

A Stabilized Crank-Nicolson Finite Volume Element Formulation for Non-Stationary Stokes Equation*

Hong Li¹, Zhihui Zhao¹, Zhendong Luo²

¹School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Huhhot

²School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing
Email: malhong@imu.edu.cn, zhaozhihui2328@sina.com, zhdluo@ncepu.edu.cn

Received: Mar. 18th, 2013; revised: Apr. 2nd, 2013; accepted: Apr. 18th, 2013

Copyright © 2013 Hong Li et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: A stabilized Crank-Nicolson (CN) finite volume element formulation with time second-order accuracy is established for two-dimensional non-stationary Stokes equation. The error estimates of its numerical solutions are provided. Some numerical experiments are presented illustrating that the stabilized CN finite volume element formulation with time second-order accuracy is far more advantageous than that with time first-order accuracy, thus validating that the stabilized CN finite volume element formulation is feasible and efficient for finding the numerical solutions for two-dimensional non-stationary Stokes equation.

Keywords: Stokes Equation; Stabilized Crank-Nicolson Finite Volume Element Formulation; Error Estimate

非定常 Stokes 方程的稳定化 CN 有限体积元格式*

李 宏¹, 赵智慧¹, 罗振东²

¹内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特

²华北电力大学数理学院, 北京

Email: malhong@imu.edu.cn, zhaozhihui2328@sina.com, zhdluo@ncepu.edu.cn

收稿日期: 2013 年 3 月 18 日; 修回日期: 2013 年 4 月 2 日; 录用日期: 2013 年 4 月 18 日

摘 要: 建立二维非定常 Stokes 方程的时间二阶精度的稳定化 Crank-Nicolson (CN)有限体积元格式, 并给出其稳定化 CN 有限体积元解的误差估计。数值实验说明时间二阶精度的稳定化 CN 有限体积元格式比时间一阶精度格式更优越, 从而表明稳定化 CN 有限体积元格式对于求解非定常 Stokes 方程的数值解是有效可行的。

关键词: Stokes 方程; 稳定化 Crank-Nicolson 有限体积元格式; 误差估计

1. 引言

设 $\Omega \subset R^2$ 是有界的连通凸多边形区域。考虑流体力学中的二维不可压的非定常 Stokes 方程

$$u_t - \mu \Delta u + \nabla p = f, \text{ 在 } \Omega \times (0, T) \text{ 中} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \text{ 在 } \Omega \times (0, T) \text{ 中} \quad (1.2)$$

$$u = \varphi(x, y, t), \text{ 在 } \partial\Omega \times (0, T) \text{ 上} \quad (1.3)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \text{ 在 } \Omega \text{ 中} \quad (1.4)$$

其中 $u = (u_1, u_2)^T$ 是未知的流体速度向量, p 是压力, T 是总体时间, $\mu = 1/\operatorname{Re}$, Re 是 Reynolds 数, f 是已知的源函数, $\varphi(x, y, t)$ 和 $\psi(x, y)$ 分别是已知的边值函数和初值函数。为了便于理论分析而且不失一般性, 不妨在下面的理论分析中假定 $\varphi(x, y, t)$ 和 $\psi(x, y)$

*资助信息: 国家自然科学基金(批准号: 11271127 和 11061021)和内蒙古自然科学基金(批准号: 2012MS0106)。

均为零向量。

非定常 Stokes 方程是流体力学的重要方程, 已广泛和成功地用于许多实际工程领域^[1-5]。然而当实际问题的计算域不规则或问题本身比较复杂时, 要求其解析解是很困难的, 有效的方法是求其数值解。由于有限体积元法^[6-8]能保持局部的质量或能量守恒, 其精度比有限差分法高而且能适应边界复杂的计算域, 并与有限元方法有同样精度但要比有限元方法便于计算, 因此有限体积元法被公认是最有效的数值计算方法之一。有限体积元法也称为盒子法^[8]或广义差分方法^[10], 已经广泛应用于求解各种类型的偏微分方程(例如, 二阶椭圆方程、抛物型方程、Stokes 方程等)的数值解^[6-13]。但是求解非定常 Stokes 方程的有限体积元法的流速和压力的试验空间要求满足离散的 Babuska-Brezzi (BB)条件^[12], 这对理论分析和实际应用都会产生很多困难。为了避开离散 BB 条件对 Stokes 方程有限体积元法的限制, 一些基于两局部高斯积分或自由参数的时间一阶精度的有限体积元格式已被提出^[13-15]。然而, 据我们所知, 到目前为止还没有非定常 Stokes 方程基于两局部高斯积分的时间二阶精度全离散稳定化 Crank-Nicolson (CN)有限体积元格式及其误差分析报道。因此, 本文给出非定常 Stokes 方程的时间二阶精度的全离散稳定化 CN 有限体积元格式及误差分析, 并用数值例子说明时间二阶精度的稳定化 CN 有限体积元格式比时间一阶精度格式更优越, 从而表明用稳定化 CN 有限体积元格式去求解非定常 Stokes 方程的数值解是更有效可行。

本文的安排如下, 第 2 节建立非定常的 Stokes 方程关于时间的 CN 半离散格式。第 3 节直接从时间的 CN 半离散格式出发, 建立非定常的 Stokes 方程的基于两局部高斯积分的全离散稳定化 CN 有限体积元格式, 并做误差分析, 这样可以避开关于空间变量的半离散化 CN 有限体积元格式的讨论, 使得论证过程更简便。第 4 节给出数值例子说明时间二阶精度的稳定化 CN 有限体积元格式比时间一阶精度格式更优越, 从而表明用稳定化 CN 有限体积元格式去求解非定常 Stokes 方程的数值解是更有效可行。第 5 节是主要的结论和讨论。

2. 关于时间半离散化 CN 格式

本文用到的 Sobolev 空间^[16]都是标准的。设

$U = H_0^1(\Omega)^2, M = \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q dx dy = 0\}$ 。则非定常 Stokes 方程的变分形式为:

问题 1. 求 $(\mathbf{u}, p) \in U \times M$ 使得对于任意 $t \in [0, T]$ 满足

$$(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in U \quad (2.1)$$

$$b(q, \mathbf{u}) = 0, \forall q \in M \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{0}, \text{ 在 } \Omega \text{ 中} \quad (2.3)$$

其中 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}), b(q, \mathbf{v}) = -(q, \text{div } \mathbf{v}), (\cdot, \cdot)$ 为 $L^2(\Omega)$ 或 $L^2(\Omega)^2$ 或 $L^2(\Omega)^{2 \times 2}$ 中的内积。

注意到双线性型 $b(q, \mathbf{v})$ 满足 BB 条件^[1-5]:

$$\sup_{\mathbf{v} \in U} \frac{b(q, \mathbf{v})}{\|\nabla \mathbf{v}\|_0} \geq \beta \|q\|_0, \forall q \in M \quad (2.4)$$

其中 β 是正常数。双线性型 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和 $b(q, \mathbf{v})$ 满足有界性

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \mu \|\nabla \mathbf{u}\|_0 \|\nabla \mathbf{v}\|_0, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \quad (2.5)$$

$$|b(q, \mathbf{v})| \leq C \|q\|_0 \|\nabla \mathbf{v}\|_0, \mathbf{v} \in U, q \in M \quad (2.6)$$

其中 C 是正常数。双线性型 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 还满足正定性

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mu \|\nabla \mathbf{v}\|_0^2, \mathbf{v} \in U \quad (2.7)$$

归咎于(2.4)~(2.7), 当 $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^2$ 时, 问题 1 的解是存在唯一的^[1-5]。

设 N 为正整数, 时间步长为 $k = T/N$, $t_n = nk$, \mathbf{u}^n 为 \mathbf{u} 在 $t_n (n = 0, 1, \dots, N)$ 点关于时间的半离散化逼近。则问题 1 关于时间 t 的半离散化 CN 格式为

问题 2. 求 $(\mathbf{u}^n, p^n) \in U \times M (n = 1, 2, \dots, N)$ 满足

$$2(\mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + ka(\mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + 2kb(p^n, \mathbf{v}) = 2k(\mathbf{f}^{n-1/2}, \mathbf{v}) + 2(\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v}) - ka(\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in U \quad (2.8)$$

$$b(q, \mathbf{u}^n) = 0, \forall q \in M \quad (2.9)$$

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}, \text{ 在 } \Omega \text{ 中} \quad (2.10)$$

其中 $\mathbf{f}^{n-1/2} = \mathbf{f}(t_{n-1/2})$ 。

利用[2,15]中类似的方法可以证明问题 2 存在唯一的解 $(\mathbf{u}^n, p^n) \in U \times M (n = 1, 2, \dots, N)$ 满足

$$\|\mathbf{u}^n\|_0^2 + k \sum_{i=1}^n \left[\|\nabla(\mathbf{u}^i + \mathbf{u}^{i-1})\|_0^2 + \|p^i\|_0^2 \right] \leq Ck \sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}^{i-1/2}\|_0^2 \quad (2.11)$$

而且当问题 1 的解

$$(\mathbf{u}, p) \in H^1(0, T; U) \times L^2(0, T; M)$$

时, 有下面的误差估计

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}^n\|_0 \\ & + k^{1/2} \left[\|\nabla(\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}^n)\|_0 + \|p(t_n) - p^n\|_0 \right] \leq Ck^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中 C 是与 k 无关的常数。

3. 稳定化的全离散 CN 有限体积元格式及误差分析

3.1. 有限体积元原理

为了获得问题 2 的有限体积元解, 需要对计算域 Ω 做下面的三角形剖分和对偶剖分。

设 $\mathfrak{T}_h = \{K\}$ 是具有最大直径 $h = \max_{K \in \mathfrak{T}_h} \{h_K\}$ 的拟一致三角形剖分, 其中 h_K 是三角形 $K \in \mathfrak{T}_h$ 的直径^[4,5]。为了刻画有限体积元方法, 我们还要引入基于 \mathfrak{T}_h 的对偶剖分 \mathfrak{T}_h^* , 它的单元称为控制元, 控制元的构造与[10]中的构造相同。设 z_K 是单元 $K \in \mathfrak{T}_h$ 的重心, 将 z_K 与三角形 K 的各边中点连结, 把 K 剖分成三个小四边形 K_z (如图 1 的左图)。记 $Z_h(K)$ 为 K 的顶点, 则 $Z_h = \bigcup_{K \in \mathfrak{T}_h} Z_h(K)$ 为 \mathfrak{T}_h 的顶点集合。对于每个 $z \in Z_h$,

由所有享有顶点 z 的小四边形构成控制元 V_z (如图 1 的右图)。所有的控制元覆盖 $\bar{\Omega}$, 构成 \mathfrak{T}_h 的重心型对偶剖分 \mathfrak{T}_h^* 。用 Z_h° 表示剖分 \mathfrak{T}_h 的顶点集合 Z_h 的内部顶点集合。

重心型对偶剖分 \mathfrak{T}_h^* 称为是拟一致的, 如果存在两个不依赖于 h 的正数 C_1 和 C_2 使得

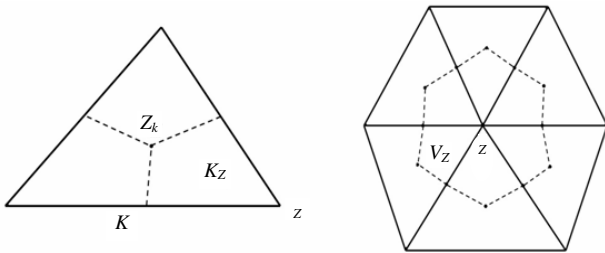


Figure 1. Left chart is a triangle K partitioned into three sub-regions K_z . Right chart is a sample region with dotted lines indicating the corresponding control volume V_z
图 1. 左图是将三角形 K 剖分成三个子四边形 K_z 。右图是用虚线连成顶点为 Z 的控制元 V_z 的样本

$$C_1 h^2 \leq m(V_z) \leq C_2 h^2, \forall V_z \in \mathfrak{T}_h^*$$

其中 $m(V_z)$ 表示 V_z 的测度。若三角剖分 \mathfrak{T}_h 是拟一致剖分, 则相应的对偶剖分 \mathfrak{T}_h^* 也是拟一致的^[10]。

定义 U 和 M 的试验空间分别为

$$\begin{aligned} U_h &= \left\{ \mathbf{v}_h \in C(\bar{\Omega})^2 \cap U; \mathbf{v}_h|_K \in P_1(K)^2, \forall K \in \mathfrak{T}_h \right\} \\ M_h &= \left\{ q_h \in M; q_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathfrak{T}_h \right\} \end{aligned}$$

其中 $P_1(K)$ 是 $K \in \mathfrak{T}_h$ 上的线性多项式构成的空间(可由 K 的顶点唯一确定)。

设 π_h 为 U 到 U_h 上的插值算子。则由 Sobolev 空间的插值理论^[4,5]知, 当 $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2$ 时, 有

$$\|\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u}\|_m \leq Ch^{2-m} \|\mathbf{u}\|_2, m = 0, 1 \quad (3.1)$$

其中 C 及后面出现 C 均表示与空间网格尺寸 h 和时间步长 k 无关的正数, 不同的出现可能不等。

速度的检验函数空间 \tilde{U}_h 取为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_h &= \left\{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^2; \mathbf{v}_h|_{V_z} \in P_0(V_z)(\nabla V_z \in \mathfrak{T}_h^*), \mathbf{v}_h|_{V_z} \right. \\ & \left. = 0(V_z \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \forall V_z \in \mathfrak{T}_h^*) \right\} \end{aligned}$$

事实上, \tilde{U}_h 可由下面的基函数

$$\varphi_z(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in V_z, \\ 0, & (x, y) \notin V_z, \end{cases} \forall z \in Z_h^\circ$$

张成。从而对于每个向量 $\mathbf{v}_h \in \tilde{U}_h$ 有

$$\mathbf{v}_h = \sum_{z \in Z_h^\circ} \mathbf{v}_h(z) \varphi_z(x, y)$$

对于 $\mathbf{w} \in U$, 设 $\pi_h^* \mathbf{w}$ 是 \mathbf{w} 在 \tilde{U}_h 上的插值, 即

$$\pi_h^* \mathbf{w} = \sum_{z \in Z_h^\circ} \mathbf{w}(z) \varphi_z(x, y)$$

则由插值理论^[4,5]有

$$\|\mathbf{w} - \pi_h^* \mathbf{w}\|_0 \leq Ch \|\mathbf{w}\|_1 \quad (3.2)$$

3.2. 稳定化全离散 CN 有限体积元格式

由于 $\tilde{U}_h \subset U_h \subset U$, 所以需要双线性型 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和 $b(q, \mathbf{v})$ 做修改。利用对偶元 V_z 上的分部积分有

$$\begin{aligned} \int_{V_z} \mathbf{v} \Delta \mathbf{u} dx dy &= \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{V_z} \mathbf{v} \Delta \mathbf{u} dx dy \\ &= \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{\partial V_z} (\mathbf{v} \nabla \mathbf{u}) \mathbf{n} ds - \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{V_z} \nabla \mathbf{v} \nabla \mathbf{u} dx dy \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{V_z} \mathbf{v} \nabla p dx dy &= \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{V_z} \mathbf{v} \nabla p dx dy \\ &= \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{\partial V_z} p \mathbf{v} \mathbf{n} ds - \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{V_z} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy \end{aligned} \quad (3.4)$$

当 $\mathbf{u}_h \in U_h$ 但 $\mathbf{v}_h \in \tilde{U}_h$ 时, 定义

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{\partial V_z} (\mathbf{v}_h \nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{n} ds \quad (3.5)$$

$$b_h(p_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{\partial V_z} p_h \mathbf{v}_h \mathbf{n} ds \quad (3.6)$$

利用 Green 格式可以证明下面两式成立^[13-15]

$$a_h(\mathbf{u}_h, \pi_h^* \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in U_h \quad (3.7)$$

$$b_h(p_h, \pi_h^* \mathbf{v}_h) = -b(p_h, \mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in U_h, \forall p_h \in M_h \quad (3.8)$$

为了定义稳定化格式, 引进基于两局部高斯积分和自由参数的双线性型

$$\begin{aligned} D(p_h, q_h) &= \varepsilon \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left[\int_{K,2} p_h q_h dx dy - \int_{K,1} p_h q_h dx dy \right] \end{aligned}$$

其中 $p_h, q_h \in M_h$, $\int_{K,i} p_h q_h dx dy$ 表示在 K 上精度为 i 的高斯积分, $g(x, y) = p_h q_h$ 是次数不超过 i ($i=1,2$) 次的多项式。于是, 对于所有的检验函数 $q_h \in M_h$, 当 $i=1$ 时, 试验函数 $p_h \in M_h$ 必须是分片常数。再定义 L^2 投影算子 $\rho_h: L^2(\Omega) \rightarrow W_h$ 如下

$$\begin{aligned} (q, q_h) &= (\rho_h q, q_h), \\ \forall q \in L^2(\Omega), q_h \in W_h \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 $W_h \subset L^2(\Omega)$ 表示相应于 \mathfrak{S}_h 的分片常数空间, 即在每个 $K \in \mathfrak{S}_h$ 是常数的空间。那么, 投影算子 ρ_h 有下面的性质^[4,5]

$$\begin{aligned} &\sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in U_h \times M_h} \left\{ 2(\mathbf{u}_h, \pi_h^* \mathbf{v}_h) + k \left[a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - 2b(q_h, \mathbf{u}_h) + 2b(p_h, \mathbf{v}_h) + 2D(p_h, q_h) \right] \right\} / (\|\nabla \mathbf{v}_h\|_0 + \|q_h\|_0) \\ &\geq k \beta_0 (\|\nabla \mathbf{u}_h\|_0 + \|p_h\|_0), \forall (\mathbf{u}_h, p_h) \in U_h \times M_h \end{aligned}$$

$$\|\rho_h p\|_0 \leq \|p\|_0, \forall p \in L^2(\Omega) \quad (3.10)$$

$$\|p - \rho_h p\|_0 \leq Ch \|p\|_1, \forall p \in H^1(\Omega) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} D(p_h, q_h) &= (p_h - \rho_h p_h, q_h) \\ &= (p_h - \rho_h p_h, q_h - \rho_h q_h) \end{aligned} \quad (3.12)$$

则问题2的稳定化全离散CN有限体积元格式为:

问题3. 求 $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in U_h \times M_h$ ($n=1,2,\dots,N$) 满足

$$\begin{aligned} &2(\mathbf{u}_h^n, \pi_h^* \mathbf{v}_h) + ka(\nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + kb(p_h^n, \mathbf{v}_h) \\ &= 2k(\mathbf{f}^{n-1/2}, \mathbf{v}_h) - ka(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) + 2(\mathbf{u}_h^{n-1}, \pi_h^* \mathbf{v}_h), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$\forall \mathbf{v}_h \in U_h$

$$b(q_h, \mathbf{u}_h^n) = D(p_h, q_h), \forall q_h \in M_h \quad (3.14)$$

$$\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{0}, \text{ 在 } \Omega \text{ 中} \quad (3.15)$$

3.3. 全离散 CN 有限体积元解的误差分析

为了证明问题3的解的存在唯一性及做误差分析, 需要引进下面两引理。

引理1^[13-15]. 有下面的对称性成立

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h, \pi_h^* \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{v}_h, \pi_h^* \mathbf{u}_h), \\ \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in U_h \end{aligned} \quad (3.16)$$

对于任意 $\mathbf{u} \in H^m(\Omega)$ ($m=0,1$) 都有

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - (\mathbf{u}, \pi_h^* \mathbf{v}_h) &\leq Ch^{m+n} \|\mathbf{u}\|_m \|\mathbf{v}_h\|_n, \\ n &= 0,1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

定义 $\|\mathbf{u}_h\|_0 = (\mathbf{u}_h, \pi_h^* \mathbf{u}_h)^{1/2}$, 则 $\|\bullet\|_0$ 与 $\|\bullet\|_0$ 等价, 即存在两个与时间步长 k 及 h 无关的正常数 C_1 和 C_2 使得

$$\begin{aligned} C_1 \|\mathbf{u}_h\|_0 &\leq \|\mathbf{u}_h\|_0 \leq C_2 \|\mathbf{u}_h\|_0, \\ \forall \mathbf{u}_h \in U_h \end{aligned} \quad (3.18)$$

引理2. 有下面上下确界不等式成立^[13-15]

归咎于引理 2, 由 Lax-Milgram 定理^[4,5]可得问题 3 存在唯一的解 $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in U_h \times M_h (n=1, 2, \dots, N)$, 并有

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_h^n\|_0^2 + k \sum_{i=1}^n \left[\|\nabla(\mathbf{u}_h^i + \mathbf{u}_h^{i-1})\|_0^2 + \|p_h^i\|_0 \right] \\ & \leq Ck \sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}^{i-1/2}\|_0^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

利用 Stokes 方程的经典有限元方法^[2,5]容易得到下一引理。

引理 3. 设 $(S_h, Q_h): U \times M \rightarrow U_h \times M_h$ 是一个 Stokes 投影对, 即对于 $(\mathbf{u}^n, p^n) \in U \times M$ 存在唯一的序列对 $(S_h \mathbf{u}^n, Q_h p^n) \in U_h \times M_h (n=1, 2, \dots, N)$ 满足

$$\begin{aligned} & A((S_h \mathbf{u}^n, Q_h p^n), (\mathbf{v}_h, q_h)) + 2kD(Q_h p^n, q_h) \\ & = A((\mathbf{u}^n, p^n), (\mathbf{v}_h, q_h)), \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in U_h \times M_h \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中

$$\begin{aligned} & A((\mathbf{u}^n, p^n), (\mathbf{v}_h, q_h)) \\ & = k \left[a(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v}_h) - 2b(q_h, \mathbf{u}) + 2b(p^n, \mathbf{v}_h) \right], \\ & + 2(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v}_h) \end{aligned}$$

并满足

$$\|\nabla S_h \mathbf{u}^n\|_0 + \|Q_h p^n\|_0 \leq C(\|\nabla \mathbf{u}^n\|_0 + \|p^n\|_0) \quad (3.21)$$

而且当 $(\mathbf{u}^n, p^n) \in H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^n - S_h \mathbf{u}^n\|_0^2 + k \|p^n - Q_h p^n\|_0^2 + k \sum_{i=1}^n \|\nabla(\mathbf{u}^i - S_h \mathbf{u}^i)\|_0^2 \leq Ch^4 \\ & \end{aligned} \quad (3.22)$$

分析问题 3 解的误差, 还需要用到下面的离散 Gronwall 引理。

引理 4 (离散 Gronwall 引理^[1,5,15]). 如果 a_n 和 b_n 及 c_n 是三个正的数列, 且 c_n 是单调的, 并满足

$$a_0 + b_0 \leq c_0; a_n + b_n \leq c_n + \bar{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} a_i, n \geq 1, \bar{\lambda} > 0$$

那么有

$$a_n + b_n \leq c_n \exp(n\bar{\lambda}), n \geq 0$$

对于问题 3 的解, 有下面的收敛性结果。

定理 5. 如果问题 I 的 $(\mathbf{u}, p) \in H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$,

而且 $k = O(h)$ 充分小和 $p_h^0 = p^0 = 0$ 或 $p_h^0 = Q_h p^0$, 则 $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in U_h \times M_h (n=1, 2, \dots, N)$ 有下面的误差估计

$$\begin{aligned} & k^{1/2} \|p(t_n) - p_h^n\|_0 + k \sum_{i=1}^n \|\nabla(\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_h^n)\|_0 + \|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_h^n\|_0 \\ & \leq C(k^2 + h^2) \end{aligned} \quad (3.23)$$

证明. 在问题 2 中取 $(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{v}_h, q_h)$ 并与问题 3 相减可得到下面的误差方程

$$\begin{aligned} & A((\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n, p^n - p_h^n), (\mathbf{v}_h, q_h)) - 2kD(p_h^n, q_h) \\ & = 2(\mathbf{u}_h^{n-1} - \pi_h^* \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h - \pi_h^* \mathbf{v}_h) - 2(\mathbf{u}_h^n - \pi_h^* \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h - \pi_h^* \mathbf{v}_h) \\ & + 2k(\mathbf{f}^{n-1/2} - \pi_h^* \mathbf{f}^{n-1/2}, \mathbf{v}_h - \pi_h^* \mathbf{v}_h), \\ & \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in U_h \times M_h \end{aligned} \quad (3.24)$$

令

$\mathbf{E}^n = S_h \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n, \bar{\mathbf{u}}^n = (\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1})/2, \mathbf{e}^n = Q_h p^n - p_h^n$ 。则由(3.20)和误差方程(3.24)有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^n\|_0^2 + k\mu \|\nabla \bar{\mathbf{E}}^n\|_0^2 \\ & = (S_h \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{E}}^n) + ka(S_h \bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^n, \bar{\mathbf{E}}^n) \\ & + (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n, \bar{\mathbf{E}}^n) + ka(\bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n, \bar{\mathbf{E}}^n) - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{n-1}, \mathbf{E}^n) \\ & = (S_h \mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}^{n-1}, \bar{\mathbf{E}}^n) - kb(\bar{\mathbf{E}}^n, Q_h p^n - p^n) \\ & - kb(\bar{\mathbf{E}}^n, p^n - p_h^n) - (\mathbf{u}_h^n - \pi_h^* \mathbf{u}_h^n, \bar{\mathbf{E}}^n - \pi_h^* \bar{\mathbf{E}}^n) \\ & - (\mathbf{u}_h^n - \pi_h^* \mathbf{u}_h^n, \bar{\mathbf{E}}^n - \pi_h^* \bar{\mathbf{E}}^n) + (\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}_h^{n-1}, \bar{\mathbf{E}}^n) \\ & - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{n-1}, \mathbf{E}^n) + k(\mathbf{f}^{n-1/2} - \pi_h^* \mathbf{f}^{n-1/2}, \bar{\mathbf{E}}^n - \pi_h^* \bar{\mathbf{E}}^n) \\ & = k(\mathbf{f}^{n-1/2} - \pi_h^* \mathbf{f}^{n-1/2}, \bar{\mathbf{E}}^n - \pi_h^* \bar{\mathbf{E}}^n) + \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{n-1}, \mathbf{E}^n) \\ & - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1} - \pi_h^*(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}), \bar{\mathbf{E}}^n - \pi_h^* \bar{\mathbf{E}}^n) - kb(\bar{\mathbf{E}}^n, \mathbf{e}^n) \end{aligned} \quad (3.25)$$

由引理 1、Hölder 不等式和 Cauchy 不等式, 当 $k = O(h)$ 时, 有

$$\begin{aligned} & k(\mathbf{f}^{n-1/2} - \pi_h^* \mathbf{f}^{n-1/2}, \bar{\mathbf{E}}^n - \pi_h^* \bar{\mathbf{E}}^n) \\ & \leq Ckh^2 \|\mathbf{f}^{n-1/2}\|_1 \|\nabla \bar{\mathbf{E}}^n\|_0 \leq Ckh^4 \|\mathbf{f}^{n-1/2}\|_1^2 + \frac{\mu k}{4} \|\nabla \bar{\mathbf{E}}^n\|_0^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

由逆估计定理^[4,5]和 Taylor 公式, 有

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1} - \pi_h^* (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}), \bar{\mathbf{E}}^n - \pi_h^* \bar{\mathbf{E}}^n \right) \right| \\
 & \leq Ch^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_1 \|\nabla \bar{\mathbf{E}}^n\|_0 \\
 & \leq Ch^3 \|\nabla \mathbf{E}^n\|_0^2 + Ch^3 \|\nabla (S_h \mathbf{u}^n - S_h \mathbf{u}^{n-1})\|_0^2 \\
 & \quad + Ch^3 \|\nabla \mathbf{E}^{n-1}\|_0^2 + \frac{\mu k}{4} \|\nabla \bar{\mathbf{E}}^n\|_0^2 \\
 & \leq Ch^3 \|\nabla \mathbf{E}^n\|_0^2 + Ch^3 k^2 \|\mathbf{u}_t\|_{L^\infty(H^1)}^2 \\
 & \quad + Ch^3 \|\nabla \mathbf{E}^{n-1}\|_0^2 + \frac{\mu k}{4} \|\nabla \bar{\mathbf{E}}^n\|_0^2
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

由(3.9)和(3.14)及 Hölder 不等式和 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}
 b(\bar{\mathbf{E}}^n, e^n) &= -\frac{\varepsilon}{2} (e^n - \rho_h e^n, e^n - \rho_h e^n) \\
 & \quad - \frac{\varepsilon}{2} (e^{n-1} - \rho_h e^{n-1}, e^n - \rho_h e^n) \\
 & \leq \frac{\varepsilon}{4} \|e^{n-1} - \rho_h e^{n-1}\|_0^2 - \frac{\varepsilon}{4} \|e^n - \rho_h e^n\|_0^2
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

结合(3.25)~(3.28)得

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{E}^n\|_0^2 + k\mu \|\nabla \bar{\mathbf{E}}^n\|_0^2 - \frac{\varepsilon k}{4} \|e^{n-1} - \rho_h e^{n-1}\|_0^2 + \frac{\varepsilon k}{4} \|e^n - \rho_h e^n\|_0^2 \\
 & \leq Ckh^4 \|\mathbf{f}^{n-1/2}\|_1^2 + Ch^3 k^2 \|\mathbf{u}_t\|_{L^\infty(H^1)}^2 \\
 & \quad + \|\mathbf{E}^{n-1}\|_0^2 + Ch \|\mathbf{E}^{n-1}\|_0^2 + Ch \|\mathbf{E}^n\|_0^2
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

对上式从 1 到 n 求和, 当 h 充分小使得 $Ch \leq 1/2$ 和 $p_h^0 = p^0 = 0$ 或 $p_h^0 = Q_h p^0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{E}^n\|_0^2 + k \sum_{i=1}^n \|\nabla \bar{\mathbf{E}}^i\|_0^2 + k \|e^n - \rho_h e^n\|_0^2 \\
 & \leq Ch^4 + Ch \sum_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{E}^i\|_0^2
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

对上式用离散 Gronwall 引理 4 可得到

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{E}^n\|_0^2 + k \sum_{i=1}^n \|\nabla \bar{\mathbf{E}}^i\|_0^2 + \varepsilon k \|e^n - \rho_h e^n\|_0^2 \\
 & \leq Ch^4 \exp(Chn) \leq Ch^4
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

注意到 $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \left[\sum_{i=1}^n a_i \right]^2 / n$ 及 $|a+b| \geq |a| - |b|$ 由上式

$$\begin{aligned}
 & \|S_h \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_0 + (\varepsilon k)^{1/2} \|e^n - \rho_h e^n\|_0 \\
 & + k \sum_{i=1}^n \|\nabla (S_h \mathbf{u}^i - \mathbf{u}_h^i)\|_0 \leq Ch^2
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

若 $e^n = Q_h p^n - p_h^n = 0$, 则 $Q_h p^n = p_h^n$, 则由(3.22)有

$$k^{1/2} \|p^n - p_h^n\|_0 = k^{1/2} \|p^n - Q_h p^n\|_0 \leq Ch^2 \tag{3.33}$$

若 $e^n = Q_h p^n - p_h^n \neq 0$, 则 $\|e^n\|_0^2 - \|\rho_h e^n\|_0^2 > 0$ 。因此存在常数 $0 < \alpha < 1$ 使得 $\alpha \|e^n\|_0 = \|\rho_h e^n\|_0$ 。于是, 有

$$(1-\alpha) \|e^n\|_0 = \|e^n\|_0 - \|\rho_h e^n\|_0 \leq \|e^n - \rho_h e^n\|_0 \tag{3.34}$$

取 $\varepsilon = (1-\alpha)^2$, 由(3.32)和(3.34)及引理 3 得

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_0 + k^{1/2} \|p^n - p_h^n\|_0 + k \sum_{i=1}^n \|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}_h^i\|_1 \leq Ch^2 \tag{3.35}$$

把(3.33)和(3.35)与结合(2.12)得(3.23)。定理 5 证毕。

4. 数值实验

下面给出数值例子, 验证非定常 Stokes 的时间二阶精度的稳定化 CN 有限体积元格式比时间一阶精度格式更优越, 从而表明用稳定化 CN 有限体积元格式去求解非定常 Stokes 方程的数值解是更有效可行。

计算域取为 $\bar{\Omega} = ([-1, 2] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [-1, 0])$

(如图 2 所示), 源函数 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, $\text{Re} = 1000$, $T = 2$, 初始函数和边值函数取为: 左入口 $\boldsymbol{\varphi}(x, y, t) = \boldsymbol{\psi}(x, y) = (0, y(1-y))$, 右出口为 $\boldsymbol{\varphi}(x, y, t) = \boldsymbol{\psi}(x, y) = (0, 2)$, 其他的边界的速度均 $\mathbf{0}$ 。

将计算域 $\bar{\Omega} = ([-1, 2] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [-1, 0])$ 剖分为边长 $\Delta x = \Delta y = 0.01$ 小正方形, 然后在同一方向连结其对角线将每个小正方形剖分成为两个小三角形构成 $h = \sqrt{2} \times 0.01$ 的三角形剖分 \mathfrak{S}_h 。对偶剖分取为重心

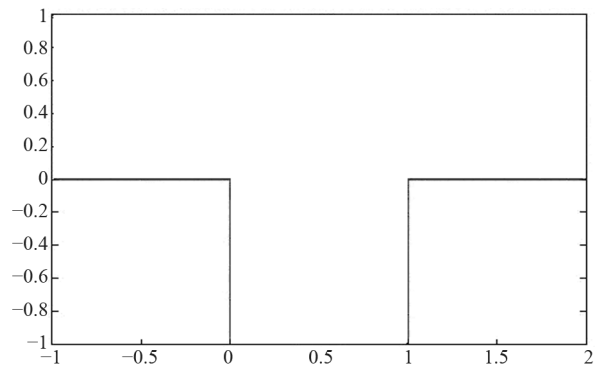


Figure 2. Computational field
图 2. 计算域

型对偶剖分 \mathfrak{S}_h^* 。时间步长 $k = 0.01$ 。

用[15]中的时间一阶精度的有限体积元格式算出 $t = 2$ 时的速度和压力分别解画在图 3 和图 5 中。

利用时间二阶精度的稳定化 CN 有限体积元格式问题 3 算出 $t = 2$ 时的速度和压力分别解画在图 4 和图 6。

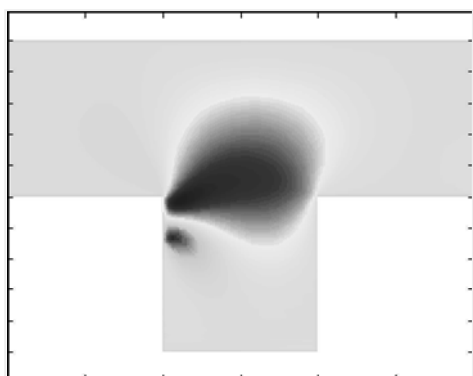


Figure 3. Time first-order accuracy finite volume element solution of velocity at $t = 2$

图 3. 在 $t = 2$ 处的时间一阶精度的速度有限体积元解

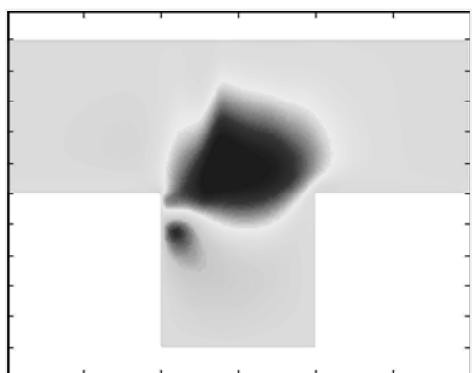


Figure 4. Time second-order accuracy CN finite volume element solution of velocity at $t = 2$

图 4. 在 $t = 2$ 处时间二阶精度的速度 CN 有限体积元解

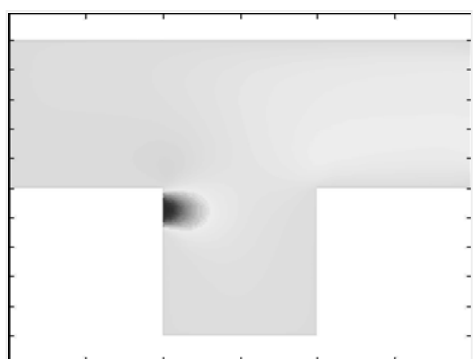


Figure 5. Time first-order accuracy finite volume element solution of pressure at $t = 2$

图 5. 在 $t = 2$ 处的时间一阶精度的压力有限体积元解

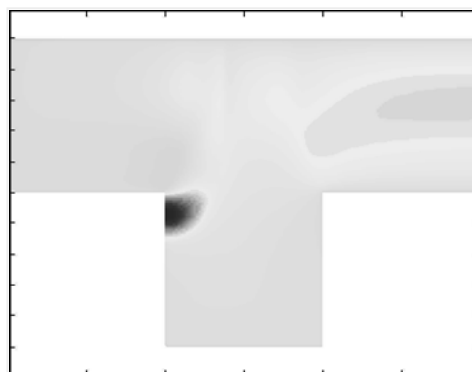


Figure 6. Time second-order accuracy CN finite volume element solution of pressure at $t = 2$

图 6. 在 $t = 2$ 处时间二阶精度的压力 CN 有限体积元解

比较图 3 和图 4 以及图 5 和图 6 可看出, 时间二阶精度的稳定化 CN 有限体积元格式的速度(见图 4)和压力(见图 6)的数值结果明显比时间一阶精度的有限体积元格式的速度(见图 3)和压力(见图 5)的数值结果要好。这也说明了用稳定化 CN 有限体积元格式问题 3 求解非定常 Stokes 方程的数值解更有效可行。

在用时间一阶精度的有限体积元格式^[15]求非定常 Stokes 方程的数值解时, 为了得到 $O(10^{-4})$ 的精度, 时间步长取为 10^{-4} 。这样, 当用时间一阶精度的有限体积元格式^[15]计算 $t = 2$ 的解时, 要计算 2×10^4 步。而用稳定化的 CN 有限体积元降格式问题 3 只要计算 200 步, 计算步数减少 100 倍, 从而能减少计算过程中截断误差的积累。因此利用稳定化 CN 有限体积元格式问题 3 求解非定常 Stokes 方程的数值解可以极大地减少计算量, 从而能减少计算过程中截断误差的积累。所以非定常 Stokes 方程的稳定化 CN 有限体积元格式问题 3 比时间一阶精度的有限体积元格式^[15]更优越。

5. 结论和讨论

本文建立了二维非定常 Stokes 方程的时间二阶精度的稳定化 CN 有限体积元格式、分析了稳定化 CN 有限体积元解的误差。并用数值实验了二维非定常 Stokes 方程的时间二阶精度的稳定化 CN 有限体积元格式在求解二维非定常 Stokes 方程的数值解时, 比时间一阶精度的有限体积元格式^[15]更有效。

特别是, 利用时间二阶精度的稳定化 CN 有限体积元格式问题 3 求解非定常 Stokes 方程的数值解时, 至少要比时间一阶精度的有限体积元降格式节省 100

倍的计算量(当 $k \leq 0.01$ 时), 从而能减少计算过程中截断误差的积累, 提高数值解的计算精度。因此, 非定常 Stokes 方程的时间二阶精度的稳定化 CN 有限体积元格式问题 3 比时间一阶精度的有限体积元格式^[15]更优越。

参考文献 (References)

- [1] V. Girault, P. A. Raviart. Finite element methods for Navier-Stokes equations: Theory and algorithms. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1986.
- [2] J. G. Heywood, R. Rannacher. Finite element approximation of the non-stationary Navier-Stokes problem part IV: Error analysis for second-order time discretization. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1990, 27(2): 353-384.
- [3] F. Brezzi, J. Douglas, Jr. Stabilized mixed method for the Stokes problem. Numerische Mathematik, 1988, 53(1-2): 225-235.
- [4] F. Brezzi, M. Fortin. Mixed and hybrid finite element methods. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [5] 罗振东. 混合有限元法基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [6] Z. Cai, S. McCormick. On the accuracy of the finite volume element method for diffusion equations on composite grid. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1990, 27(3): 636-655.
- [7] E. Suli. Convergence of finite volume schemes for Poisson's equation on non-uniform meshes. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1991, 28 (5): 1419-1430.
- [8] W. P. Jones, K. R. Menzies. Analysis of the cell-centered finite volume method for the diffusion equation. Journal of Computational Physics, 2000, 165: 45-68.
- [9] R. E. Bank, D. J. Rose. Some error estimates for the box methods. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1987, 24(4): 777-787.
- [10] R. H. Li, Z. Y. Chen and W. Wu. Generalized difference methods for differential equations-numerical analysis of finite volume methods. New York: Marcel Dekker Inc., 2000.
- [11] P. Chatzipantelidis, R. D. Lazarrov and V. Thomee. Error estimates for a finite volume element method for parabolic equations in convex in polygonal domains. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2004, 20: 650-674.
- [12] X. Ye. On the relation between finite volume and finite element methods applied to the Stokes equations. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2001, 17: 440-453.
- [13] M. Yang, H. L. Song. A post processing finite volume element method for time-dependent Stokes equations. Applied Numerical Mathematics, 2009, 59(8): 1922-1932.
- [14] J. Li, Z. X. Chen. A new stabilized finite volume method for the stationary Stokes equations. Advances in Computational Mathematics, 2009, 30(2): 141-152.
- [15] 安静, 孙萍, 罗振东, 黄晓鸣. 非定常 Stokes 方程的稳定化全离散有限体积元格式[J]. 计算数学, 2011, 33(2): 213-224.
- [16] R. A. Adams. Sobolev Space [M]. New York: Academic Press, 1975.