

Characterization of Low-Gravity Liquid Sloshing with Small Amplitude in a Cylindrical Cavity Basing on Bessel Expansion Method*

Xiaoqiang Shi, Baozeng Yue, Qunfeng Xu

Department of Mechanics, School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing
Email: sxy103@163.com

Received: Nov. 27th, 2012; revised: Dec. 10th, 2012; accepted: Dec. 26th, 2012

Abstract: The present study is based on the problem of liquid sloshing with small amplitude in a partial filling cylindrical cavity under harmonic excitation and low-gravity environment. Liquid sloshing velocity potential and wave height function, which are the problems belong to Laplace equation and boundary conditions, were formulated using Bessel expansion method in this paper. Since the phenomenon “crescent” of free surface due to low-gravity, the solving process of velocity potential and wave height become more difficult. And the study of characters of liquid sloshing with small amplitude in a cylindrical cavity in low-gravity condition was presented. Based on the consideration of surface tension and the foundation of the predecessor studies, the analytical solution of Laplace equation was calculated after the liquid velocity potential and wave height function were formulated firstly. Then the liquid sloshing force and sloshing moment were given, and frequency of liquid free sloshing and velocity potential were computed. The equivalent mechanical model of mass-spring was established by mechanical equivalent principle. The present method was certified by comparison between numerical solution and analytical solution. The relationship between parameters of the equivalent mechanical models and Bond number were revealed.

Keywords: Bessel Function; Low-Gravity; Liquid Sloshing; Equivalent Mechanical Models

基于 Bessel 展开法的微重下圆柱贮箱内液体小幅晃动特性研究*

史晓强, 岳宝增, 徐群峰

北京理工大学宇航学院力学系, 北京
Email: sxy103@163.com

收稿日期: 2012 年 11 月 27 日; 修回日期: 2012 年 12 月 10 日; 录用日期: 2012 年 12 月 26 日

摘要: 以微重环境下部分充液圆柱贮箱受横向简谐激励作用时液面小幅晃问题为研究背景, 利用一阶 Bessel 函数构造了满足该问题中存在的 Laplace 方程和边界条件的速度势和波高函数。由于微重下的自由静液面呈复杂的“弯月形”, 这使得要求速度势和波高函数精确满足自由液面处的边界条件存在一定的困难。在前人研究的基础上, 运用第二类边界条件下的 Bessel 函数展开法, 对微重下的自由液面条件进行精确处理, 得到晃动速度势和波高函数的一种半解析法。进一步推导了晃动力和晃动力矩的求解式, 并基于等效准则建立了液体自由晃动的弹簧-振子等效力学模型。通过数值计算和对比, 验证了文中方法的准确性, 并研究了等效力学模型中的参数与 Bond 数之间的变化规律。

关键词: Bessel 函数; 微重力; 液体晃动; 等效力学模型

*基金项目: 国家自然科学基金(11072030)资助项目。

1. 引言

液体晃动问题在上世纪 60 年代初开始, 逐渐得到了航空航天工程师的广泛关注, 其研究在航空航天和核工业领域得到了发展和应用。为了引入晃动对系统动力学与控制的影响, 在工程上通常采用等效力学模型, 即将液体的某阶的晃动等效为一个单摆或者弹簧振子(对于小幅晃动), 使等效系统与相应阶的晃动具有相同的动力学特性。晃动频率和阻尼是工程上最为关心的两个参数。以充液卫星姿态控制为例, 计算晃动频率是为了在设计中设法避免液体晃动、姿态运动和弹性附件振动的共振。对于携带液体燃料的卫星, 由于贮箱液体燃料的晃动可能导致卫星姿态的失稳, 控制系统设计时必须考虑到液体晃动的影响。此外, 从科学研究角度看, 晃动作为一种复杂的流体现象, 自由表面时时刻刻在变化着, 而且很多时候还与限制其运动范围的固体壁面具有较强的耦合作用, 给问题的求解带来了很大的困难, 具有相当的挑战性。因此, 研究晃动这样一个复杂的数理问题, 不仅有显而易见的工程实际意义, 也有非常重要的科学研究价值。

多年来, 国内外学者对储腔内液体晃动做了大量的研究。对于理想液体的小幅晃动问题, Peterson, Crawley 等人采用一个简单的弹簧振子来代表航天器的线性弹性振动, 在质量块上固定一充液圆柱贮箱, 通过独到的实验及部分理论分析考察了该液体 - 航天器非线性耦合系统的动力学行为^[1,2]; Berry 和 Tegar^[3]提出了一种求解低重工况下液体大幅晃动作用力的工程近似算法, 即质心面等效力学模型; 文献[4,5]研究了平放式贮箱的三轴定向充液卫星的液体晃动及其姿态动力学问题, 建立了充液系统的等效力学模型; 文献[6]用网格法研究了球形储腔内液体的晃动特性; 文献[7]用特征函数展开法研究了带有隔板的球形储腔内的液体晃动特性; 文献[8]研究了失重时方形容器内液体自由晃动的频率特性; 文献[9]通过建立等效力学模型设计了充液航天器防晃系统; 文献[10,11]采用有限元数值求解任意刚性容器内液体三维晃动的固有频率和模态。

本文基于一阶 Bessel 函数构造了满足该问题中存在的 Laplace 方程和部边界条件的速度势和波高函数。微重环境下的液体晃动问题的难点是对自由液面的

处理, 由于微重下的自由静液面由于毛细力的作用, 使得自由静液面呈复杂的“弯月形”, 这使得要求速度势和波高函数精确满足自由液面处的边界条件存在一定的困难。本文在前人研究的基础上, 考虑了表面张力作用, 更符合真实的微重力环境, 值得一提的是本文修正了 F.T.DODGE 在推导展开系数 C_{2nm} , C_{3nm} 的表达式的错误之处^[12], 并且运用第二类边界条件下的 Bessel 函数展开法, 对微重下的自由液面条件进行精确处理, 得到晃动速度势和波高函数的一种半解析法。进一步推导了晃动力和晃动力矩的求解式, 并基于等效准则建立了液体自由晃动的弹簧 - 振子等效力学模型。最后通过数值计算和对比, 验证了方法的准确性, 并探究等效力学模型中的一阶晃动质量, 弹簧刚度, 质心高度等参数与 Bond 数之间的变化规律。

2. 基本方程

假设液体为理想不可压缩无旋流体, 故忽略液体粘性的影响, 柱坐标系与腔体固联, 原点置于未受扰自由液面最低点, 如图 1 所示。储腔内液体小幅晃动时, 由于液体的运动只发生在自由液面处, 可建立液体运动的势函数。

液体位于在轴负半轴, 如果充液比是 $h/2R > 1$, 这极大地简化了代数运算。液面静止高度为 $f(r)$, 波高函数为 $\eta(r, \theta, z, t)$ 。定义速度势函数是 $\Phi(r, \theta, z, t)$, 液体相对于储液罐的速度 v , 速度势函数满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

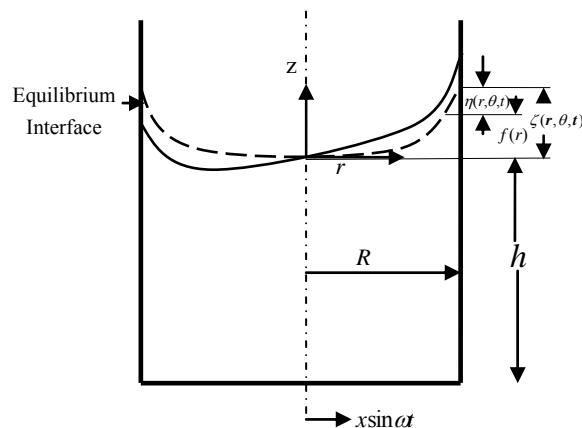


Figure 1. Cylindrical cavity model
图 1. 圆柱形储腔模型

边界条件:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 0, \quad R = 1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0, \quad Z = -\infty \quad (3)$$

对运动方程的首次积分, 给出了速度势与波高的关系。再由伯努利方程知流线上任意两点的压力势能、动能与位势能之和保持不变, 得到另一边条件, 推导出其关系表达式为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \varepsilon - \frac{1}{N_{BO}} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{R \frac{\partial \varepsilon}{\partial R}}{\left(1 + \left(\frac{dF}{dR} \right)^2 \right)^{3/2}} \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}}{\left(1 + \left(\frac{dF}{dR} \right)^2 \right)^{1/2}} \right\} \right) \\ = X_0 \Omega^2 r \cos \theta \sin \Omega \tau \quad Z = F \end{aligned} \quad (4)$$

自由液面的速度与流体的速度必定是相等, 根据这个条件, 速度势函数与波高函数有下边的关系, 将该条件线性化:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z} + \frac{dF}{dR} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = 0, \quad Z = F \quad (5)$$

假设液体在未扰动的时刻接触角是零。然而液体在晃动的过程中这个接触角与静态接触角是不相同的, 这个现象叫接触角迟滞现象。本文采用文献[9]的假设:

$$\partial \varepsilon / \partial R = 0, \quad R = 1, \quad Z = F(1) \quad (6)$$

因此, 接触角被定义为:

$$\theta_c = \cot^{-1} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial r} / \left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{r \partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (r = R_0)$$

根据式(6)知道, 在线性化假设中这个接触角是零。

显然, 在分析液体晃动之前, 首先要求解平衡自由液面函数 $F(R)$ 。要精确计算 $F(R)$ 是非常复杂的, 因此通过近似的表达式可以得到。当邦德数 $N_{BO} \ll 1$

时, 静液面形状近似为球形, 即为:

$F(R) = 1 - (1 - R^2)^{1/2}$, 随着 N_{BO} 的增加, 静液面变的越来越水平。在 Satterlee 和 Chin^[9]对球形静液面修改为 $F(R) = \beta \left[1 - (1 - R^2)^{1/2} \right]$, 这是一种近似解决的方法, 其中 β 是 N_{BO} 的函数, 当 $N_{BO} < 10$ 时, 与实验结果完全吻合^[9], 对于邦德数 $10 < N_{BO} < 100$ 的情况, 根据文献[5]:

$$F(R) = \beta \left[1 - (1 - R^3)^{3/2} \right] \quad (7)$$

这个静液面的曲率是小于球形曲率, 式(7)是满足边界条件: $F(0) = dF(0)/dR = 0$ 和

$dF(1)/dR = \cot \theta_c = \infty$; 代入式(4)也满足。是无量纲波高, 利用式(7)在 $R = 1$ 满足 β , 这样的函数为:

$$\beta^3 N_{BO} - \beta^2 - 2/3 = 0 \quad (8)$$

当 $N_{BO} < 10$ 时, 根据文献[6]知, (7)式和(8)式是完全吻合, 根据以上分析知道, 没有函数或者是一组函数能够精确的满足方程(1)~(6)。然而有多种近似的方法, 在常重情况下, 一般选择已知一组函数模拟液体晃动, 本文也采用该方法, 因为当 $N_{BO} > 10$ 时, 体力仍然是其主导作用。因此, 假设速度势为:

$$\Phi(R, \theta, Z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\tau) \cdot J_1(\lambda_n R) \cdot \cos \theta \cdot e^{\lambda_n Z} \quad (9)$$

波形函数为:

$$\varepsilon(R, \theta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\tau) \cdot J_1(\lambda_n R) \cdot \cos \theta \quad (10)$$

Bessel 函数 $J_1'(\lambda_n) = 0$ 根为 λ_n , 式(9)(10)级数展开是满足方程(1)(2)(3)和(6)。在 $0 \leq R \leq 1$, 每个贝塞尔函数是正交的。

为了得到 a_n 和 b_n , 将式(9)(10)代入边界条件中(4)(5)中, 将两式化解为 Bessel-Fourier 函数的级数形式 $J_1(\lambda_n R) \cos \theta$, 由式(5)得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{b}_n + \sum_{m=1}^{\infty} C1_{nm} a_m \right\} J_1(\lambda_n R) \cos \theta = 0 \quad (11)$$

由式(4)得到:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n + \sum_{m=1}^{\infty} C2_{nm} \dot{a}_m + \sum_{m=1}^{\infty} C3_{nm} b_m \right. \\ \left. - \frac{2X_0 \Omega^2}{(\lambda_n^2 - 1) J_1(\lambda_n)} \sin \Omega \tau \right\} J_1(\lambda_n R) \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

其中:

$$\begin{aligned}
 C1_{nm} &= \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 - 1)[J_1(\lambda_n)]^2} \\
 &\times \int_0^1 \left\{ -\lambda_m J_1(\lambda_m R) + \frac{3\beta R^2}{2(1-R^3)^{1/2}} J_1'(\lambda_m R) \right\} \\
 &\times J_1(\lambda_n R) e^{\lambda_n \beta [1-(1-R^3)^{1/2}]} dR \\
 C2_{nm} &= \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 - 1)[J_1(\lambda_n)]^2} \\
 &\times \int_0^1 R J_1(\lambda_m R) J_1(\lambda_n R) e^{\lambda_n \beta [1-(1-R^3)^{1/2}]} dR \\
 C3_{nm} &= \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 - 1)[J_1(\lambda_n)]^2} \int_0^1 \frac{R}{N_{Bo} \left(1 - R^3 + \frac{9}{4} \beta^2 R^4 \right)^{3/2}} \\
 &\times \left\{ (1-R^3)^{3/2} \lambda_n^2 J_1(\lambda_n R) + \frac{9}{4} \beta^2 R^2 (1-R^3)^{1/2} J_1(\lambda_n R) \right. \\
 &\left. + \left[\frac{9\beta^2 R^3 (1-0.25R^3)(1-R^3)^{1/2}}{\left(1 - R^3 + \frac{9\beta^2 R^4}{4} \right)^{1/2}} J_1'(\lambda_n R) \right] J_1(\lambda_m R) \right\} dR
 \end{aligned}$$

由于一阶 Bessel 函数是具有正交性, 因此, 结合式(11)(12)消去 $b_n(\tau)$, 得到关于 $a_n(\tau)$ 的方程表达式为:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{\infty} C2_{nm} \ddot{a}_m - \sum_{m=1}^{\infty} C1_{nm} a_m - \sum_{s=1}^{\infty} \left(C3_{ns} \sum_{m=1}^{\infty} C1_{sm} a_m \right) \\
 = \frac{2X\Omega^3}{(\lambda_n^2 - 1)J_1(\lambda_n)} \cos \Omega \tau \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

由上式分析可知, 依据其它的量可以得到 a_n 。令 $n = m = M$, 通过截取前几阶模态, 然后求解方程组。令 $a_n = A_n \cos \Omega \tau$, 代入式(13), 令 $n = m = M$, 计算得到 A_n :

$$A_n = \left[\frac{K_{1n}\Omega^{2n} + K_{2n}\Omega^{2n-2} + \dots + K_{Mn}\Omega^2}{\Omega^{2n} + K_1\Omega^{2n-2} + \dots + K_{M-1}\Omega^2 + K_M} \right] X_0 \Omega^2$$

$n = 1, 2, 3, \dots, M$

其中, K_{ij} 和 K_i 是上式系数, 利用待定系数法将上式进一步化解为:

$$A_n = \left[\frac{P_{1n}}{\Omega^2 - \Omega_1^2} + \frac{P_{2n}}{\Omega^2 - \Omega_2^2} + \dots + \frac{P_{Mn}}{\Omega^2 - \Omega_M^2} \right] X_0 \Omega^2$$

$n = 1, 2, 3, \dots, M$

其中, Ω_i^2 是晃动模型的 i 阶固有频率的平方。根据物理现象知道 $\Omega_i^2 > 0$, 在实际中规定:

$\Omega_1^2 < \Omega_2^2 < \dots < \Omega_M^2$ 。根据以上分析, 代入式(9)计算得到速度势为:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= X\Omega^2 \cos \theta \cos \Omega \tau \times \sum_{n=1}^M \frac{1}{\Omega^2 - \Omega_n^2} \\
 &\times \left(\sum_{m=1}^M P_{nm} J_1(\lambda_m R) e^{\lambda_m Z} \right)
 \end{aligned} \tag{13}$$

同理, 令 $b_n = B_n \sin \Omega \tau$, 计算得到波高函数为:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= X_0 \Omega^2 \cos \theta \sin \Omega \tau \times \sum_{n=1}^M \frac{1}{\Omega^2 - \Omega_n^2} \\
 &\times \left(\sum_{m=1}^M Q_{nm} J_1(\lambda_m R) \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

其中, Q_{nm} 根据式(11)得到, 是 P_{nm} 关系式。

因此, 根据以上分析得到了速度势 Φ 和波形函数 ε , 任何特定的晃动都可以通过式(13)(14)适当的表示。显然, 通过数值积分计算得到 $C1_{nm}, C2_{nm}, C3_{nm}$ 。当 M 取一定值时, 其余各个数值都可以计算得到。

3. 等效力学模型

微重条件下的等效力学模型如图 2 所示, 类似于常重下的等效力学模型, 针对每一阶晃动模态, 构建与之对应的弹簧 - 振子模型: $h = h_j$ 处设置质量为 m_j 的质点, 通过 2 根刚度为 $k_j/2$ 的线弹簧分别固联于贮箱侧壁, 振子被限制只能做作横向运动, 固定于 $h = h_0$ 处的质点 m_0 对应于附着在储腔上的液体, 也就没有参与晃动的液体, 储腔内液体晃动, 它的固有频率液体晃动的作用力与力矩是非常重要的参数, 通过运用等效力学模型分析液体晃动是现在非常重要的一种方法。

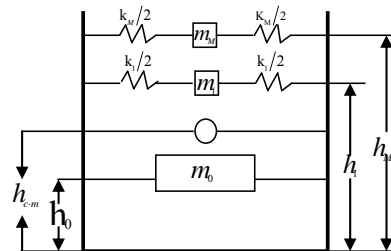


Figure 2. Equivalent mechanical model
图 2. 等效力学模型

如图 3 所示, 在储液箱壁上, 表面张力是沿着接触线微元 ds , 这个力产生的效果类似拉伸膜, 当接触角为零时, 壁面上力为: $F_T = TR_0 d\theta$, 在 θ 方向上的分力为: $F_{T,\theta} = F_T (\partial\eta/\partial\theta)$, 因此, 表面张力引起的作用于壁面的力为:

$$F_1 = \int_0^{2\pi} -\frac{\partial\eta(r=R_0)}{\partial\theta} T \sin\theta d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{N_{BO}}\right) \times \pi\rho R_0^3 x\omega^2 \sin\omega t \sum_{n=1}^M \frac{H_n \frac{g}{R_0}}{\omega^2 - \Omega_n^2 \frac{g}{R_0}} \quad (15)$$

其中 $H_n = \sum_{m=1}^M Q_{nm} J_1(\lambda_m)$ 是在壁面处的 n 阶无量纲的波高。

另一部分力是由于液体的运动, 液体运动引起的作用力, 通过速度势 Φ 可以计算得到。针对惯性系, 令 $\Phi' = X\Omega R \cos\theta \times \cos\Omega T$, 因此, 液体运动引起的作用力:

$$F_2 = -\rho g R_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-h/R_0}^{\beta+\varepsilon_0} \left[-\frac{\partial\Phi(R=1)}{\partial\tau} - X_0 \Omega^2 \cos\theta \sin\Omega\tau + Z \right] \times \cos\theta dZ d\theta \quad (16)$$

其中, $\varepsilon_0 = \varepsilon(R=1, \theta, \tau)$ 对于上式的最后一部分积分, 忽略二阶微分小量, 得到:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-h/R_0}^{\beta+\varepsilon_0} Z \cos\theta dZ d\theta$$

$$= \beta \int_0^{2\pi} \varepsilon_0 \cos\theta d\theta = \pi\beta X\Omega^2 \sin\Omega\tau \sum_{m=1}^M \frac{H_n}{\Omega^2 - \Omega_n^2}$$

类似的, 由于 Φ 和 ε 是小量, 第一部分积分可以化解为:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-h/R_0}^{\beta+\varepsilon_0} \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} \cos\theta dZ d\theta = -\pi X_0 \Omega^4 \sin\Omega\tau \sum_{n=1}^M \frac{I_n}{\Omega^2 - \Omega_n^2}$$

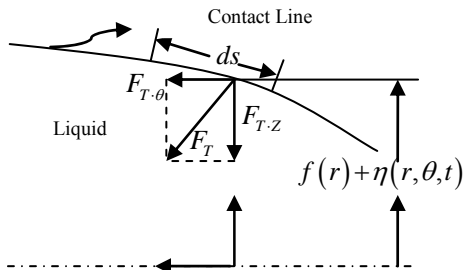


Figure 3. Force diagram of an infinitesimal element
图 3. 微元受力示意图

其中, $I_n = \sum_{m=1}^M \frac{P_{nm}}{\lambda_m} J_1(\lambda_m) e^{\lambda_m \beta}$, 由于 ε 是小量, h/R_0 是无穷大量, 所以有 $e^{-\lambda_m h/R_0} = 0$, $e^{\lambda_m \varepsilon} = 0$ 。

由以上分析知 F_2 :

$$F_2 = \pi\rho R_0^3 x_0 \omega \sin\omega t$$

$$\times \left\{ \beta + \frac{h}{R_0} - \beta \sum_{n=1}^M \frac{H_n \frac{g}{R_0}}{\omega^2 - \Omega_n^2 \frac{g}{R_0}} + \omega^2 \sum_{n=1}^M \frac{I_n}{\omega^2 - \Omega_n^2 \frac{g}{R_0}} \right\}$$

因此, 作用于壁面上的合力为 $F_1 + F_2$:

$$F_L = \pi\rho R_0^2 x\omega^2 \sin\omega t \left[\frac{h}{R_0} + \left(\beta + \left(\beta - \frac{1}{N_{BO}} \right) \sum_{n=1}^M \frac{H_n}{\Omega_n^2} \right) + \omega^2 \sum_{n=1}^M \frac{I_n - \left(\beta - \frac{1}{N_{BO}} \right) \frac{H_n}{\Omega_n^2}}{\omega^2 - \Omega_n^2 \frac{g}{R_0}} \right] \quad (17)$$

由弹簧 - 振子系统构成的等效力学模型对液体晃动的表征作用体现在振子对贮箱的力和力矩等效于晃动产生的作用于贮箱的合力和合力矩, 现在, 计算弹簧 - 振子等效力学模型横向力为:

$$F_{\text{mod}} = x_0 \omega^2 \sin\omega t \left(m_0 + \sum_{n=1}^M m_n - \omega^2 \sum_{n=1}^M \frac{m_n}{\omega^2 - \frac{k_n}{m_n}} \right) \quad (18)$$

由弹簧 - 振子系统构成的等效力学模型对液体晃动的表征作用体现在振子对贮箱的力和力矩等效于晃动产生的作用于贮箱的合力和合力矩, 结合方程 (17) 和 (18):

$$m_n = - \left(I_n - \left(\beta - \frac{1}{N_{BO}} \right) \frac{H_n}{\Omega_n^2} \right) \quad (19)$$

$$k_n / m_n = \Omega_n^2 (g/R_0) \quad (20)$$

$$m_0 + \sum_{n=1}^M m_n = \pi\rho R_0^3 \left[\frac{h}{R_0} + \beta + \left(\beta - \frac{1}{N_{BO}} \right) \sum_{n=1}^M \frac{H_n}{\Omega_n^2} \right] \quad (21)$$

$$\text{数值计算表明 } \pi\rho R_0^3 \left[\frac{h}{R_0} + \beta + \left(\beta - \frac{1}{N_{BO}} \right) \sum_{n=1}^M \frac{H_n}{\Omega_n^2} \right]$$

结果近似等于液体总质量, $m_T = \pi\rho R_0^3 \left[\frac{h}{R_0} + 0.264\beta \right]$ 。

随着 M 的趋于无穷大, 结果越来越精确, 因此, 假设:

$$m_0 + \sum_{n=1}^M m_n = m_T$$

根据以上分析, 可知等效力学模型参数 m_n 和 k_n 是能够计算。如图 4 所示, 一阶晃动质量和弹簧刚度随邦德数的变化。在任何情况下, 发生晃动的液体与总体质量的百分比小于邦德数无穷大的情况。实际中, 在 $N_{BO} = 10$ 时, 发生晃动的液体质量不足超重或常重情况下的 10%。参与二阶和高阶模态晃动的质量非常小, 因此一般情况只考虑一阶模态。

类似, 对比液体晃动的力矩和等效力学模型晃动的力矩, 可以得到:

$$h_0 = R_0 \left(\frac{h}{R_0} - \frac{1}{\Omega_n^2} - \frac{\pi \rho R_0^3}{m_n} \times \left(\sum_{m=1}^M \left(\beta - \frac{1}{\lambda_m} \right) \times \frac{p_{nm} J_1(\lambda_m) e^{\lambda_m \beta}}{\lambda_m} - \beta \left(\beta - \frac{1}{N_{BO}} \right) \frac{H_m}{\Omega_m^2} \right) \right)$$

$$h_0 = \frac{1}{m_0} \left(m_T h_{c \cdot m} - \sum_{n=1}^M m_n h_n \right) \quad (22)$$

其中质心高度:

$$h_{c \cdot m} = R_0 \left(\frac{\frac{h}{R_0} + 0.528\beta + 0.128\beta^2 \frac{R_0}{h}}{2 \left(1 + 0.264\beta \frac{R_0}{h} \right)} \right)$$

4. 结果与分析

综上所述, 我们得出 m_1, k_1, h_1, \dots 各种参数在不同 Bond 数下的值, 如图 4~8 所示。如图 5 所示, Ω^2 随着 Bond 数的增大而减小, Bond 数达到一定数值, 频率基本上趋于定值, 这与实际实验相符^[12], 一阶晃动质量随着 Bond 数的增大而增大, 图 4~8 给出各种参数随 Bond 数的变化趋势。

分析表明, 在相同的充液比情况下, 微重下发生晃动的液体质量低于常重情况下发生晃动的液体质量(如图 6 所示)。因为对于相同的腔体尺寸和相同的充液比, 更多的液体附着在壁面上, 这样更多的液体是随着储腔运动, 换言之, 由于表面附着力的作用导致更多的液体附着在腔体上成为等效刚体。

本文计算得到液体晃动基频, 建立液体晃动的等效力学模型, 给出了弹簧-振子一阶参数, 并且推导了

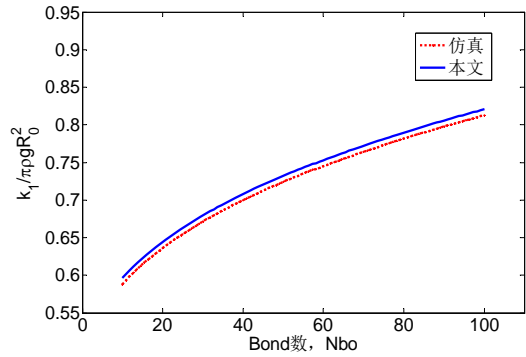


Figure 4. Fundamental spring constant
图 4. 等效弹簧刚度随 Bond 的变化曲线

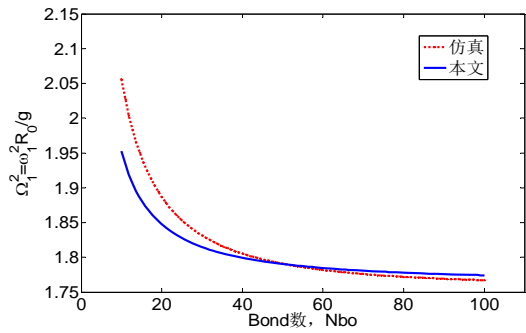


Figure 5. Natural frequency of fundamental mode
图 5. 液体晃动基频 Omega^2 随 Bond 的变化

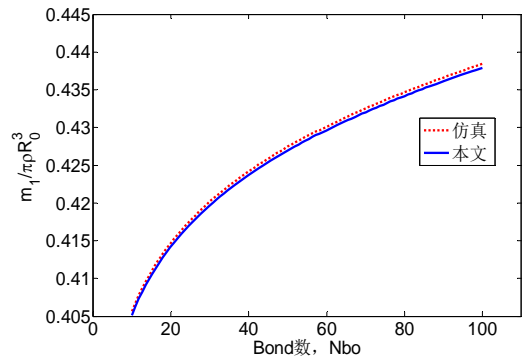


Figure 6. Fundamental slosh mass
图 6. 无量纲一阶等效质量随 Bond 的变化

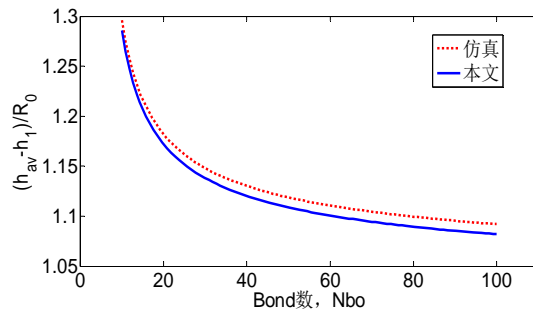


Figure 7. Height of fundamental slosh mass above bottom of tank
图 7. 无量纲一阶等效质量的高度曲线

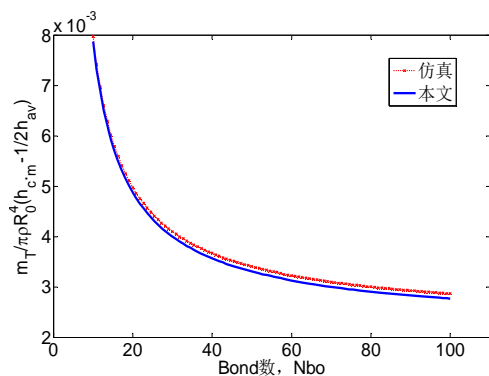


Figure 8. Center-of-mass location
图 8. 无量纲一阶等效质量的质心曲线

高阶的解析公式。模型参数与 Bond 数有关,随着 Bond 数增加,液体的晃动频率减小、无量纲晃动质量增大,晃动质心逐渐接近于自由液面。

在充液航天器工程设计时,为防止液体与弹性部件频率耦合,应该使弹性部件振动基频与燃料晃动基频保持较大差距,本文工作和结论不仅为充液航天器控制系统的整体设计和仿真提供了依据和理论支持,而且具有较高的计算精度,满足工程应用需要。

参考文献 (References)

[1] L. D. Peterson, E. F. Crawley and R. J. Hansman. The nonlinear dynamics of a spacecraft coupled to the vibration of a contained fluid. AIAA Paper 88-2470.

[2] M. C. Van Schoor, E. F. Crawley. Nonlinear forced-response characteristics of contained fluids in microgravity. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1995, 32(3): 521-532.

[3] R. L. Berry, J. R. Tegar. Experimental study of transient liquid motion in orbiting spacecraft. NAS830690, 1975.

[4] 包光伟. 充液卫星平放式贮箱内液体晃动的等效力学模型[J]. *宇航学报*, 1996, 17(1): 66-69.

[5] 包光伟, 刘延柱. 三轴定向充液卫星的姿态稳定性[J]. *空间科学学报*, 1993, 13(1): 31-38.

[6] E. T. Benedikt. A study of propellant behavior at zero gravity. Final Report, Contract NASS-11097, North American Aviation, Space and Information Systems Division, 1966.

[7] H. M. Satterlee, J. H. Chin. Meniscus shape under reduced-gravity conditions. H. Cohen, M. Rogers, Eds., *Fluid Mechanics and Heat Transfer under Low Gravity*, Proceedings of the 1965 Symposium Sponsored by USAF-OSR and Lockheed Missiles and Space Co., 13-1-13-24.

[8] 王照林, 邓重平. 失重时方形容器内液体的自由晃动问题[J]. *清华大报*, 1986, 26(3): 1-9.

[9] W. H. Chu. Low gravity fuel sloshing in an arbitrary axisymmetric rigid tank. *Applied Mechanics*, 1970, 37(3): 828-837.

[10] 包光伟, 王政伟. 液体三维晃动特征问题的有限元数值计算方法[J]. *力学季刊*, 2003, 24(2): 185-190.

[11] X. D. Cheng, J. D. Wei and Z. L. Wang. Liquid sloshing in spherical tank with partition boards under low gravity. Z. L. Wang, Ed., Beijing: Proceedings of the International Conference on Dynamics, Vibration and Control, Peking University Press, 1990: 67-73.

[12] F. T. Dodge, I. R. Garza. Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low—Gravity. NASA, 1967.