

# Stability Calculation of Long Column under Linear Elastic Supports and Extra Axial Uniform Load

Kaizhi Huang\*, Xiaoliang Chen, Zu'an Tian, Jianping Ding

School of Mathematics & Physics, Chongqing University of Science & Technology, Chongqing  
Email: [mocd361@163.com](mailto:mocd361@163.com)

Received: Mar. 6<sup>th</sup>, 2015; accepted: Mar. 23<sup>rd</sup>, 2015; published: Mar. 27<sup>th</sup>, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

For calculating the stability of long column under linear elastic supports and extra axial uniform load, first of all, with the static equilibrium conditions of the micro section of long column, the approximate equations of deformations and internal forces are established; The next, by the boundary conditions of deformations and internal forces, and the relationship between internal forces and external forces, and the relationship between external forces and deformations, the homogeneous linear equations of containing 12 initial parameters are established, by the conditions of equations with non-zero solution, the characteristic equation of critical load are derived; The last, taking 6 linear elastic supports long columns as example, the stability is calculated, the approximate relation curves between axial uniform load and concentrated load are drawn, and the numerical solutions of intercepts on Cartesian coordinate system are given, and found that the trend of each curve, and the relationship of sorting to stability represented by them, are more consistent with theoretical expectations.

## Keywords

Mechanics of Materials, Long Column, Stability, Critical Load, Linear Elastic Support, Axial Uniform Load

---

# 考虑轴向均布载荷时线弹性支承压杆的稳定性计算

黄开志\*, 陈小亮, 田祖安, 丁剑平

\*通讯作者。

重庆科技学院数理学院, 重庆  
Email: [mocd361@163.com](mailto:mocd361@163.com)

收稿日期: 2015年3月6日; 录用日期: 2015年3月23日; 发布日期: 2015年3月27日

## 摘要

为了计算考虑轴向均布载荷时线弹性支承压杆的稳定性, 首先用压杆微元段的静力平衡条件, 建立了其变形和内力的近似方程; 接着由变形边界条件、内力边界条件、内力与外力的关系、外力与变形的关系, 确定了一个包含12个初参数的齐次线性方程组, 由方程组有非零解的条件, 导出了临界载荷的特征方程; 最后以6个线弹性支承的压杆为例, 进行了稳定性计算, 绘制了轴向均布载荷与集中载荷的近似关系曲线, 给出了这些曲线在坐标轴上的截距的数值解, 发现每条曲线的走势以及它们所代表的压杆的稳定性排序关系, 较符合理论预期。

## 关键词

材料力学, 压杆, 稳定性, 临界载荷, 线弹性支承, 轴向均布载荷

## 1. 引言

文献[1]-[5]等对未考虑轴向均布载荷时, 线弹性支承压杆的稳定性进行了计算; 文献[6]等研究了沿轴向分布的若干个集中载荷下, 压杆的稳定性计算问题; 文献[7]-[9]等或采用摄动法、能量法、载荷换算与叠加等近似方法, 对考虑轴向均布载荷时, 完全理想支承的压杆稳定性进行了计算。

本文拟采用基于静力平衡条件等的初参数法, 对考虑轴向均布载荷且两端为任意线弹性支承的压杆的稳定性进行近似计算。

## 2. 公式推导

设长为  $l$ 、抗弯刚度为  $EI$  的压杆, 受轴向均布载荷  $q$  和集中载荷  $F_{Bx}$  时, 处于微弯曲平衡状态, 其受力和变形情况可简化为图 1 所示模型。

### 2.1. 变形和内力近似方程

在微弯曲平衡状态的压杆中取  $dx$  微段, 因小变形, 可视其为直线, 按材料力学习惯设内力为正, 其受力情况如图 2 所示, 则静力平衡关系近似为

$$dF_s(x) - qdx \cdot \sin w'(x) = 0$$

$$dM(x) - F_s(x)dx - qdx \cdot \sin w'(x) \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

因小变形, 故  $\sin w'(x) \approx w'(x)$ , 并略去二阶微量, 上述二式简化为

$$F_s'(x) = qw'(x) \quad (1)$$

$$M'(x) = F_s(x) \quad (2)$$

对(2)求一阶导数并考虑到(1)得

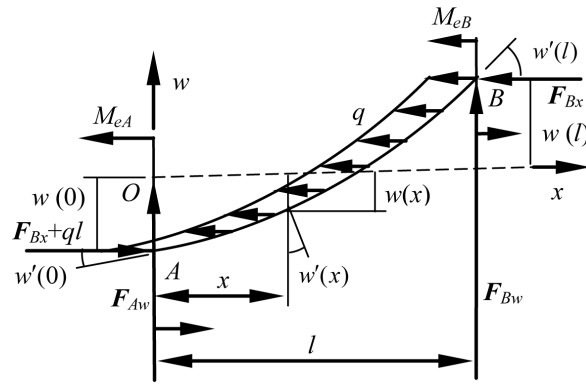


Figure 1. Micro bending equilibrium state of whole  
图 1. 整体微弯曲平衡状态

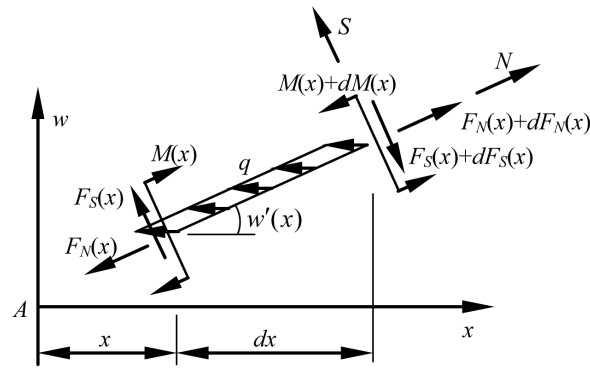


Figure 2. Equilibrium state of dx section  
图 2. dx 段平衡状态

$$M''(x) = qw'(x) \quad (3)$$

挠曲线近似微分方程

$$\frac{M(x)}{EI} = w''(x) \quad (4)$$

对(4)求一阶导数并考虑到(2)得

$$\frac{F_s(x)}{EI} = w'''(x) \quad (5)$$

对(5)求一阶导数并考虑到(1)得

$$w^{(4)}(x) = \frac{qw'(x)}{EI}$$

令  $k^3 = \frac{q}{EI}$ , 上式变为

$$w^{(4)}(x) - k^3 w'(x) = 0 \quad (6)$$

求解(6)式得挠曲线方程

$$w(x) = C_1 + e^{kx} C_2 + e^{-\frac{kx}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}kx}{2} C_3 + e^{-\frac{kx}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}kx}{2} C_4 \quad (7)$$

对(7)求一阶导数得转角  $w'(x)$  满足方程

$$\frac{w'(x)}{k} = e^{kx} C_2 + e^{-\frac{kx}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}kx}{2}\right) C_3 - e^{-\frac{kx}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}kx}{2}\right) C_4 \quad (8)$$

对(8)求一阶导数并考虑到(4), 得

$$\frac{M(x)}{EIk^2} = e^{kx} C_2 - e^{-\frac{kx}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}kx}{2}\right) C_3 - e^{-\frac{kx}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}kx}{2}\right) C_4 \quad (9)$$

对(9)求一阶导数并考虑到(2), 得

$$\frac{F_S(x)}{EIk^3} = e^{kx} C_2 + e^{-\frac{kx}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}kx}{2} C_3 + e^{-\frac{kx}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}kx}{2} C_4 \quad (10)$$

### 2.1.1. 变形边界条件

在(7) (8)中令  $x=0$ , 得到 A 端的变形满足

$$C_1 + C_2 + C_4 - w(0) = 0 \quad (11)$$

$$C_2 + \sin\frac{\pi}{3} C_3 - \cos\frac{\pi}{3} C_4 - \frac{w'(0)}{k} = 0 \quad (12)$$

在(7) (8)中令  $x=l$ , 得到 B 端的变形满足

$$C_1 + e^{kl} C_2 + e^{-\frac{kl}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}kl}{2} C_3 + e^{-\frac{kl}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}kl}{2} C_4 - w(l) = 0 \quad (13)$$

$$e^{kl} C_2 + e^{-\frac{kl}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}kl}{2}\right) C_3 + e^{-\frac{kl}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}kl}{2}\right) C_4 - \frac{w'(l)}{k} = 0 \quad (14)$$

### 2.1.2. 内力边界条件

在(9) (10)中令  $x=0$ , 得到A端的内力满足

$$\frac{M(0)}{EIk^2} = C_2 - \sin\frac{\pi}{3} C_3 - \cos\frac{\pi}{3} C_4$$

$$\frac{F_S(0)}{EIk^3} = C_2 + C_4$$

在(9) (10)中令  $x=l$ , 得到B端的内力满足

$$\frac{M(l)}{EIk^2} = e^{kl} C_2 - e^{-\frac{kl}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}kl}{2}\right) C_3 - e^{-\frac{kl}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}kl}{2}\right) C_4$$

$$\frac{F_S(l)}{EIk^3} = e^{kl} C_2 + e^{-\frac{kl}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}kl}{2} C_3 + e^{-\frac{kl}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}kl}{2} C_4$$

## 2.2. 内力与外力的关系

结合图1, 压杆两端的内力和外力近似满足以下静力平衡关系

$$M_{eA} = -M(0)$$

$$F_{Aw} = F_S(0) + (F_{Bx} + ql)w'(0)$$

$$M_{eB} = M(l)$$

$$F_{Bw} = -F_S(l) - F_{Bx}w'(l)$$

结合 2.1.2 所述内力边界条件，上述四式可依次变为

$$C_2 - \sin \frac{\pi}{3} C_3 - \cos \frac{\pi}{3} C_4 + \frac{M_{eA}}{EI k^2} = 0 \quad (15)$$

$$C_2 + C_4 - \frac{F_{Aw}}{EI k^3} + \frac{F_{Bx} + ql}{EI k^2} \frac{w'(0)}{k} = 0 \quad (16)$$

$$e^{kl} C_2 - e^{-\frac{kl}{2}} \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}kl}{2} \right) C_3 - e^{-\frac{kl}{2}} \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}kl}{2} \right) C_4 - \frac{M_{eB}}{EI k^2} = 0 \quad (17)$$

$$e^{kl} C_2 + e^{-\frac{kl}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}kl}{2} C_3 + e^{-\frac{kl}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}kl}{2} C_4 + \frac{F_{Bw}}{EI k^3} + \frac{F_{Bx}}{EI k^2} \frac{w'(l)}{k} = 0 \quad (18)$$

### 2.3. 外力与变形的关系

设线弹性支承 A、B 对压杆的挠度约束的刚度系数分别为  $K_A$ 、 $K_B$ ，对转角约束的刚度系数分别为  $C_A$ 、 $C_B$ ，则压杆在支承处的约束反力和变形满足以下关系

$$F_{Aw} = -K_A w(0)$$

$$M_{eA} = -C_A w'(0)$$

$$F_{Bw} = -K_B w(l)$$

$$M_{eB} = -C_B w'(l)$$

上述四式可依次变为

$$\frac{F_{Aw}}{EI k^3} + \frac{K_A l^3}{EI (kl)^3} w(0) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{M_{eA}}{EI k^2} + \frac{C_A l}{EI \cdot kl} \frac{w'(0)}{k} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{F_{Bw}}{EI k^3} + \frac{K_B l^3}{EI (kl)^3} w(l) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{M_{eB}}{EI k^2} + \frac{C_B l}{EI \cdot kl} \frac{w'(l)}{k} = 0 \quad (22)$$

### 2.4. 特征方程

由(11)~(22)确定了一个关于 12 个初参数  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$ 、 $\frac{F_{Aw}}{EI k^3}$ 、 $\frac{M_{eA}}{EI k^2}$ 、 $\frac{F_{Bw}}{EI k^3}$ 、 $\frac{M_{eB}}{EI k^2}$ 、 $w(0)$ 、 $\frac{w'(0)}{k}$ 、 $w(l)$ 、 $\frac{w'(l)}{k}$  的齐次线性方程组，其有非零解的充要条件是方程组的系数行列式为零，由此得到临界载荷的特征方程(23)。

$$\begin{vmatrix}
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \sin \frac{\pi}{3} & -\cos \frac{\pi}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 1 & e^{kl} & e^{\frac{kl}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}kl}{2} & e^{\frac{kl}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}kl}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & e^{kl} & e^{\frac{kl}{2}} \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}kl}{2} \right) & -e^{\frac{kl}{2}} \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}kl}{2} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 1 & -\sin \frac{\pi}{3} & -\cos \frac{\pi}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_{Bx} + ql}{EI k^2} & 0 & 0 \\
 0 & e^{kl} & -e^{\frac{kl}{2}} \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}kl}{2} \right) & -e^{\frac{kl}{2}} \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}kl}{2} \right) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & e^{kl} & e^{\frac{kl}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}kl}{2} & e^{\frac{kl}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}kl}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_{Bx}}{EI k^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_A l^3}{EI (kl)^3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_A l}{EI \cdot kl} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_B l^3}{EI (kl)^3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_B l}{EI \cdot kl}
 \end{vmatrix} = 0 \tag{23}$$

### 3. 公式应用

令  $ql = m \frac{EI}{l^2}$ ,  $F_{Bx} = n \frac{EI}{l^2}$ , 考虑到  $k^3 = \frac{q}{EI}$ , 则

$$kl = m^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{F_{Bx}}{EI k^2} = n \cdot m^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{F_{Bx} + ql}{EI k^2} = (n + m) m^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{K_A l^3}{EI (kl)^3} = \frac{K_A l^3}{EI} m^{-1},$$

$$\frac{C_A l}{EI \cdot kl} = \frac{C_A l}{EI} m^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{K_B l^3}{EI (kl)^3} = \frac{K_B l^3}{EI} m^{-1}, \quad \frac{C_B l}{EI \cdot kl} = \frac{C_B l}{EI} m^{-\frac{1}{3}}$$

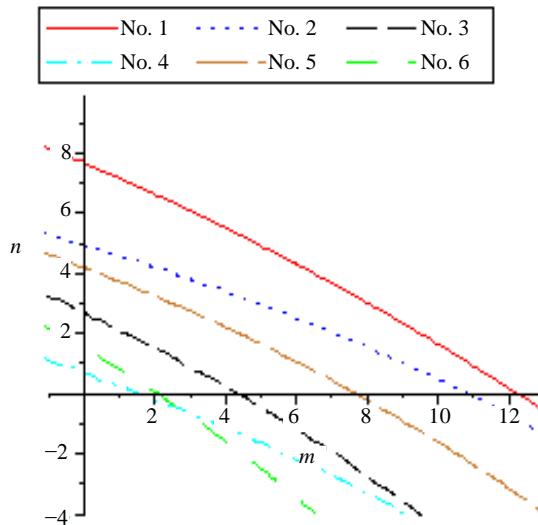
将上述关系代入(23), 可得到超越方程, 借助软件可绘制出  $m$ - $n$  曲线, 将曲线上的点  $(m_0, n_0)$  代入公式和, 可求得压杆处于临界状态时, 轴向均布载荷  $ql$  和集中载荷  $F_{Bx}$  的近似值。表1中所述算例为6个线弹性支承压杆的数据, 并由软件Maple得到图3所述的  $m$ - $n$  曲线。

不难发现: **1)** 表1中截距值  $n$ , 均小于对应的完全理想支承压杆的  $n^*$  (即表中所有非零的刚度系数为无穷大时对应的压杆, 该  $n^*$  值直接由欧拉公式计算得到); **2)** 图3中每条曲线均为减函数; **3)** 图3中每条曲线所代表的压杆的稳定性排序关系, 也较符合完全理想支承压杆的稳定性排序关系。因此, 本文结果较符合理论预期。

**Table 1. Numerical example**  
**表 1. 算例**

№	支承情况 <i>A-B</i>	刚度系数				截距		理想支承 $n^*$	临界载荷近似值	
		$K_A$ kN/m	$C_A$ kN·m/rad	$K_B$ kN/m	$C_B$ kN·m/rad	$m$	$n$		$(m_0, n_0)$	$(ql, F_{R1})$ kN
1	弹性固支 - 弹性固支	2000	4000	1000	6000	12.25	7.74	39.48	(1.71, 6.75)	(1368, 5400)
2	弹性固支 - 弹性铰支	2000	4000	1000	0	10.80	4.92	20.14	(1.87, 4.23)	(1496, 3384)
3	弹性固支 - 弹性定向	2000	4000	0	6000	4.31	2.67	9.87	(2.73, 1.02)	(2184, 816)
4	弹性固支 - 自由	2000	4000	0	0	1.53	0.67	2.47	(5.09, -1.72)	(4072, -1376)
5	弹性铰支 - 弹性铰支	2000	0	1000	0	7.64	4.17	9.87	(6.18, 0.92)	(4944, 736)
6	弹性铰支 - 弹性定向	2000	0	0	6000	2.06	1.49	2.47	(4.95, -2.46)	(3960, -1968)

注:  $l = 5 \text{ m}$ ,  $EI = 20,000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ , 负号表示需施加反向拉伸载荷。



**Figure 3. Curve of  $m-n$**   
**图 3.  $m-n$  曲线**

#### 4. 结束语

对线弹性支承压杆的特例——完全理想支承压杆, 因其存在无穷大的刚度系数, 用该方法难以求得其处于临界状态时轴向均布载荷与集中载荷之间的近似关系, 这既是该方法的局限性也是亟待解决的问题。

#### 基金项目

重庆科技学院本科生教育教学改革研究项目(CK2011B25)和研究生教育教学改革研究一般项目(YJG2014y008)资助项目。

#### 参考文献 (References)

- [1] 刘协权, 倪新华 (2003) 支承弹性对压杆临界载荷的影响. *军械工程学院学报*, **3**, 73-77.
- [2] 叶学林, 周瑞忠 (2003) 半刚性连接压杆的稳定计算公式. *福建建筑*, **85**, 21-23.

- [3] 宣海洋 (2010) 弹性介质上等截面压杆稳定分析. *山西建筑*, **9**, 45.
- [4] 黄开志, 陈小亮 (2014) 两端任意线弹性支承的压杆稳定性研究. *四川理工学院学报(自然科学版)*, **5**, 22-24.
- [5] 黄开志, 陈小亮 (2014) 任意线弹性支承的双跨压杆稳定性计算. *武汉工程大学学报*, **9**, 7-11.
- [6] 田炜烽, 郝际平, 丁戈, 等 (2012) 任意分布轴力作用下框架柱弹性稳定的实用解法. *工程力学*, **2**, 74-79.
- [7] 吴晓, 杨立军, 郑长成 (2008) 轴向载荷和均布载荷作用下压杆的屈曲研究. *四川建筑科学研究*, **5**, 34, 35, 65.
- [8] 张平占 (1995) BHA 受压失稳的模型及临界钻压公式. *煤田地质与勘探*, **5**, 59-62.
- [9] 马肖, 韩春民 (2009) 具有较大初始位移的拼组柱在分布与集中荷载共同作用下的承载能力分析. *四川建筑科学研究*, **3**, 27-29.