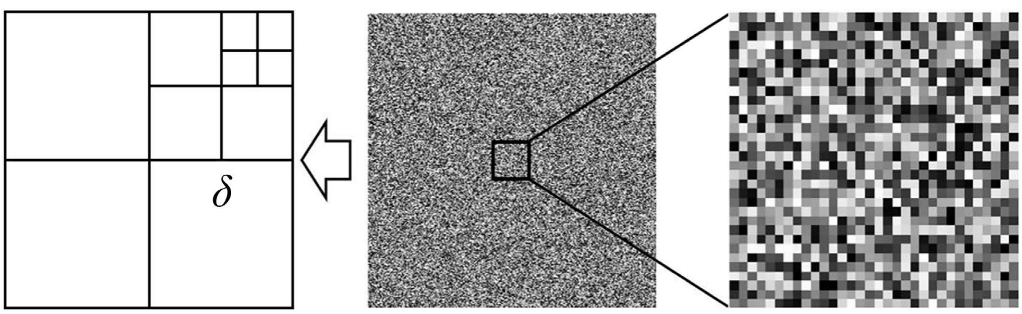



**Figure 4.** Schematic of the multifractal analysis on a digital image
**图 4.** 关于 XCT 图像的多重分形分析示意图

常用的多重分形分析方法包括 Stanley 和 Meakin 提出的矩方法[10]，Chhabra 和 Jensen 提出的直接法[17]以及 Arnéodo 等使用的小波系数法[18] [19]。本文使用直接法，即

$$\alpha = \lim_{\delta\to 0} \frac{\sum_i \left\{\mu_i(q,\delta)\cdot \ln(p_i)\right\}}{\ln\delta} \tag{11}$$

$$f(\alpha) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\sum_i \left\{\mu_i(q,\delta)\cdot \ln\left[\mu_i(q,\delta)\right]\right\}}{\ln\delta} \tag{12}$$

$\mu_i(q,\delta)$ 称为单元 $i$ 的归一化概率测度，其计算式如下：

$$\mu_i\left(q,\delta\right)=\frac{p_i^q}{\sum_i p_i^q} \tag{13}$$

## 5. 多重分形模拟

在多重分形模拟领域，有属于网格迭代类的，如 Saucier 提出的网格基几何多重分形[20]，Perfect 等提出的二项分布 Sierpinski 毯[21]，Cheng 提出的一般化二项迭代方法[22]；以及属于随机过程类的，包括 Barral 和 Mandelbrot 提出的复合泊松迭代[23]，Muzy 和 Bacry 提出的多重分形随机行走[24]，Chainais 提出的无限可分迭代[25]。本文采用 Cheng 提出的一般化二项迭代方法模拟水泥基体的多重分形结构异质性。

考虑三维 Euclidean 空间中具有单位长度的立方体迭代元，在每个维度上将其 $h$ 等分，即有总共 $h^3$ 个长度为 $1/h$ 的立方体小单元，并对所有小单元分配概率测度：先随机选取 $m_1$ 个，每个分配 $w_1/m_1$ 的概率测度；再随机选取 $m_2$ 个，每个分配 $w_2/m_2$ 的概率测度；满足 $m_1 + m_2 \le h^3$ 及 $w_1 + w_2 = 1$。历经 $j$ 次迭代后，单元的概率测度

$$p\left(j,k\right)=\left(w_1/m_1\right)^k\left(w_2/m_2\right)^{j-k};\, k=0,\cdots,j \tag{14}$$

相应地，具有概率测度 $p\left(j,k\right)$ 的单元数目

$$N\left(j,k\right)=m_1^k m_2^{j-k}\binom{j}{k} \tag{15}$$

将式(14)、式(15)代入式(2)，配分函数

$$\chi\left(q,j\right)=\left(m_1^{1-q}w_1^q+m_2^{1-q}w_2^q\right)^j \tag{16}$$

以及尺度函数

$$\tau\left(q\right)=-\frac{\ln\left(m_1^{1-q}w_1^q+m_2^{1-q}w_2^q\right)}{\ln h} \tag{17}$$

Hölder 指数 $\alpha$ 和 Hausdorff 维数 $f(\alpha)$则满足

$$\alpha\left(q\right)=-\frac{\xi\ln\left(w_1/m_1\right)+\left(1-\xi\right)\ln\left(w_2/m_2\right)}{\ln h} \tag{18}$$

$$f\left[\alpha\left(q\right)\right]=-\frac{\xi\ln\left(\xi/m_1\right)+\left(1-\xi\right)\ln\left[\left(1-\xi\right)/m_2\right]}{\ln h} \tag{19}$$

其中

$$\xi=\frac{m_1^{1-q}w_1^q}{m_1^{1-q}w_1^q+m_2^{1-q}w_2^q} \tag{20}$$

## 6. 结果与讨论

### 6.1. 结构异质性分析

取 $q$ 值遍历[–30 m, 30]，由式(11)、式(12)计算多重分形谱，如图 5 所示。不难发现，水泥基体呈现出典型的多重分形结构异质性，即具有清晰可辨的“吊钟型”多重分形谱。考虑 $\delta\rightarrow 0$，由式(6)、式(10)可知：$\alpha_{max}$ 对应着局部孔隙率 $f_v$ 的极小值，$\alpha_{min}$ 对应着局部孔隙率 $f_v$ 的极大值；以 Euclidean 维数 3 为基准，$\alpha > 3$ 对应着局部孔隙率 $f_v$ 的较小值(即凝胶孔)，$\alpha < 3$ 对应着局部孔隙率 $f_v$ 的较大值(即毛细孔)。在

多重分形理论中，通常使用谱宽 $\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$ 作为结构异质性的量化指标。具体地，随水泥基体的养护龄期增加(7 d → 28 d)，其多重分形谱变宽(0.98 → 1.01)，对应着局部孔隙率 $f_v$ 分布范围的展宽；考虑 $\delta \to 0$，由式(7)可知：$f(\alpha > 3)$增大，表明含有较小局部孔隙率 $f_v$ 的单元数目增多，即凝胶孔逐渐增多；$f(\alpha < 3)$减小，表明含有较大局部孔隙率 $f_v$ 的单元数目减少，即毛细孔逐渐减少。鉴于多重分形理论无需设定凝胶孔和毛细孔的具体几何形貌，因此在描述水泥基体孔隙结构变化方面具有很好的适用性。

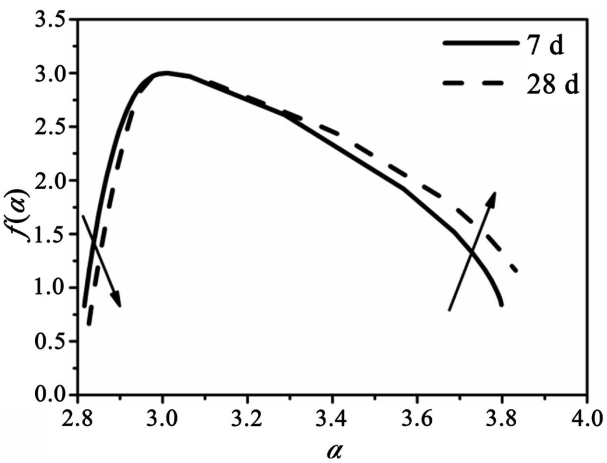



**Figure 5.** Multifractal spectrum of (7 d, 28 d) cured cement paste
**图 5.** 不同养护龄期(7 d, 28 d)的水泥基体多重分形谱

### 6.2. 结构异质性模拟

Cheng 提出的一般化二项迭代方法模拟多重分形结构异质性涉及 5 个参数，即 $h$、$m_1$、$m_2$、$w_1$、$w_2$。具体求解包含 3 个步骤。首先，从图 5 中读取 $f(\alpha_{max})$、$f(\alpha_{min})$、$\alpha_{max}$、$\alpha_{min}$ 等特征量的数值；其次，依据式(21)

$$\begin{cases} m_1 = \exp\left[ f\left(\alpha_{max}\right)\ln h \right] \\ m_2 = \exp\left[ f\left(\alpha_{min}\right)\ln h \right] \\ h = \left(m_1 + m_2\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases} \tag{21}$$

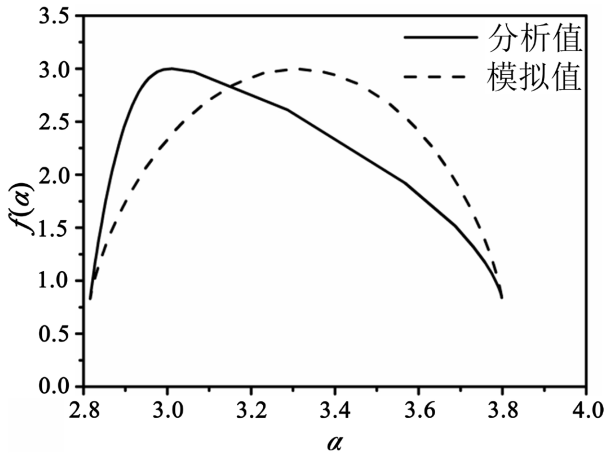
结合牛顿迭代法求解参数 $h$、$m_1$、$m_2$ 以及式(22)

$$\begin{cases} w_1 = m_1 h^{-\alpha_{max}} \\ w_2 = m_2 h^{-\alpha_{min}} \end{cases} \tag{22}$$

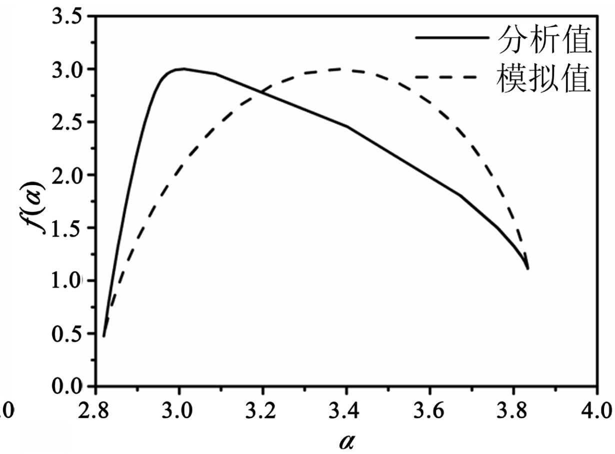
求解参数 $w_1$、$w_2$；最后，将参数 $h$、$m_1$、$m_2$、$w_1$、$w_2$ 的数值代入式(18)、式(19)即得到水泥基体的模拟多重分形谱。如图 6 所示，一般化二项迭代方法较好地对多重分形谱的整体形状(“吊钟型”)进行模拟，但是在精度上存在一定的不足。

## 7. 结论

本文结合 XCT 技术和多重分形理论定量描述水泥基体的结构异质性。鉴于多重分形理论在胶凝体系研究领域尚未得到广泛应用，本文从随机过程角度介绍多重分形理论的一般概念。在此基础上，从 XCT 灰度图像出发，定义水泥基体的局部孔隙率，对结构异质性进行多重分形分析(直接法)和模拟(一般化二项迭代方法)。主要结论如下：



(a)



(b)

**Figure 6.** Analyzed and modeled multifractal spectrum of cement paste at a curing age of (a) 7 d; (b) 28 d
**图 6.** 不同养护龄期的水泥基体多重分形谱分析值与模拟值对比(a) 7 d；(b) 28 d

1) 水泥基体呈现出典型的多重分形结构异质性，即具有清晰可辨的“吊钟型”多重分形谱。随水泥基体的养护龄期增加，多重分形谱变宽。

2) 一般化二项迭代方法较好地对多重分形谱的整体形状(“吊钟型”)进行模拟，但是在精度上存在一定的不足。

## 参考文献


[1] Winslow, D.N. (1985) The Fractal Nature of the Surface of Cement Paste. *Cement and Concrete Research*, **15**, 817-824. https://doi.org/10.1016/0008-8846(85)90148-6

[2] Lange, D.A., Jennings, H.M. and Shah, S.P. (1994) Image Analysis Techniques for Characterization of Pore Structure of Cement-Based Materials. *Cement and Concrete Research*, **24**, 841-853. https://doi.org/10.1016/0008-8846(94)90004-3

[3] Zeng, Q., Li, K.F., Chong, T.F. and Dangla, P. (2010) Surface Fractal Analysis of Pore Structure of High-Volume Fly-Ash Cement Pastes. *Applied Surface Science*, **257**, 762-768. https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2010.07.061

[4] Liu, X., Feng, P., Li, W., Geng, G., Huang, J., Gao, Y., Mu, S. and Hong, J. (2021) Effects of pH on the Nano/Micro Structure of Calcium Silicate Hydrate (C-S-H) under Sulfate Attack. *Cement and Concrete Research*, **140**, Article ID: 106306. https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2020.106306

[5] Gao, Y., Li, W. and Yuan, Q. (2021) Modeling the Elastic Modulus of Cement Paste with X-Ray Computed Tomography and a Hybrid Analytical-Numerical Algorithm: The Effect of Structural Heterogeneity. *Cement and Concrete Composites*, **122**, Article ID: 104145. https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2021.104145

[6] Zhang, H., *et al*. (2019) Experimentally Informed Micromechanical Modelling of Cement Paste: An Approach Coupling X-Ray Computed Tomography and Statistical Nanoindentation. *Composites Part B*: *Engineering*, **157**, 109-122. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.08.102

[7] Jiang, N., *et al*. (2020) 3D Finite Element Modeling of Water Diffusion Behavior of Jute/PLA Composite Based on X-Ray Computed Tomography. *Composites Science and Technology*, **199**, Article ID: 108313. https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2020.108313

[8] Kim, J.S., *et al*. (2019) Issues on Characterization of Cement Paste Microstructures from $\mu$-CT and Virtual Experiment Framework for Evaluating Mechanical Properties. *Construction and Building Materials*, **202**, 82-102. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.01.030

[9] Gao, Y., Jiang, J., De Schutter, G., Ye, G. and Sun, W. (2014) Fractal and Multifractal Analysis on Pore Structure in Cement Paste. *Construction and Building Materials*, **69**, 253-261. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.07.065

[10] Stanley, H.E. and Meakin, P. (1988) Multifractal Phenomena in Physics and Chemistry. *Nature*, **335**, 405-409. https://doi.org/10.1038/335405a0

[11] Esquivel, F.J., Alonso, F.J. and Angulo, J.M. (2017) Multifractal Complexity Analysis in Space-Time Based on the Generalized Dimensions Derivatives. *Spatial Statistics*, **22**, 469-480. https://doi.org/10.1016/j.spasta.2017.07.014

[12] Paz-Ferreiro, J., *et al*. (2018) Soil Texture Effects on Multifractal Behaviour of Nitrogen Adsorption and Desorption Isotherms. *Biosystems Engineering*, **168**, 121-132. https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2018.01.009

[13] Valentini, L., Artioli, G., Voltolini, M. and Dalconi, M.C. (2012) Multifractal Analysis of Calciumsilicate Hydrate (C-S-H) Mapped by X-Ray Diffraction Microtomography. *Journal of the American Ceramic Society*, **95**, 2647-2652. https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2012.05255.x

[14] Gao, Y., Gu, Y., Mu, S., Jiang, J. and Liu, J. (2021) The Multifractal Property of Heterogeneous Microstructure in Cement Paste. *Fractals*, **29**, Article ID: 2140006. https://doi.org/10.1142/S0218348X21400065

[15] Paggi, M. and Carpinteri, A. (2009) Fractal and Multifractal Approaches for the Analysis of Crack-Size Dependent Scaling Laws in Fatigue. *Chaos Solitonsand Fractals*, **40**, 1136-1145. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.08.068

[16] Mach, J., Mas, F. and Sagues, F. (1995) Two Representations in Multifractal Analysis. *Journal of Physics A—Mathematical and General*, **28**, 5607-5622. https://doi.org/10.1088/0305-4470/28/19/015

[17] Chhabra, A.B. and Jensen, R.V. (1989) Direct Determination of the $f(\alpha)$ Singularity Spectrum. *Physical Review Letters*, **62**, 1327-1330. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.62.1327

[18] Arneodo, A., Decoster, N. and Roux, S.G. (2000) A Wavelet-Based Method for Multifractal Image Analysis. I. Methodology and Test Applications on Isotropicand Anisotropic Random Rough Surfaces. *The European Physical Journal B*, **15**, 567-600. https://doi.org/10.1007/s100510051161

[19] Decoster, N., Roux, S.G. and Arneodo, A. (2000) A Wavelet-Based Method for Multifractal Image Analysis. II. Applications to Synthetic Multifractal Rough Surfaces. *The European Physical Journal B*, **15**, 739-764. https://doi.org/10.1007/s100510051179

[20] Saucier, A. (1992) Effective Permeability of Multifractal Porous Media. *Physica A*, **183**, 381-397. https://doi.org/10.1016/0378-4371(92)90290-7

[21] Perfect, E., Gentry, R.W., Sukop, M.C. and Lawson, J.E. (2006) Multifractal Sierpinski Carpets: Theory and Application to Upscaling Effective Saturated Hydraulic Conductivity. *Geoderma*, **134**, 240-252. https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2006.03.001

[22] Cheng, Q. (2014) Generalized Binomial Multiplicative Cascade Processes and Asymmetrical Multifractal Distributions. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **21**, 477-487. https://doi.org/10.5194/npg-21-477-2014

[23] Barral, J. and Mandelbrot, B. (2002) Multiplicative Products of Cylindrical Pulses. *Probability Theory and Related Fields*, **124**, 409-430. https://doi.org/10.1007/s004400200220

[24] Muzy, J. and Bacry, E. (2002) Multifractal Stationary Random Measures and Multifractal Random Walks with Log-Infinitely Divisible Scaling Laws. *Physical Review E*, **66**, Article ID: 056121. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056121

[25] Chainais, P. (2006) Multidimensional Infinitely Divisible Cascades. Application to the Modelling of Intermittency in Turbulence. *The European Physical Journal B*, **51**, 229-243. https://doi.org/10.1140/epjb/e2006-00213-y