

Theoretical Study of Euler's Formula and Loss Elimination Effect on Rope Windings of Winch Drum

Qiqi Jiang¹, Guang Meng¹, Jianming Wang²

¹Shanghai Jiao Tong University, Shanghai

²SANY Digital Science and Technology Co. Ltd., Suzhou Jiangsu

Email: qiqi_jiang@126.com

Received: Feb. 23rd, 2016; accepted: Mar. 12th, 2016; published: Mar. 15th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Rope and rope drum are important parts of winding machine and should be improved to enhance security issues. Theoretical analysis of drum dynamic force during the course of spooling into drums in multi-layer winding is introduced. By study and deduction of Euler's formula, a more accurate method is introduced to study the multi-layer winding drum force. Analytical model of rope is studied to illustrate the loss elimination effect. Course of the rope load relieving is explained. And then the analytical equations for calculation and pragmatic numerical estimation of rope tensional coefficient are revealed.

Keywords

Multi-Layer Drum, Wire Rope, Euler's Formula, Loss Elimination Effect, Rope Load Release Tension Coefficient

卷扬机钢丝绳欧拉公式及欧拉衰减的研究

江祺琦¹, 孟光¹, 王建明²

¹上海交通大学, 上海

²三一数字科技有限公司, 江苏 苏州

Email: qiqi_jiang@126.com

收稿日期：2016年2月23日；录用日期：2016年3月12日；发布日期：2016年3月15日

摘要

本文对卷筒钢丝绳缠绕过程进行分析，多层缠绕钢丝绳卷筒的受力实际随钢丝绳缠绕位置不同而变化，具有时变特性。基于欧拉挠性体摩擦公式，将公式推导至多圈多层，建立更准确的多层缠绕卷筒受力计算模型，进行详细理论分析。对由于钢丝绳之间摩擦力，以及钢丝绳、筒体的变形所导致的绳圈卸压效应进行研究。当钢丝绳缠绕圈数增加时，先前绕上的钢丝绳圈的张力发生变化，有绳圈卸压效应，即欧拉衰减现象。并对表示绳圈卸压的张力系数，提出合理计算公式，便于应用。

关键词

多层缠绕，钢丝绳，欧拉摩擦公式，欧拉衰减，绳圈卸压张力系数

1. 引言

卷扬系统是起重机、电铲等大型机械的关键部件。在产品使用过程中，一旦发生卷筒破坏失效，将可能引起非常严重的事故后果。

在钢丝绳缠绕至卷筒的过程中受力情况非常复杂，目前的卷筒失效成因，主要是因为在设计中对卷筒的受力情况分析不够准确所致。采用传统的经验公式来计算卷筒的受力，无法准确反映卷筒受力情况。因此，对卷筒进行详细受力分析非常必要。

多层缠绕钢丝绳卷筒的受力实际随钢丝绳缠绕位置不同而变化，具有时变特性。根据众多学者的研究及设计应用[1][2]，卷筒的受力应符合欧拉规律，根据之前的假设及欧拉绳理论，在缠绕过程中，两端的张力差即为摩擦产生。

当绳索绕到第 i 层时，先前缠绕在卷筒上的第 1 层至第 $i-1$ 层的绳索的张力都会发生变化，有卸压效应出现。绳索出绳端的拉力在经欧拉分布圈数的衰减后，与绳索内部的残余预应力达成新的受力平衡(图 1)。

2. 欧拉公式在底层钢丝绳缠绕卷筒受力分析的应用

如图 2 所示， F_{front} 、 F_{rear} 为绳两端的张力， $F_{\text{front}} > F_{\text{rear}}$ ， α 为绳在圆柱体上的缠绕角，也叫包角。1765 年欧拉假设，线绳为完全的挠性体，没有厚度，没有重量，不能伸长的绝对柔体。

绳在两个方向张力和圆柱体表面摩擦力的作用下，处于滑动及未滑动的临界状态。取绳很小的微段进行受力研究如图 3 所示。

图中 dN 为圆柱体对微段的反力； F ， $(F + dF)$ 微段两端的张力； $f dN$ 微段受的摩擦力； $d\alpha$ 为微段在圆柱体上的包角。

将 $x'o'y$ 坐标系设置于微段的中心，根据静力平衡有： $\sum X = 0$ ； $\sum Y = 0$

由 $\sum X = 0$ ，得：

$$dN = 2F \sin \frac{d\alpha}{2} + dF \sin \frac{d\alpha}{2} \quad (1)$$

$d\alpha \approx 0$ ， $\therefore \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$ ，略去两阶微量 $\left(dF \frac{d\alpha}{2} \right)$ 后整理： $dN = F d\alpha$

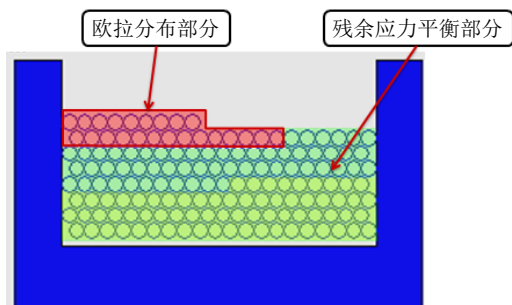


Figure 1. Multi-layer spooling radial force analysis of drum

图 1. 卷筒多层缠绕径向受力分析

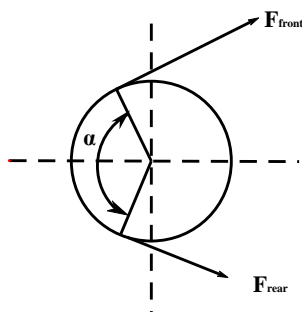


Figure 2. Full flexible rope spooling on cylinder

图 2. 柔性绳缠绕于圆柱体

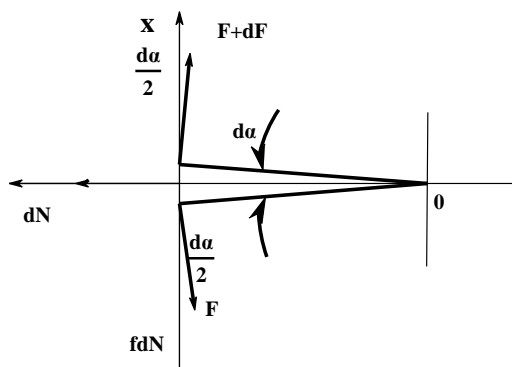


Figure 3. Equilibrium condition of micro segment of rope

图 3. 微段绳的力平衡关系

由 $\sum Y = 0$ ，得：

$$(F + dF) \cos \frac{d\alpha}{2} = F \cos \frac{\alpha}{2} + f dN \quad (2)$$

$d\alpha \approx 0$ ， $\therefore \cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1$ ，经整理得 $dF = f dN$

联立两个公式，并对等式两边积分得：

$$\frac{F_{\text{front}}}{F_{\text{rear}}} = e^{f\alpha} \quad (3)$$

式中： F_{front} 为绳的紧边张力大小； F_{rear} 为绳的松边张力大小； e 为自然对数的底数($e = 2.71828$)； f 为绳与圆柱体之间的摩擦系数； α 为绳在圆柱体上的包角(rad)。

将这个公式推导至单圈[3]，在缠绕上卷筒的过程中，会对卷筒产生正压力和摩擦力。如图 4 所示。

假定挠性钢丝绳在一圈内的正压力是均匀分布的，由欧拉公式可得：

紧边的力：

$$F_{\text{front}} = F_{\text{rear}} e^{\alpha f} \quad (4)$$

$$\Rightarrow F_{\text{rear}} = F_{\text{front}} e^{-\alpha f} \quad (5)$$

摩擦力：

$$F_t = F_{\text{front}} - F_{\text{rear}} = F_{\text{front}} - F_{\text{front}} e^{-\alpha f} = F_{\text{front}} (1 - e^{-\alpha f}) \quad (6)$$

周向正压力：

$$P = F_t / f = 2\pi R q \quad (7)$$

周向分布正压力：

$$q = \frac{F_t}{2\pi R f} \quad (8)$$

式中： α 为包角(对于卷扬系统包角为 2π)； f 为钢丝绳与卷筒或钢丝绳之间的摩擦系数； F_t 为摩擦力； q 为周向分布正压力； P 为周向正压力； R 为卷筒半径。

3. 欧拉公式多圈多层钢丝绳的推导

对欧拉公式进行进一步推导，至多圈多层的欧拉公式[4]。取微段如图 5，在垂直方向和水平方向，分别有平衡方程：

$$P_i dA = P_{i-1} dA + (2F_i + dF_i) \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \quad (9)$$

$$F_i + F_{i(i)} = F_i + dF_i + F_{i(i-1)} \quad (10)$$

式中： F_i ， $F_i + dF_i$ 为第 i 层绳两端的张力，此时处于滑动、未滑动的临界状态，运动趋势的方向与 $F_i + dF_i$ 方向相同； $F_{i(i)}$ ， $F_{i(i-1)}$ 为第 i 层及第 $i-1$ 层的摩擦力； P_i 为第 i 层的正压力； f 为摩擦系数； D_{cable} 为绳直径； n 为绳的总层数； j 为圈数； D_{outer} 为卷筒外径(=卷筒直径 + $i \times D_{\text{cable}}$)； $P_i dA$ 为绳索第 i 层在径向方向的受力。

那么卷筒上第 i 层第 j 圈的压力可表示为：

$$P_{\text{drum}} = 2 \frac{F_0}{D_{\text{cable}}} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-f[\alpha_0 + 2\pi j(i-1)]}}{D_i} \quad (11)$$

式中有 $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 2\pi j$ 。

4. 钢丝绳圈卸压效应的分析

在钢丝绳缠绕过程分析中，由于底层钢丝绳与卷筒壁之间摩擦力的存在，以及钢丝绳、筒体的变形，当钢丝绳缠绕圈数增加时，先前绕上的钢丝绳圈的张力发生变化，有绳圈卸压效应，即欧拉衰减现象。如图 6 所示，同层钢丝绳对卷筒的径向压力随着圈数的增加，先前缠绕的钢丝绳对卷筒的径向压力出现衰减，即最大作用力位置在不断变化。

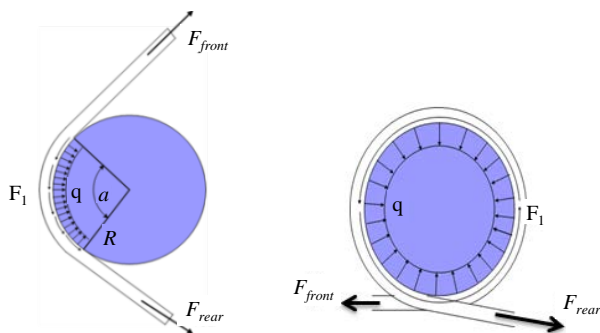


Figure 4. Force distribution of full flexible rope on drum
图 4. 挠性体摩擦受力示意图

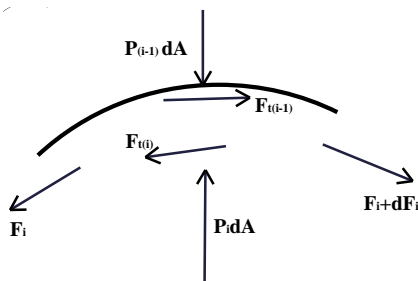


Figure 5. Load in layer i segment
图 5. 作用于第 i 层绳的力

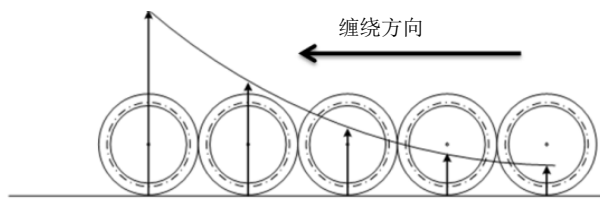


Figure 6. Axial positive pressure distribution of wire rope at same layer
图 6. 同层钢丝绳在轴向的正压力分布

在考虑同层钢丝绳的欧拉衰减时，可建立合理的钢丝绳的数学模型[5]，并进行进一步的分析。

如图 7 所示，采用近似模型对缠绕在卷筒上的绳索进行描述。假定用弹簧来描述绳索的特性，同时考虑绳索材料的阻尼特性，图示为绳索在卷筒上缠绕 j 圈 i 层的近似模型。

绳索在卷扬系统的作用及特性可以用弹簧和阻尼单元来表达，因此在系统中主要的作用力为绳索的张力 F_{si} 及绳索对卷筒的径向力 F_{ri} 。根据绳索的受力平衡得出以下两个方程：

$$\eta_{1i} \frac{dx_i}{dt} + k_{1i} x_i = F_{ri}(t) \tag{12}$$

$$\eta_{2i} \frac{dy_i}{dt} + k_{2i} y_i = F_{si}(t) \tag{13}$$

绳索的径向力会达到最大值，和卷筒卷绕过的角度 ϑ_i 有关。那么可得径向力可以如下式表达：

$$F_{ri}(t) = \frac{F_{si}(t)}{r_{Li}} \frac{\omega}{\vartheta_i} \tag{14}$$

根据傅里叶级数近似地将这个力分布在卷筒上，表达如下：

$$p(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kz + b_k \sin kz) \quad (15)$$

根据 P. Dietz 在文献中的研究，由阻尼作用会引起绳索中的能量损失，并使绳索的形变延迟产生，如图 8 所示。当绳索在卷筒上缠绕的角度绕过 ϑ_i 时，其能量损失如图 9 所示，显示由于阻尼所造成的能量损失。

绳索在缠绕时位置在 Z_j 的绳圈使得在 Z_{j-1} 的绳圈卸压，这就是欧拉衰减现象。绳索中的初始张力的衰减，和横向形变一样有时间上的延迟。时间延迟的产生，绳索的材料特性，以及相应的卷筒表面和摩擦特性都会不同程度地影响欧拉衰减的过程。

5. 同层绳欧拉衰减的表达

如同层钢丝绳在轴向的正压力分布中所示，从右往左开始缠绕，设卷筒上每层缠绕的圈数为 j 圈，总共缠绕 i 层，其最大径向压力 F_j^i 按照下列公式求得：

$$P = 2\pi Rq = F_j^i / f \quad (16)$$

为了简化计算，假设同层钢丝绳不同圈数钢丝绳的张力按指数规律衰减，则：

$$F_m^n = A_1 e^m + B_1 \quad (n=1, 2, \dots, j) \quad (17)$$

式中 A_1 为衰减系数， B_1 为修正常数， j 为钢丝绳圈数。

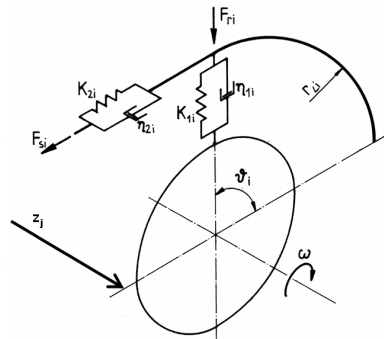


Figure 7. Analogous model of the rope-drum system at the winding for one turn j in the layer i

图 7. 第 j 圈 i 层的钢丝绳模型

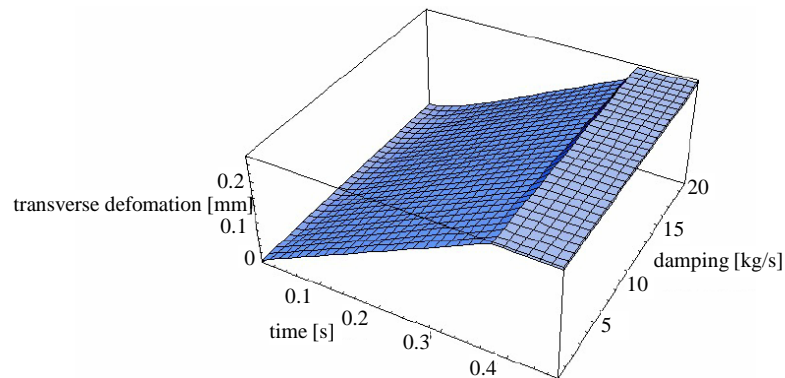


Figure 8. Rope deformation in transverse direction

图 8. 绳索横向变形

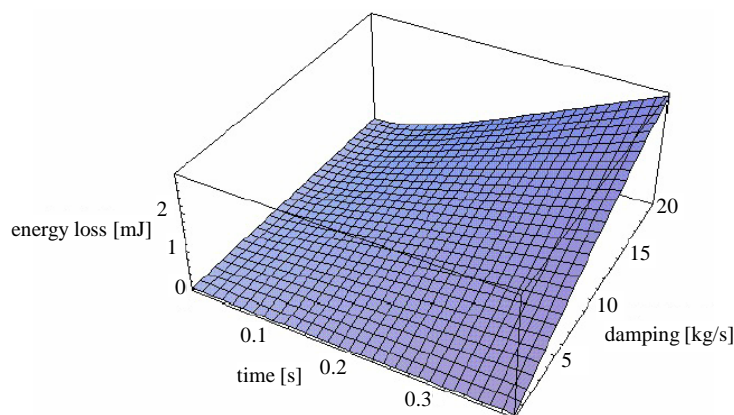


Figure 9. Energy loss in a synthetic rope

图 9. 绳索中的能量损失

6. 总结

1) 指出多层缠绕钢丝绳卷筒的受力实际随钢丝绳缠绕位置不同而变化，具有时变特性。以挠性件的欧拉摩擦公式为基础，推导至多圈多层，建立更准确的计算公式，以进一步分析钢丝绳模型及受力平衡。

2) 当钢丝绳绕到第 j 圈 i 层时，先前缠绕的钢丝绳的张力都会发生变化，即钢丝绳有卸压效应出现。而卷筒上的应力发生下降，这就是“钢丝绳对卷筒的卸压效应”。钢丝绳出绳端的拉力在经欧拉分布圈数的衰减后，与钢丝绳内部的残余预应力达成新的受力平衡。

3) 钢丝绳在卷筒的绳槽中按顺序一圈一圈地加载，在受张力地作用下，后续缠绕上卷筒的绳圈的径向收缩和轴向的形变会对上一圈已经缠绕的绳圈有应力松弛的作用。也就是由于这种松弛作用的产生，钢丝绳对卷筒的表面紧箍力实际有所降低。

4) 表示绳圈卸压的张力系数虽然受到许多因素影响，如钢丝绳几何参数、松弛模量、卷筒材料特性（弹性模量）、卷筒壁厚设计等的影响。在实际应用中，虽然这个参数比较复杂，但其数值范围在 1.25~1.35 之内。故也可以进行简化计算，当卷筒壁厚较薄时选大值，当卷筒壁厚设计较厚时选小值。

参考文献 (References)

- [1] 钱融. 谈卷筒传动中欧拉公式的应用[J]. 建设机械技术与管理, 2004, 17(10): 82-83.
- [2] 李建光. 欧拉公式在多绳摩擦提升设计中的应用[J]. 中小企业管理与科技, 2013(15): 172.
- [3] 王建明, 薛云峰, 江祺琦. 双折线式多层缠绕卷筒动态受力分析及结构优化[J]. 计算机辅助工程, 2015, 24(4): 33-38.
- [4] Popa, M. (2013) Force Experienced by Winch Drums and Reels Systems as a Function of Rope Characteristics and Varying Line Pull—A Theoretical Study. *The 18th North Sea Offshore Crane and Lifting Conference*, Stavanger Forum, Stavanger, 25 April 2013, 23-25.
- [5] Dietz, P., Lohrengel, A., Schwarzer, T. and Wächter, M. (2009) Problems Related to the Design of Multi Layer Drums for Synthetic and Hybrid Ropes. *OIPEEC Conference*, Stuttgart, 18-19 March 2009, 1-14.