

# 石墨烯增强泡沫圆柱壳的自由振动分析

冯喆林

北京信息科技大学理学院, 北京

收稿日期: 2021年9月24日; 录用日期: 2021年10月25日; 发布日期: 2021年11月5日

## 摘要

基于一种半解析区域分解法, 对石墨烯增强泡沫圆柱壳的自由振动进行分析。该方法沿旋转轴将壳体分解成若干个壳段, 采用改进的变分原理和最小二乘加权残差法将壳段界面势能引入到壳体的能量泛函, 使壳体的自由振动分析问题归结为无约束泛函变分问题。壳段位移变量采用Fourier级数和Chebyshev多项式函数展开, 对运动控制方程进行离散并求其自由振动频率, 将计算结果与已有成果进行了对比, 验证了本文计算方法的正确性, 并分析了孔隙系数、石墨烯质量分数以及几何参数对圆柱壳自由振动固有频率的影响。

## 关键词

石墨烯增强圆柱壳, 自由振动, 区域分解法, 最小二乘加权残差法

# Free Vibration Analysis of Graphene Reinforced Foam Cylindrical Shells

Zhelin Feng

School of Applied Science, Beijing Information Science & Technology University, Beijing

Received: Sep. 24<sup>th</sup>, 2021; accepted: Oct. 25<sup>th</sup>, 2021; published: Nov. 5<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

Free vibration of a porous graphene-enhanced cylindrical shell is analyzed based on a semi-analytical domain decomposition method. According to this method, the shell is decomposed into several shell segments along the axis of rotation. The improved variational principle and the least square weighted residual method are used to introduce the shell interface potential energy into the energy functional of the shell so that the free vibration analysis of the shell is reduced to an unconstrained functional variational problem. The shell displacement variable is expanded by the Fourier series and Chebyshev polynomial function. The motion control equation is discretized and

the free vibration frequency is calculated. The calculation results are compared with the existing results to verify the correctness of the calculation method in this paper, and the influence of porosity, graphene mass fraction and geometric parameters on the natural frequency of the free vibration of a cylindrical shell is analyzed.

## Keywords

Graphene Reinforced Cylindrical Shell, Free Vibration, Domain Decomposition Method, Least Squares Weighted Residual Method

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

研究表明[1], 石墨烯及其衍生物是开发高性能复合材料一种极好的增强材料, 聚合物基体中加入极少量石墨烯, 其力学性能得到显著提高。圆柱壳体是航空航天领域常采用的主要结构之一, 其振动特性分析是学术界和工程科学界一致广泛关注的问题。

对石墨烯增强复合材料壳体的自由振动, 国内外学者在算法求解方面开展了大量的研究。Ton-That等[2]采用一种新的四节点五自由度四边形单元对固支或简支边界条件下功能梯度石墨烯增强泡沫板壳进行了自由振动分析, 克服了网格粗糙或不规则时, 没有用于线性分析的平坦元素的不足; Dong [3]等给出了简支边界条件下石墨烯增强泡沫圆柱壳自旋振动特性的解析解; Qin 等[4]运用人工弹簧技术与Rayleigh-Ritz 方法结合, 提出三种弹性地基上功能梯度石墨烯增强复合材料泡沫厚圆柱壳自由振动分析的六种不同位移函数的统一解; Wang 等[5]采用 Navier 方法和伽辽金方法, 对简支边界条件下的三维石墨烯增强聚合物泡沫壳体的自由振动进行分析, 研究表明, 近中平面减薄三维石墨烯增强聚合物泡沫壳体是最佳增强性能的有效途径。

本文基于区域分解方法[6] [7] [8] [9], 采用改进的变分原理以及最小二乘加权残差法, 分析了不同边界条件下石墨烯增强泡沫圆柱壳体的自由振动。为了验证方法的有效性和可靠性, 计算石墨烯增强圆柱壳在简支边界条件下的振动频率, 并与已有结果进行了比较。在此基础上, 分析了不同边界条件下孔隙系数、石墨烯含量、几何参数对其自由振动的影响。

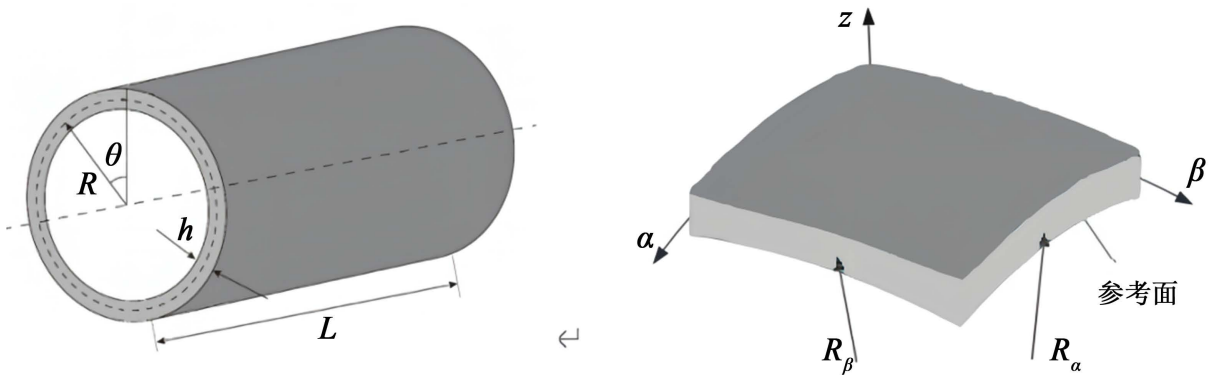
## 2. 石墨烯增强泡沫圆柱壳的区域分解模型

石墨烯增强圆柱壳示意图如图 1(a), 在圆柱壳的中面上建立曲面坐标  $(\alpha, \beta, z)$  (如图 1(b)), 其中  $\alpha$  和  $\beta$  是沿中面的曲率线方向,  $z$  与  $\alpha, \beta$  垂直。  $R_\alpha$  和  $R_\beta$  分别为沿  $\alpha$  和  $\beta$  轴的中面主曲率半径。

对于非均匀的对称孔隙分布的石墨烯增强圆柱壳体的外壳, 壳体的等效材料参数杨氏模量  $E(z)$ 、质量密度  $\rho(z)$  以及泊松比  $\mu(z)$  可以表示为[10]:

$$E(z) = E^* \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right], \rho(z) = \rho^* \left[ 1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right], \mu(z) = \mu^* \quad (1)$$

式(1)中,  $E^*, \rho^*, \mu^*$  是石墨烯增强复合材料的杨氏模量、质量密度和泊松比,  $e_0$  是材料的孔隙系数,  $e_m$  表示材料的质量密度系数[11]。



**Figure 1.** Schematic diagram of cylindrical shell and shell coordinate system  
**图 1.** 圆柱壳示意图以及壳体坐标系

由一阶剪切变形理论[12]，圆柱壳体上任意一点变形后的位移向量  $\bar{r} = (\bar{u}(\alpha, \beta, z, t), \bar{v}(\alpha, \beta, z, t), \bar{w}(\alpha, \beta, z, t))^T$ ，表达如下

$$\bar{r} = r + z\Psi \tag{2}$$

式(2)中， $r = (u(\alpha, \beta, t), v(\alpha, \beta, t), w(\alpha, \beta, t))^T$ ， $\Psi = (\psi_\alpha(\alpha, \beta, t), \psi_\beta(\alpha, \beta, t), 0)^T$ 。

其中  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  分别是该点在变形后沿  $\alpha, \beta, z$  轴方向位移分量； $u, v, w$  分别表示圆柱壳体中面上任一点沿  $\alpha, \beta, z$  轴的位移分量； $\psi_\alpha, \psi_\beta$  分别表示中面横向法线沿  $\alpha$  和  $\beta$  轴的转角； $t$  是时间变量。

沿圆柱壳体母线方向将壳体等距分为  $N_0$  个壳段，根据区域分解思想[13]，使用改进的变分原理，构造出圆柱壳体的能量泛函  $\Pi$  为

$$\Pi = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{N_0} (T_i - U_i) dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,i+1} \Pi_B dt \tag{3}$$

式(3)中， $T_i, U_i$  分别为第  $i$  个壳段的动能和应变能； $\Pi_B$  为相邻壳段  $i$  和  $i+1$  之间的界面附加势能。

根据薄壳理论，石墨烯增强圆柱壳体的第  $i$  个壳段的最大动能表示为

$$T_i = \frac{1}{2} \iint_{S_i} (\bar{\rho}_0 \dot{r}_i^T \dot{r}_i + 2\bar{\rho}_1 \dot{r}_i^T \dot{\Psi}_i + \bar{\rho}_2 \dot{\Psi}_i^T \dot{\Psi}_i) AB d\alpha d\beta \tag{4}$$

式(4)中， $\dot{\cdot}$  表示对时间  $t$  的微分； $r_i = \left( \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial v_i}{\partial t}, \frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^T$ ， $\Psi_i = \left( \frac{\partial \psi_{\alpha,i}}{\partial t}, \frac{\partial \psi_{\beta,i}}{\partial t}, 0 \right)^T$ 。

其中， $u_i, v_i, w_i$  是第  $i$  个壳段上任一点在变形后沿  $\alpha, \beta, z$  轴方向位移分量； $S_i$  为第  $i$  个壳段的表面积； $A$  和  $B$  是壳体参考面的拉梅系数； $\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$  是惯性项，表示为

$$\bar{\rho}_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz, \bar{\rho}_z = \int_{-h/2}^{h/2} z \rho(z) dz, \bar{\rho}_2 = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \rho(z) dz$$

其中， $h$  为壳体的厚度； $\rho(z)$  为壳体的质量密度。

根据薄壳理论，第  $i$  个壳段的应变能为

$$U_i = \frac{1}{2} \iint_{S_i} \sigma^T \varepsilon AB d\alpha d\beta \tag{5}$$

式(5)中，应力  $\sigma = (N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}, M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}, Q_\alpha, Q_\beta)^T$ ，应变  $\varepsilon = (\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{\alpha\beta}, \chi_\alpha, \chi_\beta, \chi_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha z}, \varepsilon_{\beta z})^T$ 。

其中， $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{\alpha\beta}$  为中面的膜应变； $\chi_\alpha, \chi_\beta, \chi_{\alpha\beta}$  表示壳的曲率； $\varepsilon_{\alpha z}, \varepsilon_{\beta z}$  是横向剪切应变； $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$  是单位长度的面内合力； $M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}$  表示弯矩和扭矩合力； $Q_\alpha, Q_\beta$  是横向剪切力合力。

圆柱壳中面的力和力矩与应变和曲率的本构方程为

$$\begin{pmatrix} N_\alpha \\ N_\beta \\ N_{\alpha\beta} \\ M_\alpha \\ M_\beta \\ M_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 & D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_{\alpha\beta} \\ \chi_\alpha \\ \chi_\beta \\ \chi_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Q_\alpha \\ Q_\beta \end{pmatrix} = ks \begin{pmatrix} A_{66} & 0 \\ 0 & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha z} \\ \varepsilon_{\beta z} \end{pmatrix}$$

其中, 参数  $ks$  为剪切修正系数, 取  $\frac{5}{6}$ ;  $A_{ij}$  为拉伸刚度矩阵;  $B_{ij}$  为拉伸弯曲耦合刚度矩阵;  $D_{ij}$  为弯曲刚度。假设在厚度方向连续光滑地变化, 则分别表示为

$$\begin{pmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} dz, i, j = 1, 2, 6。$$

其中,  $Q_{ij}$  是弹性模量、泊松比关于厚度坐标  $z$  的函数, 表述为

$$(Q_{11} \quad Q_{12} \quad Q_{66}) = \begin{pmatrix} \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} & \frac{\mu(z)E(z)}{1-\nu^2(z)} & \frac{E(z)}{2(1+\mu(z))} \end{pmatrix}$$

令  $q = (u, v, w, \psi_\alpha, \psi_\beta)^T$ , (5)式中,

$$\varepsilon = \phi q \quad (6)$$

$$\text{其中, } \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \alpha} & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

为了给出任意边界条件下圆柱壳区域分解的能量泛函表达式, 本文采用广义变分和最小二乘加权残差组合法来构造(3)式中的分区界面附加势能  $\Pi_B$  [14], 即

$$\begin{aligned} \Pi_B = & \int_{l_i} \left( \zeta_u N_\alpha \Theta_u + \zeta_v N_{\alpha\beta} \Theta_v + \zeta_w Q_\alpha \Theta_w + \zeta_\eta M_\alpha \Theta_\alpha + \zeta_g M_{\alpha\beta} \Theta_\beta \right) dl \\ & - \frac{1}{2} \int_{l_i} \left( \zeta_u \kappa_u \Theta_u^2 + \zeta_v \kappa_v \Theta_v^2 + \zeta_w \kappa_w \Theta_w^2 + \zeta_\eta \kappa_\eta \Theta_\alpha^2 + \zeta_g \kappa_g \Theta_\beta^2 \right) dl \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)中, 用分区广义积分获得(7)式第一项积分, 放松界面连续性的约束。第二个积分表达式由最小二乘加权残差法引入, 保证计算的收敛性、稳定性以及处理壳体的非经典边界约束。 $\Theta_u = u_i - u_{i+1}$ ,  $\Theta_v = v_i - v_{i+1}$ ,  $\Theta_w = w_i - w_{i+1}$ ,  $\Theta_\alpha = \psi_{\alpha,i} - \psi_{\alpha,i+1}$ ,  $\Theta_\beta = \psi_{\beta,i} - \psi_{\beta,i+1}$ 。

$\kappa_\sigma (\sigma = u, v, w, \eta, \vartheta)$  为预先给定的加权参数;  $\zeta_\sigma (\sigma = u, v, w, \eta, \vartheta)$  是定义不同界面连续性条件的参数, 如表 1 所示。

**Table 1.** Values of  $\zeta_\sigma (\sigma = u, v, w, \eta, \vartheta)$  for different boundary conditions

**表 1.** 不同边界条件对应的控制参数  $\zeta_\sigma (\sigma = u, v, w, \eta, \vartheta)$

边界	必要条件	$\zeta_u$	$\zeta_v$	$\zeta_w$	$\zeta_\eta$	$\zeta_\vartheta$
自由	无	0	0	0	0	0
软简支	$v = w = 0$	0	1	1	0	0
简支	$u = v = w = \psi_\beta = 0$	1	1	1	0	1
固支	$u = v = w = \psi_\alpha = \psi_\beta = 0$	1	1	1	1	1

### 3. 离散动力学方程

取坐标  $\beta$  为壳体周向坐标 ( $\beta = \theta$ ), 且  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  坐标线性转换  $\xi \in [-1, 1]$ , 对于周向变量采用 Fourier 级数展开, 经向变量用第一类 Chebyshev 正交多项式函数展开, 圆柱壳上各位移变量和转角变量展开如下

$$C(\xi, \theta, t) = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N T_{i,qn}(\xi) f_{i,qn}(\theta, t) = F(\xi, \theta) \bar{q}(t) \quad (8)$$

式(8)中,  $C(\xi, \theta, t) = (u(\xi, \theta, t), v(\xi, \theta, t), w(\xi, \theta, t), \psi_\alpha(\xi, \theta, t), \psi_\beta(\xi, \theta, t))^T$ ,  $T_{i,qn}(\xi)$  为  $q$  阶第一类

$$f_{i,qn}(\theta, t) = (\cos(n\theta) \tilde{u}_{i,qn}(t) + \sin(n\theta) \bar{u}_{i,qn}(t), \cos(n\theta) \tilde{v}_{i,qn}(t) + \sin(n\theta) \bar{v}_{i,qn}(t),$$

Chebyshev 多项式,  $\cos(n\theta) \tilde{w}_{i,qn}(t) + \sin(n\theta) \bar{w}_{i,qn}(t), \cos(n\theta) \tilde{\psi}_{\alpha,i,qn}(t) + \sin(n\theta) \bar{\psi}_{\alpha,i,qn}(t),$ ,

$$\cos(n\theta) \tilde{\psi}_{\beta,i,qn}(t) + \sin(n\theta) \bar{\psi}_{\beta,i,qn}(t))^T$$

$$F(\xi, \theta) = (U(\xi, \theta), V(\xi, \theta), W(\xi, \theta), \Psi_\alpha(\xi, \theta), \Psi_\beta(\xi, \theta)), \quad \bar{q}(t) = (u(t), v(t), w(t), \psi_\alpha(t), \psi_\beta(t))^T.$$

其中  $n$  为周向波数;  $Q, N$  为多项式、级数的最高阶数;  $\tilde{u}_{qn}, \tilde{v}_{qn}, \tilde{w}_{qn}, \tilde{\psi}_{\alpha,qn}, \tilde{\psi}_{\beta,qn}, \bar{u}_{qn}, \bar{v}_{qn}, \bar{w}_{qn}, \bar{\psi}_{\alpha,qn}, \bar{\psi}_{\beta,qn}$  为广义坐标变量;  $U(\xi, \theta), V(\xi, \theta), W(\xi, \theta), \Psi_\alpha(\xi, \theta), \Psi_\beta(\xi, \theta)$  为允许函数向量;  $u, v, w, \psi_\alpha, \psi_\beta$  为广义坐标向量。对于反对称位移展开式, 需将 Fourier 级数正弦与余弦符号对调。

将式(4)~(8)代入式(3)中, 得到圆柱壳体的自由振动方程为

$$M\ddot{q} + [K - K_\lambda + K_\kappa]q = 0 \quad (9)$$

式(9)中,  $q$  为广义坐标向量,  $q = (u_1^T, v_1^T, w_1^T, \psi_{\alpha,1}^T, \psi_{\beta,1}^T, \dots, u_{N_0}^T, v_{N_0}^T, w_{N_0}^T, \psi_{\alpha,N_0}^T, \psi_{\beta,N_0}^T)$ ;  $M$  为广义质量矩阵;  $K$  为广义刚度矩阵;  $K_\lambda, K_\kappa$  为广义变分项和最小二乘加权残值引入的分区界面附加刚度矩阵。设  $q = \bar{q} \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $\bar{q}$  为广义坐标幅值, 代入(9)式, 得到

$$-\omega^2 M\bar{q} + [K - K_\lambda + K_\kappa]\bar{q} = 0 \quad (10)$$

式(10)若要有非零解, 则系数行列式  $\det(-\omega^2 M + K - K_\lambda + K_\kappa) = 0$ , 从而求得圆柱壳体自由振动的固有频率  $\omega$ 。

### 4. 自由振动算例

以不同边界条件下石墨烯增强泡沫金属圆柱壳为研究对象, 基于区域分解法分析其自由振动。其金

属基体材料参数：弹性模量  $E_M = 200 \text{ Gpa}$ ，质量密度  $\rho_M = 7850 \text{ kg/m}^3$ ，泊松比  $\mu_M = \frac{1}{3}$ ；圆柱壳长度  $L = 20 \text{ m}$ ，厚度  $h = 0.002 \text{ m}$ ，底面半径  $R = 1 \text{ m}$ 。石墨烯材料参数： $E_G = 1010 \text{ Gpa}$ ， $\rho_G = 1060 \text{ kg/m}^3$ ， $\mu_G = 0.186$ ； $l_G = 2.5 \text{ um}$ ， $h_G = 1.5 \text{ nm}$ ， $w_G = 1.5 \text{ um}$ ， $W_G = 1\%$ 。为方便画图进行力学分析，边界条件简化如下：四边简支，记为 S-S；四边固支，记为 C-C；四边自由，记为 F-F。

表 2 给出了简支边界条件下泡沫纯金属圆柱壳(长度  $L = 0.2 \text{ m}$ ，厚度  $h = 0.01 \text{ m}$ ，底面半径  $R = 1 \text{ m}$ ) 在不同孔隙系数以及不同周向波数下的无量纲固有频率，并与已有成果进行了比较，结果的一致性验证了区域分解算法的有效性和可靠性。

**Table 2.** The comparison of dimensionless natural frequencies of foam metal cylindrical shells with different pore coefficients ( $m = 1$ )

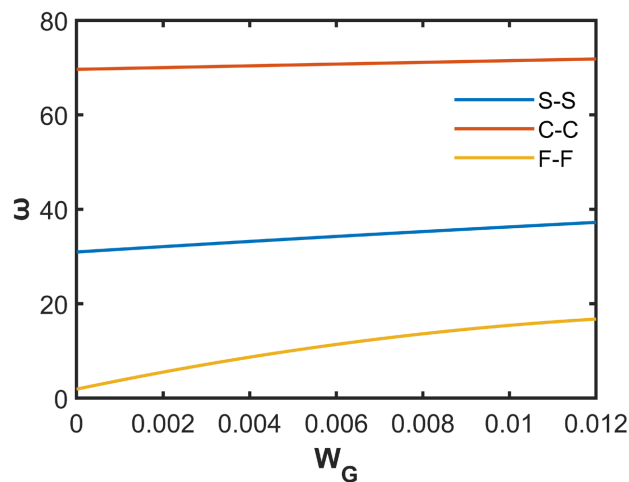
**表 2.** 不同孔隙系数的泡沫金属圆柱壳无量纲固有频率比较( $m = 1$ )

$e_0$	$n = 1$			$n = 2$			$n = 3$			$n = 4$		
	Wang et. [15]	A.Baghiani et. [16]	Present	Wang et. [15]	A.Baghiani et. [16]	Present	Wang et. [15]	A.Baghiani et. [16]	Present	Wang et. [15]	A.Baghiani et. [16]	Present
0	1.2429	1.2628	1.3242	1.2387	1.2506	1.3239	1.2325	1.2498	1.3214	1.2256	1.2411	1.3152
0.2	1.2155	1.2423	1.2803	1.2118	1.2244	1.2800	1.2064	1.2314	1.2779	1.2006	1.2264	1.2802
0.4	1.1893	1.2017	1.2325	1.1862	1.2168	1.2323	1.1818	1.2022	1.2304	1.1772	1.1915	1.2196
0.6	1.1677	1.1869	1.1806	1.1653	1.1730	1.1804	1.1620	1.1673	1.1789	1.1590	1.1695	1.1670

从图 2 可以看出，固定孔隙系数  $e_0 = 0.5$ ，不同边界条件下石墨烯增强圆柱壳体的固有频率随着石墨烯质量分数的增加而增加，这是因为石墨烯含量越高，圆柱壳体的刚度越大。

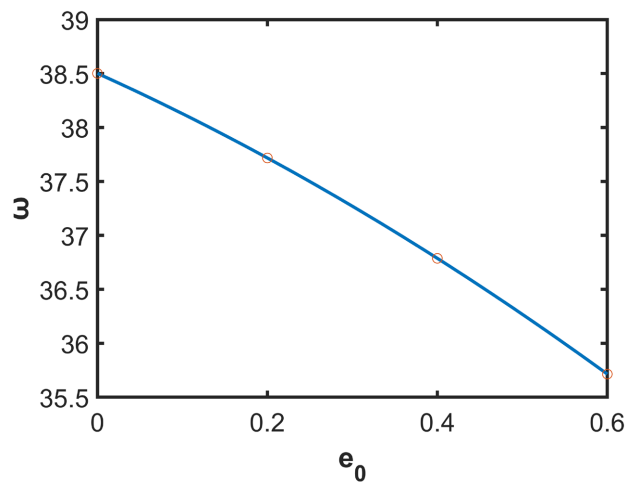
图 3 列出简支边界条件下石墨烯增强圆柱壳的固有频率与孔隙系数的关系，随着孔隙系数增大，固有频率呈下降趋势，这是因为孔隙系数越大，圆柱壳的刚度越低。

图 4 给出了简支边界条件下石墨烯长厚比、长宽比对圆柱壳固有频率的影响。从图上可以看出，在石墨烯长厚比一定的情形下，圆柱壳的无量纲固有频率随着长宽比的增加而减少；在石墨烯长宽比一定的情形下，随着石墨烯长厚比增加，固有频率呈上升趋势。

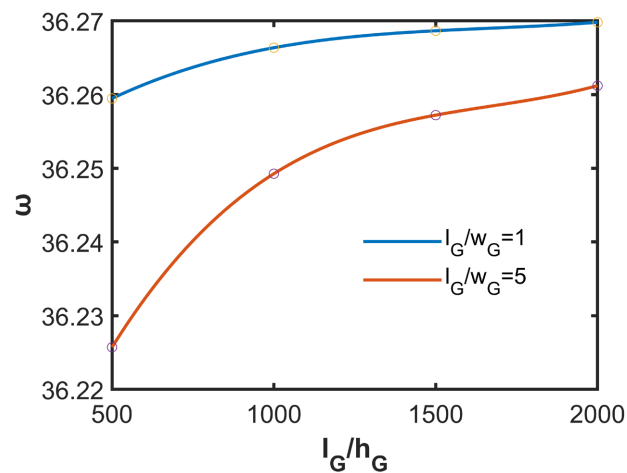


**Figure 2.** Variation of natural frequency of cylindrical shell with graphene mass fraction under different boundary conditions ( $e_0 = 0.5$ )

**图 2.** 不同边界条件下圆柱壳固有频率随石墨烯质量分数的变化( $e_0 = 0.5$ )



**Figure 3.** Variation of natural frequency of cylindrical shell with pore coefficient under simply supported boundary  
**图 3.** 简支边界下圆柱壳固有频率随孔隙系数的变化



**Figure 4.** Variation of natural frequency of cylindrical shell with length-to-thickness and length-to-width ratio of graphene under simply supported boundary ( $e_0 = 0.5$ )

**图 4.** 简支边界下圆柱壳固有频率随石墨烯长厚比、长宽比的变化( $e_0 = 0.5$ )

## 5. 结论

本文基于半解析的区域分解方法和能量守恒原理, 对不同边界条件下的石墨烯增强泡沫圆柱壳的自由振动进行建模与数值分析。数值实验结果表明, 本文所用的区域分解方法可靠高效, 且能适用于不同的边界条件。石墨烯增强圆柱壳体的无量纲固有频率随着孔隙系数的增大而减小, 随着质量分数的增加而增加; 且长厚比、孔隙系数和质量分数一定的情形下, 随着长宽比的增加呈单调递减趋势。数值结果的规律, 对不同边界石墨烯增强圆柱壳结构的振动分析具有一定的工程指导意义。

## 致 谢

感谢上海交通大学的瞿叶高教授在区域分解方法程序实现上的指导!

## 基金项目

国家自然科学基金项目(11772063)。

## 参考文献

- [1] Potts, J.R., Dreyer, D.R., Bielawski, C.W. and Ruoff, R.S. (2011) Graphene-Based Polymer Nanocomposites. *Polymer*, **52**, 5-25. <https://doi.org/10.1016/j.polymer.2010.11.042>
- [2] Ton-That, H.L., Nguyen, H. and Chau-Dinh, T. (2021) A Novel Quadrilateral Element for Analysis of Functionally Graded Porous Plates/Shells Reinforced by Graphene Platelets. *Archive of Applied Mechanics*, **91**, 2435-2466. <https://doi.org/10.1007/s00419-021-01893-6>
- [3] Dong, Y.H., Li, Y.H., Chen, D. and Yang, J. (2018) Vibration Characteristics of Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Cylindrical Shells with Spinning Motion. *Composites Part B*, **145**, 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.03.009>
- [4] Qin, B., Wang, Q.S., Zhong, R., Zhao, X. and Shuai, C. (2020) A Three-Dimensional Solution for Free Vibration of FGP-GPLRC Cylindrical Shells Resting on Elastic Foundations: A Comparative and Parametric Study. *International Journal of Mechanical Sciences*, **187**, Article ID: 105896. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105896>
- [5] Wang, Y.Q. and Liu, Y.F. (2019) Free Vibration and Buckling of Polymeric Shells Reinforced with 3D Graphene Foams. *Results in Physics*, **14**, Article ID: 102510. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102510>
- [6] 瞿叶高, 华宏星, 孟光, 谌勇, 龙新华. 基于区域分解的组合结构振动分析方法[J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(9): 1487-1492.
- [7] 瞿叶高, 华宏星, 谌勇, 龙新华, 孟光. 复合材料旋转壳自由振动分析的新方法[J]. 力学学报, 2013, 45(1): 139-143.
- [8] Qu, Y.G., Long, X.H., Wu, S.H. and Meng, G. (2013) A Unified Formulation for Vibration Analysis of Composite Laminated Shells of Revolution Including Shear Deformation and Rotary Inertia. *Compos Structures*, **98**, 169-191. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.001>
- [9] Qu, Y.G. and Meng, G. (2016) Prediction of Acoustic Radiation from Functionally Graded Shells of Revolution in Light and Heavy Fluids. *Journal of Sound and Vibration*, **376**, 112-130. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.04.023>
- [10] Kitipornchai, S., Chen, D. and Yang, J. (2017) Free Vibration and Elastic Buckling of Functionally Graded Porous Beams Reinforced by Graphene Platelets. *Materials & Design*, **116**, 656-665. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.12.061>
- [11] Wang, A.W., Chen, H.Y., Hao, Y.X. and Zhang, W. (2018) Vibration and Bending Behavior of Functionally Graded Nanocomposite Doubly-Curved Shallow Shells Reinforced by Graphene Nanoplatelets. *Results in Physics*, **9**, 550-559. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.02.062>
- [12] 高晟耀, 彭德炜, 唐宇航, 高聪, 李玉慧, 谷瑞钊. 基于一阶剪切变形理论的功能梯度球环振动特性[J]. 复合材料学报, 2020, 37(4): 935-943.
- [13] Lu, J.X. and Su, J. (2021) A Domain Decomposition Method for the Navier-Stokes Equations with Stochastic Input. *Computational and Applied Mathematics*, **40**, Article No. 160. <https://doi.org/10.1007/s40314-021-01547-x>
- [14] Qu, Y.G., Long, X.H., Yuan, G.Q. and Meng, G. (2013) A Unified Formulation for Vibration Analysis of Functionally Graded Shells of Revolution with Arbitrary Boundary Conditions. *Composites Part B: Engineering*, **50**, 381-402. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.028>
- [15] Wang, Y.Q., Ye, C. and Jean, W.Z. (2019) Nonlinear Vibration of Metal Foam Cylindrical Shells Reinforced with Graphene Platelets. *Aerospace Science and Technology*, **85**, 359-370. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.12.022>
- [16] Baghlani, A., Najafgholipour, M.A. and Khayat, M. (2021) The Influence of Mechanical Uncertainties on the Free Vibration of Functionally Graded Graphene-Reinforced Porous Nanocomposite Shells of Revolution. *Engineering Structures*, **228**, Article No. 111356. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111356>