

Stability Calculation of Long Column under Directional Support in Any Position of Central

Kaizhi Huang, Xiaoliang Chen, Zu'an Tian, Jianping Ding

School of Mathematics & Physics, Chongqing University of Science & Technology, Chongqing
Email: mocd361@163.com

Received: May 31st, 2015; accepted: Jun. 13th, 2015; published: Jun. 25th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

For enriching the research content about the stability of a long column and making it convenient in the engineering application, by using the initial parameters method, seven kinds of long column are strengthened by directional support in any position of central, and the unified deformation equations and static force equilibrium equations are established. By the respective constraint conditions of deformation and static force, the characteristic equations of critical force are solved. By software, the approximate or accurate relationship between the factor of length of long column and the position of the central directional support are determined; at the same time, the best position of the central directional support and the minimum factor of length, and the worst position and the maximum factor of length are all determined. The result is verified according with theoretical expectation.

Keywords

Mechanics of Materials, Long Column, Stability, Critical Force, Characteristic Equation, Factor of Length

中部任意位置定向支承加固的压杆稳定性计算

黄开志, 陈小亮, 田祖安, 丁剑平

重庆科技学院数理学院, 重庆
Email: mocd361@163.com

收稿日期：2015年5月31日；录用日期：2015年6月13日；发布日期：2015年6月25日

摘要

为了丰富压杆的稳定性研究内容和方便工程应用之目的，用初参数法，对中部任意位置增加一个定向支承加固的七种压杆，建立了统一的变形方程和静力平衡方程。由各自的变形和静力约束条件，导出了求解临界压力的特征方程。借助软件，求得了压杆的长度因数与中部支承位置间的近似或精确关系；同时确定了中部支承的最佳位置和最小长度因数，以及最差位置和最大长度因数。经验证，结果符合理论预期。

关键词

材料力学，压杆，稳定性，临界压力，特征方程，长度因数

1. 引言

一些文献[1]-[6]采用了统一的计算模型，得到了各种单跨压杆临界压力计算公式。工程实际中，为了增加压杆的稳定性，常在压杆中部适当位置增加某些支承。对这类压杆，材料力学教材[7]等仅针对在压杆的中点采用固支加固的特殊情况，予以了简单有限的介绍，没有建立各种常见支承情况下，在压杆中部任意位置采取任意支承加固时，临界压力的统一求解方法，给工程应用带来诸多不便。文献[8]-[11]等虽有研究，但鲜有给出简洁实用的解答，文献[12][13]等仅针对在压杆中部任意位置增加一个铰支加固的压杆的稳定性进行了计算。

为了丰富压杆的稳定性研究内容以及方便工程应用之目的，本文拟采用初参数法，研究在压杆中部任意位置增加一个定向支承(即该支承仅卡死压杆的转角，而毫不限限制压杆的挠度)时，七种常见压杆的临界压力特征方程，并导出压杆的长度因数与该支承位置之间的定量关系，并进一步确定该支承的最佳位置和压杆的最小长度因数，以及最差位置和压杆的最大长度因数。

2. 公式推导

设长为 l 、中部任意位置 x 处定向支承加固的压杆的抗弯刚度为 EI ，当其处于微弯曲平衡状态，受力和变形情况如图 1 所示。

2.1. 变形关系

2.1.1. 变形方程

AB 段即 $0 \leq x_1 \leq x$ 时，弯矩方程

$$M_1(x_1) = F_A x_1 - M_{eA} + F[w_1(0) - w_1(x_1)]$$

挠曲线近似微分方程

$$EIw_1''(x_1) = M_1(x_1) = F_A x_1 - M_{eA} + F[w_1(0) - w_1(x_1)]$$

令 $k^2 = \frac{F}{EI}$ ，则挠曲线方程 $w_1(x_1)$ 的通解为

$$w_1(x_1) = a \cos kx_1 + b \sin kx_1 + \frac{F_A}{F} x_1 - \frac{M_{eA}}{F} + w_1(0) \quad (1)$$

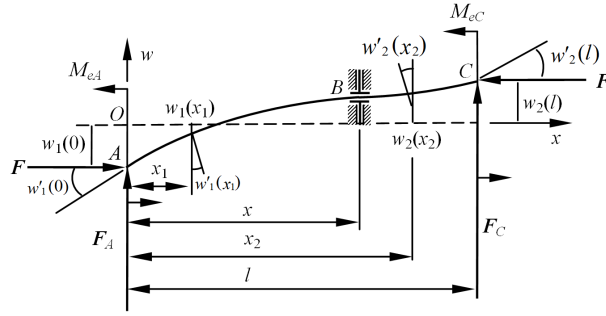


Figure 1. Micro bending equilibrium state of the whole
图 1. 整体微弯曲平衡状态

转角方程

$$w_1'(x_1) = -ak \sin kx_1 + bk \cos kx_1 + \frac{F_A}{F} \quad (2)$$

BC 段即 $x \leq x_2 \leq l$ 时, 弯矩方程

$$M_2(x_2) = F_C(l - x_2) + M_{eC} + F[w_2(l) - w_2(x_2)]$$

挠曲线近似微分方程

$$EIw_2''(x_2) = M_2(x_2) = F_C(l - x_2) + M_{eC} + F[w_2(l) - w_2(x_2)]$$

令 $k^2 = F/EI$, 则 $w_2(x_2)$ 的通解为

$$w_2(x_2) = c \cos kx_2 + d \sin kx_2 + \frac{F_C}{F}(l - x_2) + \frac{M_{eC}}{F} + w_2(l) \quad (3)$$

$$w_2'(x_2) = -ck \sin kx_2 + dk \cos kx_2 - \frac{F_C}{F} \quad (4)$$

2.1.2. 变形边界条件

在(1)(2)中令 $x_1 = 0$, 得到压杆在 A 处的变形满足

$$a - \frac{M_{eA}}{F} = 0 \quad (5)$$

$$bk + \frac{F_A}{F} - w_1'(0) = 0 \quad (6)$$

压杆在 B 处挠度满足 $w_1(x) - w_2(x) = 0$, 由(1)(3)得

$$a \cos kx + b \sin kx - c \cos kx - d \sin kx + \frac{F_A}{F}x - \frac{M_{eA}}{F} - \frac{F_C}{F}(l - x) - \frac{M_{eC}}{F} + w_1(0) - w_2(l) = 0 \quad (7)$$

压杆在 B 处转角为零, 即 $w_1'(x) = 0$, $w_2'(x) = 0$, 由(2)(4)得

$$-ak \sin kx + bk \cos kx + \frac{F_A}{F} = 0 \quad (8)$$

$$-ck \sin kx + dk \cos kx - \frac{F_C}{F} = 0 \quad (9)$$

在(3)(4)中令 $x_2 = l$, 得到压杆在 C 处的变形满足

$$c \cos kl + d \sin kl + \frac{M_{eC}}{F} = 0 \quad (10)$$

$$-ck \sin kl + dk \cos kl - \frac{F_C}{F} - w_2'(l) = 0 \quad (11)$$

各种支承情况下的变形约束条件见表 1。

2.2. 静力学关系

2.2.1. 静力平衡方程

$$\frac{F_A}{F} + \frac{F_C}{F} = 0 \quad (12)$$

2.2.2. 静力约束条件

根据压杆两端不同的支承情况，其静力约束条件见表 1 所述。

2.3. 特征方程

注意到表 1 中为零的项，则式(5)-(12)为关于 a 、 b 、 c 、 d 和表 1 中的四个“？”共八个初参数的齐次线性方程组。由压杆处于临界状态时的变形和受力特征知，八个初参数即上述齐次线性方程组的解必非零，故令齐次线性方程组的系数行列式为零，即可导出求解压杆临界压力的特征方程。

2.3.1. 固支 - 定向 - 固支

结合表 1，由(5)-(12)确定了一个关于初参数 a 、 b 、 c 、 d 、 F_A/F 、 M_{eA}/F 、 F_C/F 、 M_{eC}/F 的齐次线性方程组，其有非零解的充要条件是系数行列式为零，即求解压杆临界压力的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos kx & \sin kx & -\cos kx & -\sin kx & x & -1 & x-l & -1 \\ -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos kl & \sin kl & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k \sin kl & k \cos kl & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2.3.2. 固支 - 定向 - 铰支

结合表 1，由(5)-(12)确定了一个关于初参数 a 、 b 、 c 、 d 、 F_A/F 、 M_{eA}/F 、 F_C/F 、 $w_2'(l)$ 的齐次线性方程组，其有非零解的充要条件是系数行列式为零，即求解压杆临界压力的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos kx & \sin kx & -\cos kx & -\sin kx & x & -1 & x-l & 0 \\ -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos kl & \sin kl & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kl & k \cos kl & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Table 1. Constraint conditions of deformation and static force
表 1. 变形和静力约束条件

支承情况	变形约束条件			静力约束条件	
	A	B	C	A	C
固支 - 定向 - 固支	$w_1(0) = 0$ $w'_1(0) = 0$	$w_1(x) - w_2(x) = 0$ $w'_1(x) = 0, w'_2(x) = 0$	$w_2(l) = 0$ $w'_2(l) = 0$	$F_A = ?$ $M_{eA} = ?$	$F_C = ?$ $M_{eC} = ?$
固支 - 定向 - 铰支	$w_1(0) = 0$ $w'_1(0) = 0$	$w_1(x) - w_2(x) = 0$ $w'_1(x) = 0, w'_2(x) = 0$	$w_2(l) = 0$ $w'_2(l) = ?$	$F_A = ?$ $M_{eA} = ?$	$F_C = ?$ $M_{eC} = 0$
固支 - 定向 - 定向	$w_1(0) = 0$ $w'_1(0) = 0$	$w_1(x) - w_2(x) = 0$ $w'_1(x) = 0, w'_2(x) = 0$	$w_2(l) = ?$ $w'_2(l) = 0$	$F_A = ?$ $M_{eA} = ?$	$F_C = 0$ $M_{eC} = ?$
固支 - 定向 - 自由	$w_1(0) = 0$ $w'_1(0) = 0$	$w_1(x) - w_2(x) = 0$ $w'_1(x) = 0, w'_2(x) = 0$	$w_2(l) = ?$ $w'_2(l) = ?$	$F_A = ?$ $M_{eA} = ?$	$F_C = 0$ $M_{eC} = 0$
铰支 - 定向 - 铰支	$w_1(0) = 0$ $w'_1(0) = ?$	$w_1(x) - w_2(x) = 0$ $w'_1(x) = 0, w'_2(x) = 0$	$w_2(l) = 0$ $w'_2(l) = ?$	$F_A = ?$ $M_{eA} = 0$	$F_C = ?$ $M_{eC} = 0$
铰支 - 定向 - 定向	$w_1(0) = 0$ $w'_1(0) = ?$	$w_1(x) - w_2(x) = 0$ $w'_1(x) = 0, w'_2(x) = 0$	$w_2(l) = ?$ $w'_2(l) = 0$	$F_A = ?$ $M_{eA} = 0$	$F_C = 0$ $M_{eC} = ?$
铰支 - 定向 - 自由	$w_1(0) = 0$ $w'_1(0) = ?$	$w_1(x) - w_2(x) = 0$ $w'_1(x) = 0, w'_2(x) = 0$	$w_2(l) = ?$ $w'_2(l) = ?$	$F_A = ?$ $M_{eA} = 0$	$F_C = 0$ $M_{eC} = 0$

2.3.3. 固支 - 定向 - 定向

结合表 1，由(5)-(12)确定了一个关于初参数 $a, b, c, d, F_A/F, M_{eA}/F, M_{eC}/F, w_2(l)$ 的齐次线性方程组，其有非零解的充要条件是系数行列式为零，即求解压杆临界压力的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos kx & \sin kx & -\cos kx & -\sin kx & x & -1 & -1 & -1 \\ -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos kl & \sin kl & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kl & k \cos kl & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2.3.4. 固支 - 定向 - 自由

结合表 1，由(5)-(12)确定了一个关于初参数 $a, b, c, d, F_A/F, M_{eA}/F, w_2(l), w'_2(l)$ 的齐次线性方程组，其有非零解的充要条件是系数行列式为零，即求解压杆临界压力的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos kx & \sin kx & -\cos kx & -\sin kx & x & -1 & -1 & 0 \\ -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos kl & \sin kl & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kl & k \cos kl & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2.3.5. 铰支 - 定向 - 铰支

结合表 1，由(5)-(12)确定了一个关于初参数 $a, b, c, d, F_A/F, F_C/F, w'_1(0), w'_2(l)$ 的齐次线性方程组，其有非零解的充要条件是系数行列式为零，即求解压杆临界压力的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \cos kx & \sin kx & -\cos kx & -\sin kx & x & x-l & 0 & 0 \\ -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kx & k \cos kx & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos kl & \sin kl & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kl & k \cos kl & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2.3.6. 铰支 - 定向 - 定向

结合表 1, 由(5)-(12)确定了一个关于初参数 a 、 b 、 c 、 d 、 F_A/F 、 M_{ec}/F 、 $w_1'(0)$ 、 $w_2(l)$ 的齐次线性方程组, 其有非零解的充要条件是系数行列式为零, 即求解压杆临界压力的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \cos kx & \sin kx & -\cos kx & -\sin kx & x & -1 & 0 & -1 \\ -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos kl & \sin kl & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kl & k \cos kl & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2.3.7. 铰支 - 定向 - 自由

结合表 1, 由(5)-(12)确定了一个关于初参数 a 、 b 、 c 、 d 、 F_A/F 、 $w_1'(0)$ 、 $w_2(l)$ 、 $w_2'(l)$ 的齐次线性方程组, 其有非零解的充要条件是系数行列式为零, 即求解压杆临界压力的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \cos kx & \sin kx & -\cos kx & -\sin kx & x & 0 & -1 & 0 \\ -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos kl & \sin kl & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kl & k \cos kl & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. 求解结果及验证

在 2.3.1~2.3.7 的特征方程中分别令 $x = ml$, $k = \frac{\pi}{ul}$ 并用软件如 maple 等展开, 得到关于 m 和 u 的特征方程 $f(m, u) = 0$ 。

(1) 由软件分析知, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.5 的特征方程 $f(m, u) = 0$ 为超越方程, 只有近似解。借助软件绘制 $f(m, u) = 0$ 的曲线, 则 $0 \leq m \leq 1$ 且 $0.25 \leq u \leq 2$ 区域曲线即为所求 $m-u$ 曲线, 见图 2。在该图中, 各 $m-u$ 曲线的最低点坐标表示中部支承的最佳位置及最小长度因数; 最高点坐标表示中部支承的最差位置及最大长度因数。近似关系见表 2, 粗体数字表示中部支承的最佳位置及压杆的最小长度因数, 斜体数字表示中部支承的最差位置及压杆的最大长度因数。

(2)由软件分析知, 2.3.3, 2.3.4, 2.3.6, 2.3.7 的特征方程 $f(m,u)=0$ 各有两个精确解, 结果见表 3, 取二者中的极大值为 u 的解。图 3 中各 $m-u$ 曲线的最低点坐标表示中部支承的最佳位置 m_0 及最小长度因数 u_{\min} ; 最高点坐标表示中部支承的最差位置 m_1 及最大长度因数 u_{\max} , 定量关系见表 3。

当中部支承无限移近到压杆两端, 即 $m=0^+$ 或 $m=1^-$ 时, 得到等效的单跨压杆见表 4, 此时表 2、表 3 中 $m=0$ 和 $m=1$ 时的长度因数与表 4 中等效单跨压杆的长度因数相等, 结果符合理论预期。

4. 结束语

压杆的临界状态本质是微弯曲平衡状态, 在推导上述特征方程时, 把约束反力和相应的变形同时作为初参数, 对整个压杆建立了统一的变形方程和静力平衡方程, 符合压杆处于临界状态的真实情况。

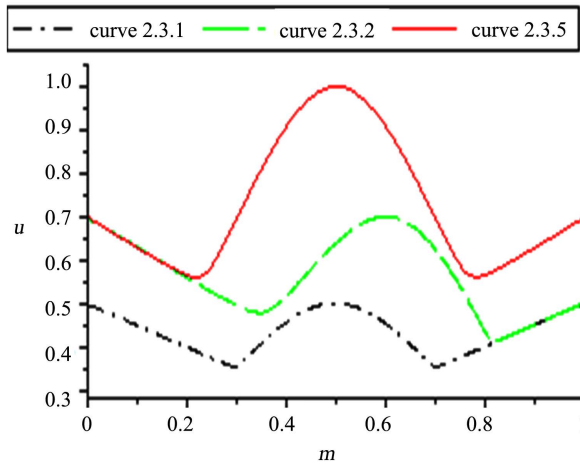


Figure 2. The curve of $m-u$
图 2. $m-u$ 曲线

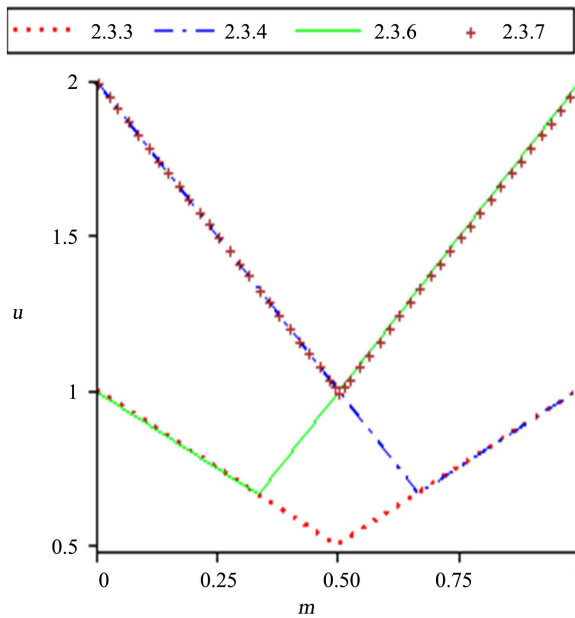


Figure 3. The curve of $m-u$
图 3. $m-u$ 曲线

Table 2. The factor of length(u)

表 2. 长度因数(u)

m	0	0.1	0.2	0.22	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.78	0.8	0.82	0.9	1
2.3.1	0.50	0.45	0.40		0.35	0.45	0.50	0.45	0.35		0.40		0.45	0.50
2.3.2	0.70	0.63	0.56		0.50	0.52	0.64	0.70	0.63		0.44	0.41	0.45	0.50
2.3.5	0.70	0.63	0.57	0.56	0.70	0.92	1.00	0.92	0.70	0.56	0.57		0.63	0.70

Table 3. The analytical expressions

表 3. 解析解答

N_0	特征方程的解	长度因数 u	m_0	u_{\min}	m_1	u_{\max}
2.3.3	$u_1 = m, u_2 = 1 - m$	Max ($m, 1 - m$)	0.50	0.50	0,1	1
2.3.4	$u_1 = m, u_2 = 2 - 2m$	Max ($m, 2 - 2m$)	0.67	0.67	0	2
2.3.6	$u_1 = 2m, u_2 = 1 - m$	Max ($2m, 1 - m$)	0.33	0.67	1	2
2.3.7	$u_1 = 2m, u_2 = 2 - 2m$	Max ($2m, 2 - 2m$)	0.50	1.00	0,1	2

Table 4. The equivalent long column

表 4. 等效压杆

N_0	m	0^+	1^-
2.3.1	固支 - 定向 - 固支	固支 - 固支	固支 - 固支
2.3.2	固支 - 定向 - 铰支	固支 - 铰支	固支 - 固支
2.3.3	固支 - 定向 - 定向	固支 - 定向	固支 - 定向
2.3.4	固支 - 定向 - 自由	固支 - 自由	固支 - 定向
2.3.5	铰支 - 定向 - 铰支	固支 - 铰支	铰支 - 固支
2.3.6	铰支 - 定向 - 定向	固支 - 定向	铰支 - 定向
2.3.7	铰支 - 定向 - 自由	固支 - 自由	铰支 - 定向

本文结果在丰富压杆的稳定性研究内容的同时，也为工程应用带来了方便。

基金项目

重庆科技学院本科生教育教学改革研究项目(CK2011B25)和研究生教育教学改革研究一般项目(YJG2014y008)。

参考文献 (References)

- [1] 李有兴, 肖芳淳 (1995) 用弯剪矩阵法确定压杆临界力的教学研究. *力学与实践*, **1**, 69-71.
- [2] 张春晓 (1997) 关于弯剪矩阵的思考. *力学与实践*, **2**, 68-69.
- [3] 冯贤贵 (2003) 细长压杆临界压力的统一推导. *力学与实践*, **4**, 65-67.
- [4] 曾生桥 (2007) 细长压杆临界压力欧拉公式的另一种统一推导. *常州工学院学报*, **2**, 48-50.
- [5] 董冠文, 等 (2012) 压杆稳定临界力欧拉公式统一推导. *武汉工程大学学报*, **12**, 71-74.
- [6] 黄开志, 陈小亮 (2014) 两端任意线弹性支承的压杆稳定性研究. *四川理工学院学报(自然科学版)*, **5**, 22-24.
- [7] 刘鸿文 (2011) 材料力学(第 5 版). 高等教育出版社, 北京, 177.

- [8] 蒋学东, 李小平 (2003) 连续压杆稳定性初参数法的研究. *江苏工业学院学报*, **2**, 43-45.
- [9] 倪晓博, 许笛 (2010) 连续梁式压杆固有频率与稳定性分析. *科技创新导报*, **5**, 112.
- [10] 李德威 (1994) 多跨连续压杆的稳定分析. *华南理工大学学报(自然科学版)*, **22**, 28-32.
- [11] 张晓霞, 等 (2011) 初始挠度及中间弹性支撑对压杆稳定性的影响分析. *机械设计与研究*, **6**, 1-4.
- [12] 黄开志, 陈小亮 (2014) 任意线弹性支承的双跨压杆稳定性计算. *武汉工程大学学报*, **9**, 7-11.
- [13] 黄开志, 陈小亮, 郑安节 (2014) 中部铰支加固的细长压杆稳定性研究. *重庆科技学院学报(自然科学版)*, **5**, 122-126.