

# Research on Fast Reconstruction of Frequency Hopping Using Compressive Sampling

Yizhi Zhao, Hongfeng Zhang, Jian Qian

College of Communication Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou Zhejiang  
Email: [wade200389@126.com](mailto:wade200389@126.com)

Received: Jan. 22<sup>nd</sup>, 2015; accepted: Jan. 29<sup>th</sup>, 2015; published: Feb. 2<sup>nd</sup>, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.  
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

Limited by the Nyquist sampling theorem, for traditional frequency hopping signals acquisition which needs very high sampling rate and high processing cost, compression sampling theory breaks through the limitation of the Nyquist sampling theorem, and the sampling rate can be significantly reduced. The paper proposes an iteration that takes three continuous atomic bases, which have got the nearest hopping point, as the sparse representation block of this hopping point. This algorithm weakens instantaneous frequency bandwidth caused by the adjacent signal frequency mutation and the modulated data symbol brings frequency deviation effect, and makes it more suitable for the actual frequency hopping signal. The simulation results verify the correction of the effectiveness of the sparse degree of adaptive matching pursuit algorithm, which improves the performance of reconstruction algorithm. Moreover, the paper compares the correction algorithm's reconstruction probability with the original algorithm under different  $M$  value.

## Keywords

Compressive Sampling, Frequency Hopping Signal, Sparsity Adaptive Matching Pursuit

---

## 跳频压缩采样的快速重构研究

赵毅智, 张洪峰, 钱 建

杭州电子科技大学通信工程学院, 浙江 杭州  
Email: [wade200389@126.com](mailto:wade200389@126.com)

收稿日期：2015年1月22日；录用日期：2015年1月29日；发布日期：2015年2月2日

## 摘要

受奈奎斯特采样定理的限制，对跳频信号进行传统采集需要很高的采样率，带来高昂的处理代价，压缩采样理论突破了奈奎斯特采样定理的限制，可大幅度降低信息采样率。本文以每个跳频频点最近的连续三个原子基作为该跳频频点的稀疏表示块进行迭代，削弱了相邻跳信号频率突变引起的瞬间频率展宽和数据符号调制带来的频偏影响，使之更适合实际跳频信号场合。仿真结果验证了修正的稀疏度自适应匹配追踪算法的有效性，提高了重构算法的性能。并且本文将修正的算法在不同 $M$ 值下的重构概率与原算法进行了对比。

## 关键词

压缩采样，跳频信号，稀疏度自适应匹配追踪

## 1. 引言

传统的数字信号处理受奈奎斯特采样定理的约束，采样频率必须要高于模拟信号频率带宽的两倍才能无失真的恢复出原始信号，模拟数字转换器(Analog to Digital Converter, ADC)难以满足奈奎斯特采样应达到的高要求。2006年Donoho等人提出了压缩采样(Compressive Sampling, CS)理论[1]，该理论下信号的采样速率可以远低于奈奎斯特采样率。

跳频通信具有很好的抗截获、抗干扰能力，广泛应用于具有安全需求的通信中[2]。目前跳频信号正朝着宽频带的方向快速发展，传统的ADC采样已经无法面对硬件系统和后续信号处理带来的巨大压力[3]，而压缩采样理论在某些场合能很好地解决上述信号采样问题。本文在压缩采样重构算法研究和分析的基础上针对实际跳频信号的特点对稀疏度自适应匹配追踪算法做了修正，提高了跳频信号重构的精确度。

## 2. 压缩采样的基本概念

压缩采样理论表明[4]-[8]，如果一个信号在某一个变换域内是可压缩的或稀疏的，那么就能够用与这个变换基不相关的低维线性观测矩阵来对该信号进行压缩测量。设 $\mathbf{x} = [x(1), x(2), \dots, x(N)]^T$ 代表由离散信号组成的一维列向量， $[\ast]^T$ 表示矩阵的转置。 $N \times N$ 的正交向量基组 $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ 可以表示出任意的 $N$ 维向量：

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N s_i \psi_i \quad \text{或} \quad \mathbf{x} = \Psi \mathbf{s} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_N]^T$ 是权重系数向量， $s_i = \langle \mathbf{x}, \psi_i \rangle = \psi_i^H \mathbf{x}$ ， $[\ast]^H$ 表示矩阵的共轭转置； $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N]$ 称为基矩阵(本文采用傅里叶变换基)。 $\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{x}$ 分别是原始信号在 $\Psi$ 域和时域的不同表示。

假如 $\Psi$ 基下有 $K$ 稀疏信号 $\mathbf{x}$ ， $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ 表示 $M$ 个不同的观测向量，计算出每个观测向量和 $\mathbf{x}$ 的内积即得到了相应的观测值

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \Psi \mathbf{s} = \Theta \mathbf{s} \quad (2)$$

其中 $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M]^T$ ， $\Theta = \Phi \Psi$ 。这里的 $K \leq M \ll N$ ，在采样的过程中， $M$ 维的观测值 $\mathbf{y}$ 由 $N$ 维的原始信号 $\mathbf{x}$ 压缩得到。式(2)是一个欠定方程，通过压缩采样恢复算法找到这一最稀疏解 $\hat{\mathbf{s}}$ ，即可重建原始信号：

$$\hat{\mathbf{x}} = \Psi \hat{\mathbf{s}} \quad (3)$$

### 3. 稀疏度自适应匹配追踪算法

在文献[9]里, Thong T. Do 等人提出的稀疏度自适应匹配追踪(Sparsity Adaptive Matching Pursuit, SAMP)算法对所有满足约束等距(RIP)条件的测量矩阵, 在稀疏度  $K$  未知情况下能实现对稀疏信号的快速精确重构。这种算法用阶段步长  $\text{step}$  逐步分段逼近稀疏度  $K$  (阶段步长表示相邻两个迭代阶段所对应的支撑集大小  $\text{size}$  之差), 可以在稀疏度未知的情况下对稀疏信号  $\mathbf{x}$  实现精确重构。SAMP 算法也是通过计算残差信号与各原子的相关系数作为原子选择的标准。首先取测量矩阵  $\Phi$  中各原子和残差  $\mathbf{r}$  内积的绝对值计算出相关系数, 从这些相关系数中选取  $\text{size}$  个最大的相关系数所对应的原子和之前得到的支撑集一起存到候选集当中, 然后余量与候选集中的原子取内积的绝对值, 再从这当中选出  $\text{size}$  个最大的值所对应的原子存入支撑集当中并更新残差  $\mathbf{r}$ 。如果残差比迭代之前的残差小, 则继续迭代。否则, 迭代阶段  $\text{stage}$  增加 1, 下次支撑集个数为  $\text{size} = \text{stage} \cdot \text{step}$ 。当残差小于某个阈值则迭代终止。通过一定次数的迭代可以得到用来重建信号的支撑集  $F$ , 这时只需采用最小二乘法就可以实现信号的重建, 并且残差也可以得到更新:

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{y} - \Phi_F \mathbf{x}\|_2^2 \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_{\text{new}} = \mathbf{y} - \Phi_F \hat{\mathbf{x}} \quad (5)$$

### 4. 针对跳频信号的修正 SAMP 算法

SAMP 算法也是一种贪婪迭代算法[9] [10], 这种算法无需知道稀疏度就能很好的实现信号的重建, 并且重建速度较快。在理想的情况下, 可仅用一个稀疏基来表示跳频信号, 但是在实际情况中, 频率的切换和符号的翻转都可能发生在 CS 帧的任意时刻, 由于频偏以及这些信号突变引发的瞬时频率展宽的影响, 信号很可能在连续的若干个傅里叶频点上具有比较大的响应, 所以需要对 SAMP 算法加以修正, 将最近的去连续三个 CS 帧中的跳频原子作为当前跳频信号频点的稀疏表示, 并做 SAMP 算法迭代, 如式(6)所示。以使该算法更加适合实际跳频信号的应用。

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_i | \mathbf{u}_i = |\langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_{i-1} \rangle| + |\langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_i \rangle| + |\langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_{i+1} \rangle|, i = 1, 2, \dots, N\} \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{r}$  表示残差向量,  $\boldsymbol{\xi}_i$  表示原子基。

修正的 SAMP 重建算法的基本步骤:

输入:  $M$  维观测向量  $\mathbf{y}$ ,  $M \times N$  测量矩阵  $\Phi = \{\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{M-1}\}$ , 阶段步长  $\text{step} \neq 0$ ;

输出: 信号  $\mathbf{x}$  的  $K$  稀疏近似  $\hat{\mathbf{x}}$ ;

Step 1 初始化: 残差  $\mathbf{r} = \mathbf{y}$ , 阶段  $\text{stage} = 1$ , 支撑集长度  $\text{size} = \text{step}$ , 迭代次数  $k = 1$ , 候选集  $C = \emptyset$ , 索引集  $S = \emptyset$ , 支撑集  $F = \emptyset$ ;

Step 2 利用(6)式计算出相关系数, 然后从  $\mathbf{u}$  中取出  $\text{size}$  个最大值对应的索引值组成索引集  $S$ ;

Step 3 将索引集  $S$  和支撑集  $F$  合并得到候选集  $C = F \cup S$ , 再利用类似于(6)式计算出候选集  $C$  中索引值对应原子和残差的相关系数, 然后取出  $\text{size}$  个最大值对应的索引得到  $F_{\text{new}}$ , 再根据式  $\mathbf{r}_{\text{new}} = \mathbf{y} - \Phi_{F_{\text{new}}} \hat{\mathbf{x}}$  更新残差;

Step 4 若满足迭代终止条件  $\|\mathbf{r}\|_2 \leq \varepsilon$ , 则终止迭代, 用得到的原子根据(1)式进行信号的最终重建, 否则进入下一步;

Step 5 若  $\|\mathbf{r}_{\text{new}}\|_2 \geq \|\mathbf{r}\|_2$ , 则更新迭代阶段  $\text{stage} = \text{stage} + 1$ , 更新支撑集长度  $\text{size} = \text{stage} \times \text{step}$ , 转 Step 2。否则作候选集更新  $F = F_{\text{new}}$ , 残差更新  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{new}}$ , 迭代次数  $k = k + 1$ , 再转 Step 2。

## 5. 仿真实验

本文通过 MATLAB 平台对跳频压缩信息进行修正 SAMP 算法的重构性能仿真，仿真中跳频信号的跳速为 300 H/s，带宽为 100 MHz，阶段步长  $\text{step} = 4$ ，迭代终止的阈值为  $\varepsilon = e^{-11}$ 。每次仿真截取 20 跳的数据，对每组数据做 200 次独立实验，下图为原始跳频信号时频图案与重构图案的比对实验结果：

图 1 表示了原始跳频信号和重建跳频信号的时频图以及重建误差。从实验结果可以看出，信号的重建误差相对较小，很好的完成了原始信号的重构。

为了进一步说明修正后的重构算法的有效性，下面实验在不同信息样点数下用修正 SAMP 算法与未修正的 SAMP 算法分别对跳频信号进行 500 次重构实验，比较结果如图 2 所示。

图 2 表示了修正后的算法与原算法的正确重构概率。在相同的采样点数下修正后的算法的重构的概率比原算法要高，较好的降低了信号突变引发的瞬时频率展宽以及频偏的影响，达到了性能优化的效果。

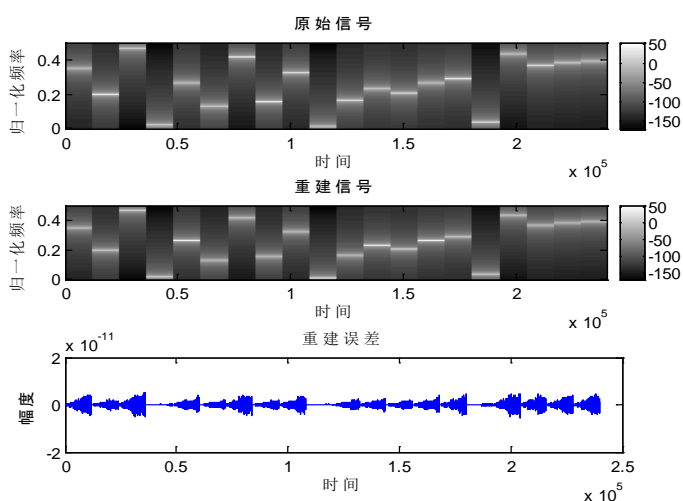


Figure 1. The effect of frequency hopping signal reconstruction based on SAMP correction algorithm

图 1. 基于修正 SAMP 算法的跳频信号重建效果

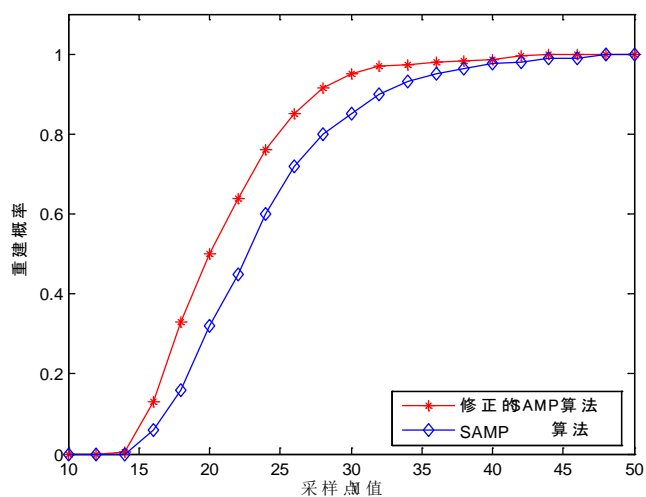


Figure 2. Comparison of signal reconstruction probability under different sampling points

图 2. 不同采样点下信号重建概率对比

**Table 1.** Signal reconstruction probability of original algorithm and the modified algorithm in different  $M$  values  
**表 1.** 原算法与修正后的算法在不同的  $M$  值下的信号重建概率

$M$ 值	25	30	35	40	45	50
原算法	68.2%	87.4%	92.8%	97.8%	99.2%	100%
修正算法	84.8%	96.2%	97.2%	98.2%	99.4%	100%

表 1 记录了修正后的算法与原算法在不同的  $M$  值下的重建跳频信号的概率。

从上表可以定量的看出，当  $M$  值较大的情况下，原算法和修正后的算法都能够高概率的重构原始跳频信号；另外还可以看出，相同的  $M$  值下，修正后的算法的重构概率要高于原算法。这表示相同的重构概率下，修正的算法相比于原算法所需的信息采样点数更少。

## 6. 总结

本文研究了跳频信号压缩采样的重构技术。首先介绍了压缩采样的基本原理以及稀疏度自适应匹配追踪算法。针对跳频信号的实际特点，本文对稀疏度自适应匹配追踪算法做了略加修改，使之更适用于实际的跳频信号。仿真验证了修正后的稀疏度自适应匹配追踪算法的有效性。并将修正后的算法与原算法做了对比，得出在相同的采样点下改进的算法具有更高的重构概率，达到了性能优化的效果。针对跳频信号的压缩采样，如何找到更实用和高效的算法，需要进一步地努力。

## 参考文献 (References)

- [1] Donoho, D.L. (2006) Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 1289-1306.
- [2] 吴俊, 刘乃安, 沈常林, 张妍飞 (2013) 一种压缩域下的跳频信号盲识别新方法. *西安电子科技大学学报*, **6**, 1-5.
- [3] 陈宇科, 汪立新, 吴剑锋 (2011) 压缩采样中模拟信息转换器的性能仿真. *电子器件*, **1**, 81-84.
- [4] Donoho, D.L. and Tsaig, Y. (2006) Extensions of compressed sensing. *IEEE Signal Processing Magazine*, **86**, 533-548.
- [5] Romberg, J. (2008) Imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, **25**, 14-20.
- [6] Baraniuk, R. (2007) Compressive sensing [lecture notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*, **24**, 118-121.
- [7] Baraniuk, R. (2008) Compressive sensing. *42nd Annual Conference on Information Sciences and Systems*, Princeton, 19-21 March 2008, iv-v.
- [8] 金坚, 谷源涛, 梅顺良 (2010) 压缩采样技术及其应用. *电子与信息学报*, **2**, 470-475.
- [9] Do, T.T., Gan, L., Nguyen, N., et al. (2008) Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing. *42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, 26-29 October 2008, 581-587.
- [10] 朱延万, 赵拥军, 孙兵 (2012) 一种改进的稀疏度自适应匹配追踪算法. *信号处理*, **1**, 80-86.