

温度依赖功能梯度Timoshenko梁的弹塑性屈曲

曾 成^{1*}, 陈丽科²

¹兰州理工大学, 理学院, 甘肃 兰州

²兰州大学, 土木工程与力学学院, 甘肃 兰州

Email: *zc_robin1995@163.com

收稿日期: 2021年2月26日; 录用日期: 2021年3月19日; 发布日期: 2021年3月26日

摘 要

考虑功能梯度材料物性参数的温度依赖性研究变化的温度场中陶瓷-金属功能梯度Timoshenko梁的弹塑性屈曲特性, 其中功能梯度材料的弹塑性材料参数由TTO模型模拟、弹塑性本构方程应用线性强化模型建立。研究中利用Hamilton系统中的辛方法将问题转换为求解正则方程, 临界载荷和屈曲模态对应于正则方程的辛本征值和辛本征解。精确解析求解正则方程得到梁的临界载荷和屈曲模态, 并结合屈服条件获得弹塑性分界面。最后进行参数研究分析了梯度参数、几何参数和边界条件对该复合材料梁的屈曲载荷和屈曲时弹塑性变形分界面的影响。

关键词

功能梯度材料, Timoshenko梁, 弹塑性, 屈曲, 辛方法

Elastoplastic Buckling of Temperature Dependence Functionally Graded Timoshenko Beam

Cheng Zeng^{1*}, Like Chen²

¹School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

²School of Civil Engineering, Lanzhou University, Lanzhou Gansu

Email: *zc_robin1995@163.com

Received: Feb. 26th, 2021; accepted: Mar. 19th, 2021; published: Mar. 26th, 2021

*通讯作者。

Abstract

The elastoplastic buckling characteristics of functionally graded Timoshenko beams in varying temperature field are studied by considering the temperature dependence of material parameters. The elastoplastic material parameters of functionally graded materials are simulated by TTO model and the elastoplastic constitutive equation is established by linear strengthening model. By using the symplectic method in Hamilton system, the problem is transformed into solving canonical equations. The critical load and buckling mode correspond to the symplectic eigenvalue and eigen solution of the canonical equations, and are obtained by accurate analytical solution. At the same time, the elastoplastic interface is obtained by combining the yield condition. Finally, the influence of gradient parameters, geometric parameters and boundary conditions on the buckling load and elastoplastic deformation interface of the beam is analyzed.

Keywords

Functionally Graded Materials, Timoshenko Beam, Elastoplastic, Buckling, Symplectic Method

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

功能梯度材料(FGM)是一种可设计的新型复合材料,其材料特性在特定方向上平滑连续变化。FGM在热环境中工作时,可以避免因温度的变化导致应力集中甚至结构失稳的发生。目前为止,已有大量关于 FGM 结构稳定性的研究论文发表,但大多仅限于弹性稳定性方面。例如,文献[1]和文献[2]采用有限元法分别研究了 FGM 板和 FGM 圆柱壳的弹性屈曲。文献[3] [4] [5]采用打靶法等分别研究了 FGM 圆板、环板和梁的弹性热屈曲、动态屈曲及后屈曲。文献[6] [7]运用了摄动法研究了弹性 FGM 圆柱壳的热后屈曲和 FGM 板的后屈曲。文献[8]研究了 FGM 梁的热屈曲问题,求得临界屈曲温度。

以上关于 FGM 结构屈曲的研究尚局限于弹性范围内。若结构厚度尺寸较大,内部应力也较大,同时由于作为 FGM 重要组分的金属是塑性材料,它的存在极易使结构在应力较大的区域产生塑性变形,发生弹塑性屈曲。目前有少量关于 FGM 结构弹塑性屈曲的研究成果,文献[9]用有限元法研究了受机械载荷作用的 FGM 梁的弹塑性屈曲。文献[10]用辛方法研究了轴压 FGM 欧拉梁的弹塑性屈曲,发现只有当幂律指数大于一定值时,才会发生弹塑性屈曲。文献[11]用 GDQ 法研究了 FGM 矩形板的弹塑性屈曲,发现板越厚,形变理论和增量理论的差异就越大。文献[12]研究了 FGM 板的弹塑性屈曲和后屈曲,发现弹塑性屈曲临界载荷比弹性屈曲临界载荷小得多。文献[13]研究了 FGM 杆的扭转弹塑性屈曲,发现塑性区域随着幂律指数的增加而更快地扩大。文献[14]研究了轴压 FGM 圆柱壳的弹塑性屈曲,发现随着体积分数的增加,临界载荷急剧下降。在此基础上,文献[15]加入了径向压力,研究了径压轴压共同作用下 FGM 圆柱壳的弹塑性屈曲,发现了材料的塑性流动对稳定区有显著影响。

研究 FGM 结构的弹塑性屈曲可更精确地预测临界载荷,从而更好地发挥材料的塑性性能。目前尚未见考虑温度依赖性的剪切可变形 FGM 梁的弹塑性屈曲的研究成果。因此本文考虑 FGM 物性参数的温度依赖性,研究 FGM Timoshenko 梁的弹塑性屈曲。在 Hamilton 体系下求解控制方程,并进行数值算例分

析获得 FGM 梁的临界载荷和塑性变形域及其影响因素。

2. 控制方程及求解

考虑厚度方向梯度变化的矩形截面 FGM 梁, 长为 l 、宽为 b 、高为 h 。在梁的几何中面上建立坐标系 (x, y, z) , 原点 O 位于梁的左端横截面的中心, x 轴沿轴向, 该向位移记为 u , 几何中面上为 u_0 ; y 轴沿宽度方向; z 轴沿厚度方向, 横向挠度记为 w , 几何中面上为 w_0 ; 横截面的转角记为 φ 。弹塑性交界面为 s , 如图 1 所示。研究 FGM 梁在变温环境中的屈曲问题。

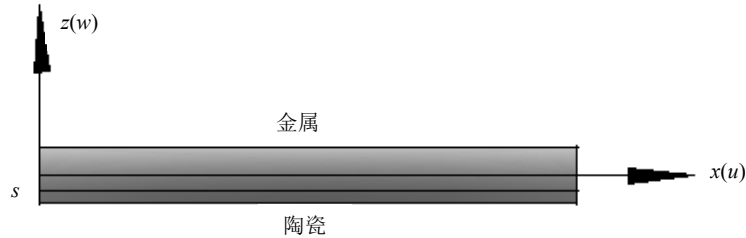


Figure 1. Functionally graded Timoshenko beam
图 1. 功能梯度 Timoshenko 梁

2.1. 等效物性参数

FGM 考虑由陶瓷和金属两相材料制成, 且假设其体积分数 V_c 和 V_m 沿厚度方向以幂函数形式连续变化:

$$V_c(z) = \left(\frac{h-2z}{2h}\right)^n, \quad V_m(z) = 1 - V_c(z) \quad (1)$$

其中 $n(0 \leq n < \infty)$ 为体积分指数, 不同值代表了成分含量不同的功能梯度材料。 $n=0$ 时退化为纯陶瓷梁; $n \rightarrow \infty$ 时则为纯金属梁。对处于变温环境中的 FGM 梁, 其材料的物性参数考虑与温度的相关性:

$$P_j(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (2)$$

其中 P 泛指金属和陶瓷的弹性模量、切线模量和屈服极限; j 为 c 或 m , 分别代表陶瓷和金属; T 为绝对温度; P_0 、 P_{-1} 、 P_1 、 P_2 、 P_3 为材料的温度相关系数。弹塑性 FGM 的弹性模量 E 、切线模量 H 和屈服极限 σ_Y 基于 TTO 模型给出:

$$E = E_m V_m + E_c V_c, \quad H = H_m V_m + E_c V_c, \quad \sigma_Y = \sigma_{Ym} \left(V_m + \frac{E_c}{E_m} V_c \right) \quad (3)$$

其中 E_m 、 H_m 和 σ_{Ym} 为金属的弹性模量、切线模量和屈服极限; E_c 为陶瓷的弹性模量。剪切弹性模量为 $G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\mu)}$ 。泊松比 μ 随温度变化不大, 一般取为常数[16]。

2.2. 基本方程和边界条件

FGM 梁的正应变 ε_x 和切应变 γ_{xz} 基于 Timoshenko 梁理论建立:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \varphi \quad (4)$$

FGM 的本构关系基于线性强化弹塑性模型建立, 正应力 σ_x 和切应力分别为[16]:

$$\sigma_x = \begin{cases} E(\varepsilon_x - \alpha\Delta T) & -\frac{h}{2} \leq z < s \\ \sigma_Y + H\left(\varepsilon_x - \frac{\sigma_Y}{E} - \alpha\Delta T\right) & s \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (5a)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (5b)$$

上式中 $\Delta T = T - T_0$ 为温度增量, 一般初始温度 $T_0 = 300 \text{ K}$; α 为热膨胀系数, 由线性混合律模型[10]计算; s 为 FGM 梁的弹塑性分界面到几何中面的距离, $-\frac{h}{2} \leq s \leq \frac{h}{2}$ 。若 $s = -\frac{h}{2}$, 发生弹性屈曲; $s = \frac{h}{2}$, 发生塑性屈曲; $-\frac{h}{2} < s < \frac{h}{2}$, 则发生弹塑性屈曲。本文考虑固定(C)和不可移简支(S)两种边界约束, 边界条件分别为:

$$C: u_0 = w_0 = \varphi = 0, \quad S: u_0 = w_0 = M = 0.$$

2.3. 正则方程

本文利用 Hamilton 体系下的辛方法研究 FGM 梁的弹塑性屈曲。为了引入 Hamilton 体系, 定义 $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$ 、 $w' = \frac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 、 $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, FGM 梁的 Lagrange 密度函数可表示为:

$$\begin{aligned} \bar{L} = \bar{T} - \bar{V} - \bar{U} \\ \frac{1}{2}\bar{I}_0(\dot{w})^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_1(\dot{\varphi})^2 - \frac{1}{2}Q(w')^2 \\ - \frac{1}{2}B_1(\varphi')^2 - \frac{1}{2}B_2(\varphi') - \frac{1}{2}B_3(w' - \varphi)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

其中: Q 为轴向压缩荷载, \bar{T} 为动能密度, \bar{U} 为应变能密度, \bar{V} 为势能密度, $(\bar{I}_0, \bar{I}_1) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)\{1, z^2\} dz$ 为 FGM 梁的单位面积的质量。 B_1 和 B_2 为 FGM 梁的刚度系数, B_3 为剪切刚度系数。进行量纲为一的处理, $X = x/l$, $W = w/l$, $\phi = h\varphi/l$, $I_0 = \frac{2\bar{I}_0 l^4}{B_1}$, $I_1 = \frac{2\bar{I}_1 l^2}{B_1}$, $A_1 = \frac{Ql^2}{B_1}$, $A_2 = \frac{B_2 l}{B_1}$, $A_3 = \frac{B_3 l^2}{B_1}$, 将原变量记为 $W = q_1$, $\phi = q_2$ 并引入对偶 $p = \{p_1, p_2\}^T$, 得到 $p_1 = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_1} = I_0 \dot{q}_1$ 和 $p_2 = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_2} = I_1 \dot{q}_2$, 则系统的 Hamilton 函数表示为:

$$F = p\dot{q} - L = \frac{p_1^2}{2I_0} + \frac{p_2^2}{2I_1} + A_1(W')^2 + (\phi')^2 + A_2(\phi') + A_3(W' - \phi)^2 \quad (7)$$

通过变分运算可得 FGM 梁在 Hamilton 系统下的对偶正则方程:

$$\Psi \equiv \begin{Bmatrix} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{p}} \\ -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p_1}{I_0} \\ \frac{p_2}{I_1} \\ (A_1 + A_3) \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} - A_3 \frac{\partial q_2}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + A_3 \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} - q_2 \right) \end{Bmatrix} \quad (8)$$

2.4. 方程的解析解

在辛空间中, FGM 梁屈曲时满足条件 $\dot{\psi} = 0$, 可得方程:

$$(A_1 + A_3) \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} - A_3 \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0 \tag{9a}$$

$$\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + A_3 \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} - q_2 \right) = 0 \tag{9b}$$

联立求解以上方程组可得到 FGM 梁屈曲的挠度通解为:

$$W = C \left[C_1 + C_2 x - \frac{C_3 \cos(\sqrt{\theta} x)}{\theta} - \frac{C_4 \sin(\sqrt{\theta} x)}{\theta} \right] \tag{10}$$

其中 $C = \frac{A_3}{(A_1 + A_3)}$, 待定系数 C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 由边界条件确定, 本文考虑两种边界条件梁, 分别是两端固定(C-C)和一端固定一端不可移简支(C-S)。把两种边界条件分别代入到通解式(10)中得线性方程组, 并化简可得分叉条件, C-C 边界为:

$$2 - 2 \cos \sqrt{\theta} - \sqrt{\theta} \sin \sqrt{\theta} = 0 \tag{11a}$$

C-S 边界为:

$$-(\theta + 1) \cos \sqrt{\theta} + \sqrt{\theta} \sin \sqrt{\theta} + 1 = 0 \tag{11b}$$

分别求解方程(11a)和(11b)得到无量纲屈曲特征值 $\theta_i (i=1,2,3,\dots)$ 。C-C 边界的 $\theta_i (i=1,2,3,\dots)$ 为 39.47, 80.76, 157.91, 238.72, ……; C-S 边界的 $\theta_i (i=1,2,3,\dots)$ 为 20.19, 59.67, 118.90, 197.85, ……。考虑边界条件、并同时利用归一化方法令 $C_4 = 1$, 可得以上特征值对应的第 i 阶的弹塑性屈曲模态, C-C 边界为:

$$W_i = C \left[\frac{1 - \cos \sqrt{\theta}}{\sin \sqrt{\theta}} - \sqrt{\theta} x - \frac{\sin \sqrt{\theta} x}{\theta} + \frac{(\cos \sqrt{\theta} - 1) \cos \sqrt{\theta} x}{\sin(\sqrt{\theta}) \theta} \right] \tag{12a}$$

C-S 边界为:

$$W_i = C \left[\tan \sqrt{\theta} - \sqrt{\theta} x - \frac{\sin \sqrt{\theta} x}{\theta} + \frac{\sin(\sqrt{\theta}) \cos(\sqrt{\theta} x)}{\cos(\sqrt{\theta}) \theta} \right] \tag{12b}$$

FGM 梁发生弹塑性屈曲, 为了求解弹塑性变形的分界面到中面的距离 s , 可利用屈服条件 $\sigma(s) = \sigma_y(s)$ 。将特征值 θ_i 依次回代, 并通过数值解方程, 可以得到临界屈曲载荷 N 和弹塑性交界面 s 。

3. 数值算例和讨论

本节将给出以上理论推导的数值算例。梁的长度取为 $l = 0.5 \text{ m}$, 长细比分别选 $L = 5$ 和 $L = 10$ 。组分材料选为陶瓷 ZrO_2 和金属 Ti-6Al-4V , 两种材料的温度相关系数可见文献[16] [17]。

3.1. 临界屈曲载荷

图2 绘出了长细比 $L = 5$ 时两种边界条件 FGM 梁的临界载荷随材料体积分数指数 n 的变化关系曲线。由图可见当幂指数 n 和环境温差增大时, FGM 梁的临界载荷会逐渐减小, 即 FGM 梁在热环境中的承受

能力也逐渐减小。是因为随着幂指数 n 的增大, 金属含量增大, FGM 梁的弹性模量和抗弯刚度减小。而且对于两种边界条件下较小的 n , 即 $n < 40$ 和 $n < 15$ 时, 无临界载荷, 这是由于 FGM 梁中的陶瓷含量高而构件不发生弹塑性屈曲失效。当 $n \geq 40$ 和 $n \geq 15$ 时, FGM 梁开始发生弹塑性屈曲。另外, 环境温度越高临界载荷越小, 若 FGM 梁的环境温度增加 60K 时, 临界载荷的差值可达 5%, 这是由于材料在高温环境中的弹性模量和屈服强度降低, 导致 FGM 梁的承载能力随即降低, 计算发现当温差大于 150 K 时梁无弹塑性屈曲发生。

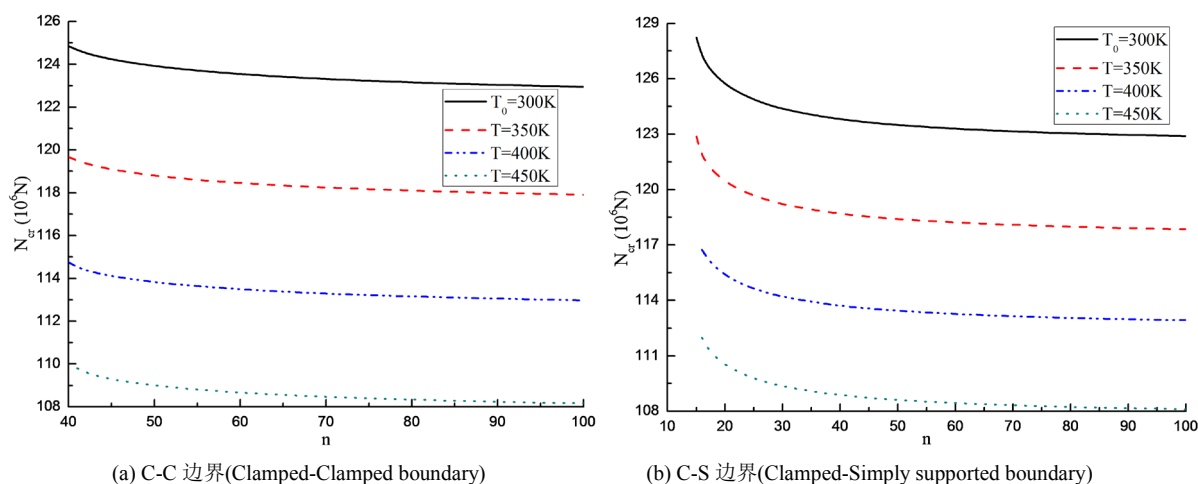


Figure 2. Effect of volume fraction index n on critical load N_{cr} ($L = 5$)

图 2. 体积分数指数 n 对临界载荷 N_{cr} 的影响 ($L = 5$)

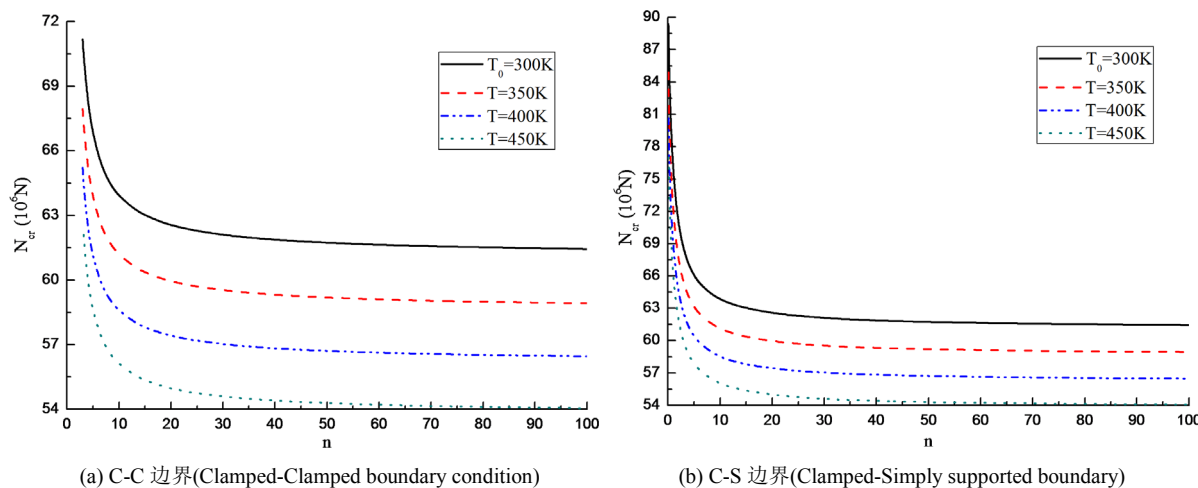


Figure 3. Effect of volume fraction index n on critical load N_{cr} ($L = 10$)

图 3. 体积分数指数 n 对临界载荷 N_{cr} 的影响 ($L = 10$)

图 3 绘出了长细比 $L = 10$ 时两种边界条件 FGM 梁的临界轴向载荷随材料体积分数指数 n 的变化关系, 与图 2 对比可见 $L = 5$ 时的临界载荷大于 $L = 10$ 时的, 显然长细比对临界载荷的影响较大。

3.2. 屈服界面

图 4 绘出了两种边界 FGM 梁的弹塑性分界面到中面的距离 s 随体积分数 n 的变化曲线。由图可见,

当幂指数 n 增加时, FGM 梁的弹塑性分界面的距离会逐渐增大, 即逐渐远离陶瓷侧。即 FGM 梁发生弹塑性屈曲时, 屈服界面随 n 的增大由陶瓷侧逐渐移向金属侧。这是由于当 n 增大, 即金属的成分增大, FGM 梁的塑性流动域逐渐减小。同时可见, 当 n 较大时, 环境温度的变化对弹塑性分界面的影响较明显。因为 n 较大时, FGM 梁内的金属成分很大, 金属的力学性能受温度的影响比陶瓷大, 因此 n 越大, 温度效应越明显。且温度越高屈服界面越靠近金属侧, 塑性流动区域越大。

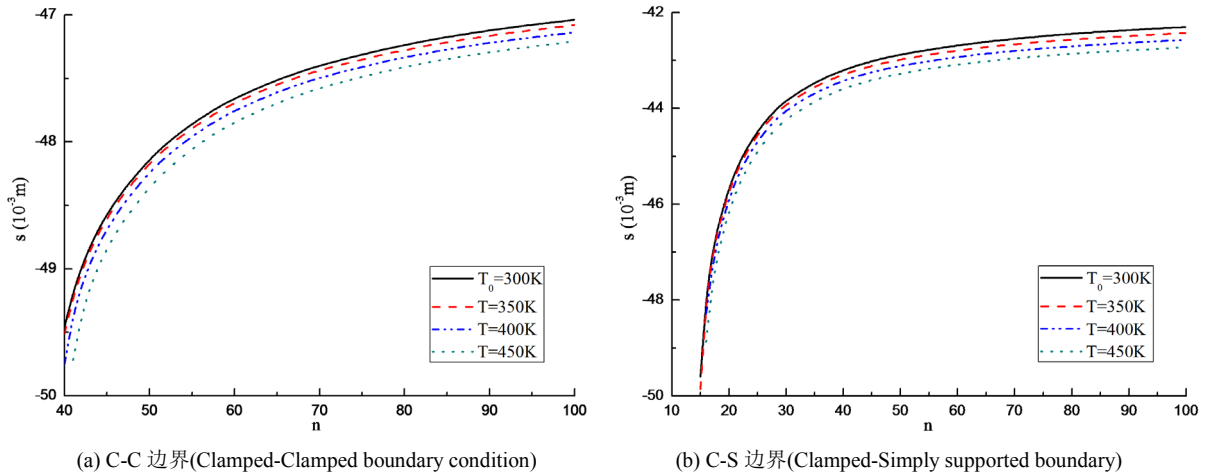


Figure 4. Effect of volume fraction index n on elastoplastic interface s ($L = 5$)
图 4. 体积分数指数 n 对弹塑性界面 s 的影响 ($L = 5$)

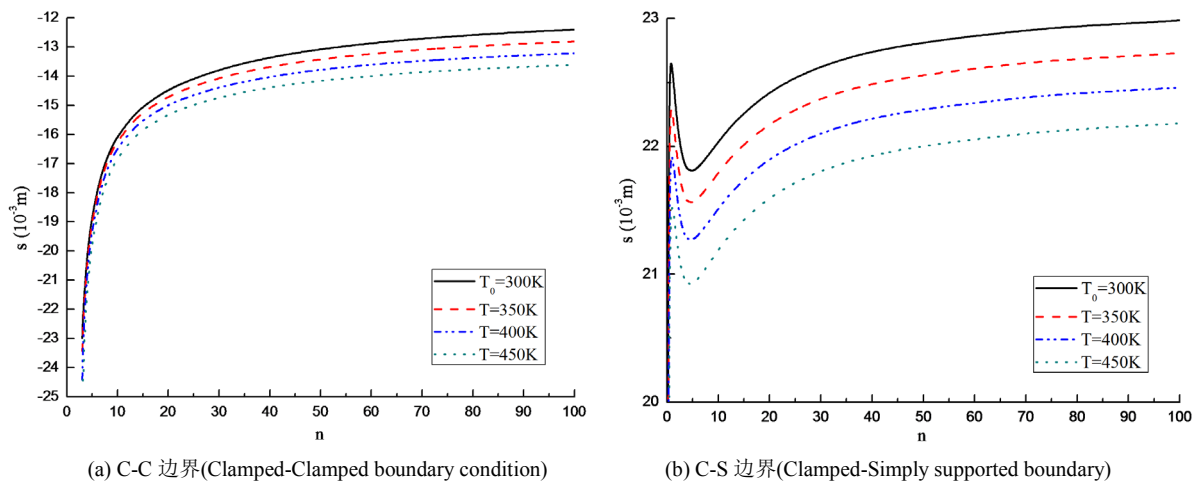


Figure 5. Effect of volume fraction index n on elastoplastic interface s ($L = 10$)
图 5. 体积分数指数 n 对弹塑性界面 s 的影响 ($L = 10$)

图 5 绘出了长细比 $L = 10$ 时两种边界 FGM 梁发生弹塑性屈曲时弹塑性界面到中面的距离 s 随体积分数 n 的变化规律曲线。特别地, 对于 C-S 边界条件, 当 $n < 10$ 时, 弹塑性分界面的距离为非单调变化, 这是因为梁中金属的成分增加导致临界轴力快速减小, 屈服界面向陶瓷侧移动, 致使 FGM 梁内的塑性流动区域反而减小。

4. 结论

- 1) 基于 Timoshenko 剪切变形理论和辛方法研究了 FGM 梁的弹塑性屈曲, 建立了 Hamilton 体系中

的屈曲模态方程和分叉条件, 通过解析求解获得了屈曲载荷和屈曲模态, 同时也得到了弹塑性分界面。

2) 临界载荷随体积分指数、环境温度和长细比的增大而减小。

3) FGM 梁弹塑性屈曲时的塑性流动域受到梯度参数、长细比和边界条件的影响。对于较小长细比的 FGM 梁, 弹塑性屈曲时屈服界面靠近陶瓷侧, 塑性流动区较大; 对于较大长细比的 FGM 梁, 屈服界面更偏向金属侧, 塑性流动区较小。

参考文献

- [1] 孙云, 陈江, 李世荣. 基于物理中面 FGM 板屈曲的有限元分析[J]. 计算力学学报, 2020, 37(5): 47-53.
- [2] Shariyat, M. (2008) Dynamic Thermal Buckling of Suddenly Heated Temperature Dependent FGM Cylindrical Shells under Combined Axial Compression and External Pressure. *International Journal of Solids and Structures*, **45**, 2598-2612. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.12.015>
- [3] Li, S.R., Zhang, J.H. and Zhao, Y.G. (2007) Nonlinear Thermomechanical Post Buckling of Circular FGM Plate with Geometric Imperfection. *Thin-Walled Structures*, **45**, 528-536. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.04.002>
- [4] Zhang, J.H., Pan, S.C. and Chen, L.K. (2019) Dynamic Thermal Buckling and Postbuckling of Clamped-Clamped Imperfect Functionally Graded Annular Plates. *Nonlinear Dynamics*, **95**, 565-577. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4583-5>
- [5] Li, S.R., Zhang, J.H. and Zhao, Y.G. (2006) Thermal Post-Buckling of Functionally Graded Material Timoshenko Beams. *Applied Mathematics and Mechanics*, **27**, 803-810. <https://doi.org/10.1007/s10483-006-0611-y>
- [6] Shen, H.S. (2007) Thermal Postbuckling of Shear Deformable FGM Cylindrical Shells with Temperature-Dependent Properties. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, **14**, 439-452. <https://doi.org/10.1080/15376490701298942>
- [7] Shen, H.S. (2007) Thermal Postbuckling Behavior of Shear Deformable FGM Plates with Temperature-Dependent Properties. *International Journal of Mechanical Sciences*, **49**, 466-478. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.09.011>
- [8] Kiani, Y. and Eslam, M.R. (2010) Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Material Beams. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, **6**, 229-238. <https://doi.org/10.1007/s10999-010-9132-4>
- [9] Alijani, A., Darvizeh, M. and Darvizeh, A. (2015) Elastoplastic Pre- and Post-Buckling Analysis of Functionally Graded Beams under Mechanical Loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, **229**, 146-165. <https://doi.org/10.1177/1464420713502908>
- [10] Zhang, J. and Zheng, W. (2021) Elastoplastic Buckling of FGM Beams in Thermal Environment. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **33**, 151-161. <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00895-z>
- [11] Beikmohammadlou, H. and Ekhteraeitoussi, H. (2017) Parametric Studies on Elastoplastic Buckling of Rectangular FGM Thin Plates. *Aerospace Science and Technology*, **69**, 513-525. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.07.015>
- [12] Xu, G., Huang, H. and Chen, B. (2017) Buckling and Postbuckling of Elastoplastic FGM Plates under Inplane Loads. *Composite Structures*, **176**, 225-233. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.04.061>
- [13] Tsiatas, G.C. and Babouskos, N.G. (2017) Elastic-Plastic Analysis of Functionally Graded Bars under Torsional Loading. *Composite Structures*, **176**, 254-267. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.05.044>
- [14] Xu, G., Huang, H.W. and Han, Q. (2017) Study on Postbuckling of Axial Compressed Elastoplastic Functionally Graded Cylindrical Shells. *Mechanics of Advanced Materials & Structures*, **25**, 820-828. <https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1308589>
- [15] Zhang, Y., Huang, H. and Han, Q. (2015) Buckling of Elastoplastic Functionally Graded Cylindrical Shells under Combined Compression and Pressure. *Composites Part B Engineering*, **69**, 120-126. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.09.024>
- [16] Nemat-alla, M., Ahmed, K. and Hassab-allah, I. (2009) Elastic-Plastic Analysis of Two-Dimensional Functionally Graded Materials under Thermal Loading. *International Journal of Solids and Structures*, **46**, 2774-2786. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.03.008>
- [17] Reddy, J.N. and Chin, C.D. (1998) Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates. *Journal of Thermal Stresses*, **21**, 593-620. <https://doi.org/10.1080/01495739808956165>