

# Optimal Control and Adaptive Control for Permanent Magnet Synchronous Motor

Renming Wang, Hao Liu, Guibin Zhang, Lingyun Wang

College of Electrical Engineering and New Energy, Three Gorges University, Yichang Hubei  
Email: eermwang@ctgu.edu.cn

Received: Aug. 1<sup>st</sup>, 2017; accepted: Aug. 15<sup>th</sup>, 2017; published: Aug. 22<sup>nd</sup>, 2017

---

## Abstract

In this paper, the chaotic behavior of a permanent magnet synchronous motor (PMSM) with non-uniformity-air-gap is analyzed. Based on Pontryagin minimum principle, an optimal controller is developed to stabilize the chaotic system. Otherwise, an adaptive controller is designed by such PMSM system with multi unknown parameters according to Lyapunov stability theory and an adaptive regulating law of unknown parameters estimation is given to estimate the parameters values. Finally, numerical simulation based on MATLAB show that the effectiveness of our method.

## Keywords

Permanent Magnet Synchronous Motor, Chaos System, Optimal Control, Adaptive Control

---

# 永磁同步电机的最优控制和自适应控制

王仁明, 刘 豪, 张葵滨, 王凌云

三峡大学电气与新能源学院, 湖北 宜昌  
Email: eermwang@ctgu.edu.cn

收稿日期: 2017年8月1日; 录用日期: 2017年8月15日; 发布日期: 2017年8月22日

---

## 摘 要

本文针对一类非均匀气隙的永磁同步电机(PMSM)系统模型, 分析了其混沌行为。基于Pontryagin极小值原理, 设计了最优控制器。此外, 根据Lyapunov稳定性理论, 设计了PMSM系统的自适应控制器, 给出了多参数未知的PMSM参数估计的自适应律。最后, 基于MATLAB的数值仿真证明了本文方法的有效性。

## 关键词

永磁同步电机, 混沌系统, 最优控制, 自适应控制

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

永磁同步电机(PMSM)因为其具有高功率密度、大转矩惯量比和高效率,在当今电力传动系统中得到了广泛的应用[1]。但是由于PMSM的非线性强耦合特性加上各种非线性因素的干扰使得其控制器设计十分困难,并且其在一些特定的参数和工作条件下会呈现混沌行为[2]。针对这些问题国内外专家将一些非线性控制方法应用到PMSM的控制上,如:自适应控制[3],状态反馈线性化控制[4][5],变结构控制[6],模型预测控制[7],反演控制[8]以及最优控制[9]等等。其中自适应控制因为易于和其他控制方法相结合,且便于处理不确定参数,而最优控制以其和实际工程联系紧密从而受到广泛的重视。但是在使用自适应控制时,现有研究较多的仅对于含有一个或两个不确定参数PMSM模型进行控制器设计,对于多参数不确定的PMSM系统研究较少;而对于最优控制,在设计控制器时则较少考虑当系统处于混沌行为的情况。

本文首先分析了PMSM的数学模型,以及其系统的动态行为,利用分岔图和相图分析模型的混沌行为。然后选取参数使系统处于混沌状态并设计最优控制器;对具有三参数于不确定且处于混沌状态下的PMSM系统设计自适应控制器并用李雅普洛夫方法证明了其稳定性。最后采用数值仿真的方法证明了两种方法的正确性。

## 2. 永磁同步电机的数学模型及分析

在转子磁场定向坐标系(d-q坐标系)中,PMSM的电压平衡方程如下[10]

$$\begin{cases} u_d = R_s i_d + \dot{\psi}_d - n_p \omega_r \psi_q \\ u_q = R_s i_q + \dot{\psi}_q - n_p \omega_r \psi_d \end{cases} \quad (1)$$

转矩平衡方程如下:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{T_e}{J} - \frac{B}{J} \omega_r - \frac{T_l}{J} \quad (2)$$

其中 $i_d$ ,  $i_q$ 和 $u_d$ ,  $u_q$ 分别是定子电流矢量和定子电压矢量的dq分量; $R_s$ 是定子电阻; $n_p$ 是极对数; $J$ 是转子惯量; $B$ 是阻尼系数; $\omega_r$ 是转子角速度; $T_l$ 是负载转矩; $\psi_d \psi_q$ 是磁链的dq分量; $T_e$ 是电机输出转矩; $\phi$ 是永磁体的磁通量。且有:

$$\begin{aligned} \psi_d &= L_d i_d + \phi \\ \psi_q &= L_q i_q \\ T_e &= \frac{3n_p}{2} [\phi i_q + (L_d - L_q) i_d i_q] \end{aligned} \quad (3)$$

由(1)(2)(3)可得如下PMSM的状态方程:

$$\begin{cases} \frac{di_q}{dt} = \frac{1}{L_q} [-R_s i_q - n_p \omega_r (L_d i_d + \phi) + u_d] \\ \frac{di_d}{dt} = \frac{1}{L_d} (-R_s i_d + n_p L_q \omega_r i_q + u_d) \\ \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{1}{J} \{ n_p [\phi i_q + (L_d - L_q) i_d i_q] - B \omega_r - T_L \} \end{cases} \quad (4)$$

当  $L_d = L_q$  时方程所描述的是均匀气隙的 PMSM, 否则就是非均匀气隙的 PMSM。经适当变换, 状态方程(4)可以写成如下形式

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2 x_3 - x_3 + v_q \\ \tau_2 \frac{dx_2}{dt} = x_1 x_3 - x_2 + v_d \\ \tau_3 \frac{dx_3}{dt} = \rho x_1 x_2 + \sigma x_1 - \eta x_3 - \tilde{T}_L \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{L_q}{\phi \sqrt{\delta}} i_q, & x_2 &= \frac{L_d}{\phi} i_d, & x_3 &= \frac{n_p L_q}{R_s \sqrt{\delta}} \omega_r, \\ v_d &= \frac{L_q}{R_s \phi \delta} u_d, & v_q &= \frac{L_d}{R_s \phi \delta} u_q, \\ \tilde{T}_L &= \frac{n_p L_q}{\phi^2 \sqrt{\delta}} T_L, & \sigma &= n_p^2, & \delta &= \frac{L_q}{L_d}, \\ \rho &= (1 - \delta) n_p^2, & \eta &= \frac{R_s b}{\phi^2}, \end{aligned}$$

上述的非均匀气隙 PMSM 模型(5)是一个非线性系统, 在一些特定参数下会出现复杂的混沌行为[10][11]。

系统参数取值为  $\tau_1 = 6.45$ ,  $\tau_2 = 7.125$ ,  $\tau_3 = 1$ ,  $v_d = -12.70$ ,  $v_q = 2.34$ ,  $T_L = 0.525$ ,  $\rho = 1.516$ ,  $\sigma = 16$  时, 以参数  $\eta$  为例进行混沌行为分析, 当该参数变化时, 系统的状态变量分岔图如图 1 所示。

如图可见当参数  $\eta < 2.5$  系统的动态行为呈现明显的混沌状态, 当取参数  $\eta = 1.8$  时, 系统的相图如图 2 所示, 为了表示本文方法对混沌系统的有效性, 之后的数值仿真均在 PMSM 此混沌状态下进行分析。

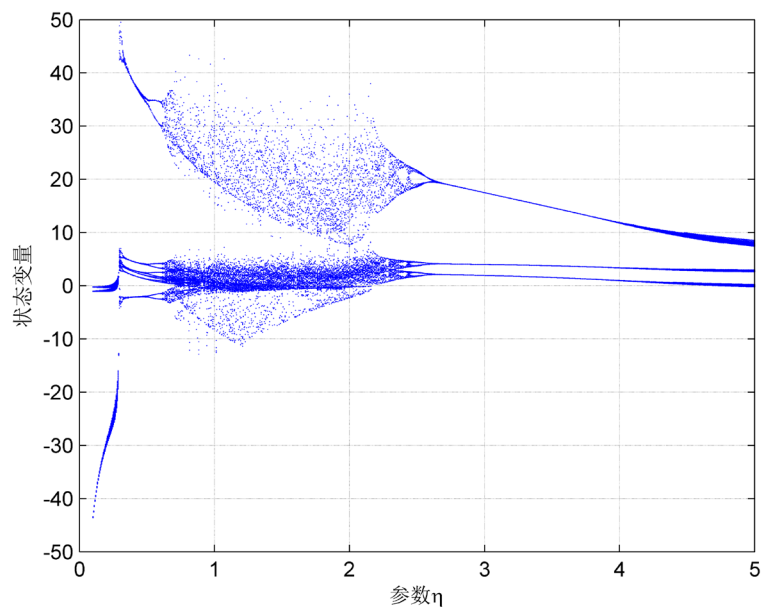
永磁同步电机的平衡点可以通过解如下方程来得到[12]

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 x_3 - x_3 = 0 \\ x_1 x_3 - x_2 = 0 \\ \rho x_1 x_2 + \sigma x_1 - \eta x_3 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

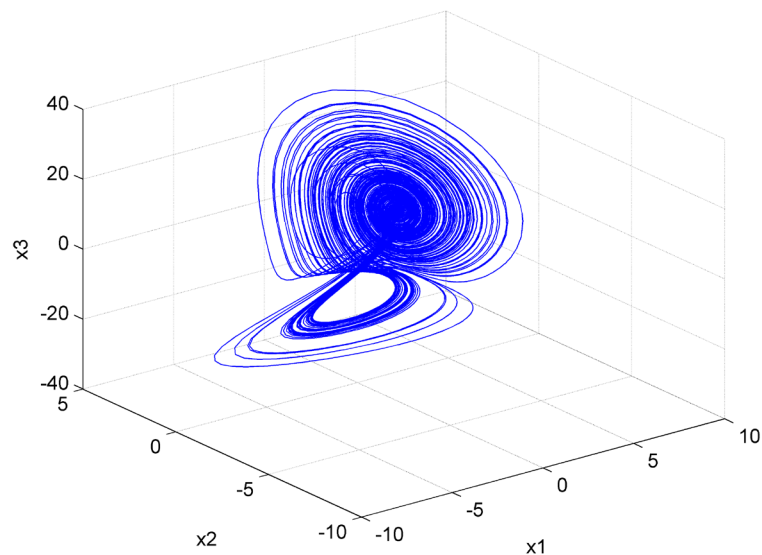
即可视为电机在断电无负载情况下运行, 其中参数的取值为

$$v_q = 2.34, \quad v_d = -12.70, \quad \tilde{T}_L = 0.525, \quad \rho = 1.516, \quad \sigma = 16, \quad \eta = 1.8$$

解得如下平衡点



**Figure 1.** PMSM bifurcation diagram  
**图 1.** PMSM 分岔图



**Figure 2.** State phase diagram when the PHM is in a chaotic state  
**图 2.** PMSM 处于混沌状态时的状态相图

$$\begin{aligned}
 E1 &= [0,0,0] \\
 E2 &= [9.916 * i, -10.43, 1.052 * i] \\
 E3 &= [0.3766 * i, -1.126, 2.99 * i] \\
 E4 &= [-9.916 * i, -10.43, -1.052 * i] \\
 E5 &= [-0.3766 * i, -1.126, -2.99 * i]
 \end{aligned}$$

因为其余平衡点均为虚数点，且平衡点 E1 又具有较强的工程现实意义，因此我们主要对平衡点 E1 进行分析。

### 3. 非均匀气隙 PMSM 的最优控制

在系统参数已知的时候, 使用 Pontryagin 极小值原理(PMP)可以将 PMSM 控制到其平衡点。为了对 PMSM 使用最优控制, 将控制器  $U_1, U_2, U_3$  加入系统方程如下所示

$$\begin{cases} \tau_1 \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 x_3 - x_3 + v_q + U_1 \\ \tau_2 \dot{x}_2 = x_1 x_3 - x_2 + v_d + U_2 \\ \tau_3 \dot{x}_3 = \rho x_1 x_2 + \sigma x_1 - \eta x_3 - \tilde{T}_L + U_3 \end{cases} \quad (7)$$

在给定的有限时间  $[0, t_f]$  内, 将其系统变量控制到平衡点, 其边界条件如下

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1(0), & x_1(t_f) &= \bar{x}_1 \\ x_2(0) &= x_2(0), & x_2(t_f) &= \bar{x}_2 \\ x_3(0) &= x_3(0), & x_3(t_f) &= \bar{x}_3 \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  即为系统平衡点, 最优性能指标函数定义如下

$$\begin{aligned} \min J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \alpha_1 (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \alpha_2 (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \alpha_3 (x_3 - \bar{x}_3)^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta_1 U_1^2 + \beta_2 U_2^2 + \beta_3 U_3^2 \right\} dt \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\alpha, \beta$  均为正常数。使用 Pontryagin 极小值原理(PMP), 相对应的哈密顿函数可以写成

$$\begin{aligned} H &= \lambda_1 \left( \frac{1}{\tau_1} (-x_1 - x_2 x_3 - x_3 + v_q + U_1) \right) + \lambda_2 \left( \frac{1}{\tau_2} (x_1 x_3 - x_2 + v_d + U_2) \right) \\ &\quad + \lambda_3 \left( \frac{1}{\tau_3} (\rho x_1 x_2 + \sigma x_1 - \eta x_3 - \tilde{T}_L + U_3) \right) - \frac{1}{2} (\beta_1 U_1^2 + \beta_2 U_2^2 + \beta_3 U_3^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\alpha_1 (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \alpha_2 (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \alpha_3 (x_3 - \bar{x}_3)^2) \end{aligned} \quad (10)$$

哈密顿协态方程如下

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} \end{cases} \quad (11)$$

从方程(10) (11)可得

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \alpha_1 (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \frac{\lambda_1}{\tau_1} - \frac{\lambda_2}{\tau_2} x_3 - \frac{\lambda_3}{\tau_3} (\rho x_2 + \sigma) \\ \dot{\lambda}_2 = \alpha_2 (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \frac{\lambda_1}{\tau_1} x_3 + \frac{\lambda_2}{\tau_2} - \frac{\lambda_3}{\tau_3} \rho x_1 \\ \dot{\lambda}_3 = \alpha_3 (x_3 - \bar{x}_3)^2 + \frac{\lambda_1}{\tau_1} (x_2 + 1) - \frac{\lambda_2}{\tau_2} + \frac{\lambda_3}{\tau_3} \eta \end{cases} \quad (12)$$

系统的控制方程为  $\frac{\partial H}{\partial U_i} = 0 (i=1,2,3)$ ，由此可得控制量为

$$U_i = \frac{\lambda_i}{\beta_i} (i=1,2,3) \tag{13}$$

由方程(12) (13)即可得到使得(7)在  $[t_0, t_f]$  间满足性能函数(9)最小化的轨线。

#### 4. 非均匀气隙 PMSM 的自适应控制

针对方程(5)中的参数  $\rho, \sigma, \eta$  在许多情况下都是未知参数，可以使用自适应控制的方法来使得 PMSM 达到平衡点。加入自适应控制器后的模型如下所示：

$$\begin{cases} \tau_1 \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 x_3 - x_3 + v_q + U_1 \\ \tau_2 \dot{x}_2 = x_1 x_3 - x_2 + v_d + U_2 \\ \tau_3 \dot{x}_3 = \rho x_1 x_2 + \sigma x_1 - \eta x_3 - \tilde{T}_L + U_3 \end{cases} \tag{14}$$

和方程(7)类似，其中  $U_1, U_2, U_3$  均为待设计的自适应控制器， $\rho, \sigma, \eta$  为未知参数。设系统的平衡点为  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ，则控制律可写为如下形式：

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\tau_1} (x_1 + x_2 x_3 + x_3 - v_q - l_1 (x_1 - \bar{x}_1)) \\ U_2 &= \frac{1}{\tau_2} (x_2 - x_1 x_3 - v_d - l_2 (x_2 - \bar{x}_2)) \\ U_3 &= \frac{1}{\tau_3} (-\hat{\rho} x_1 x_2 - \hat{\sigma} x_1 + \hat{\eta} x_3 + \tilde{T}_L - l_3 (x_3 - \bar{x}_3)) \end{aligned} \tag{15}$$

自适应律为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}} &= -(x_3 - \bar{x}_3) x_1 x_2 - l_4 (\rho_1 - \hat{\rho}) \\ \dot{\hat{\sigma}} &= -(x_3 - \bar{x}_3) x_1 - l_5 (\sigma_1 - \hat{\sigma}) \\ \dot{\hat{\eta}} &= -(x_3 - \bar{x}_3) x_3 - l_6 (\eta_1 - \hat{\eta}) \end{aligned} \tag{16}$$

在上述两个方程中  $l_i (i=1,2,3,4,5,6)$  为正常数， $\rho_1, \sigma_1, \eta_1$  为未知常数的估计值， $\hat{\rho}, \hat{\sigma}, \hat{\eta}$  是未知常数的自适应计算值。由方程(14) (15) (16)即可通过自适应控制将参数未知的 PMSM 模型(5)控制到平衡点。

下面证明其稳定性，定义如下所示的李雅普洛夫函数

$$V = \frac{1}{2} [\tau_1 (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \tau_2 (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \tau_3 (x_3 - \bar{x}_3)^2 + \tilde{\rho}^2 + \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\eta}^2] \tag{17}$$

其中  $\tilde{\rho}, \tilde{\sigma}, \tilde{\eta}$  为未知参数估计值和自适应计算值之差，如下所示

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho_1 - \hat{\rho} \\ \tilde{\sigma} &= \sigma_1 - \hat{\sigma} \\ \tilde{\eta} &= \eta_1 - \hat{\eta} \end{aligned}$$

方程(17)所示的李雅普洛夫函数的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tau_1 (x_1 - \bar{x}_1) \dot{x}_1 + \tau_2 (x_2 - \bar{x}_2) \dot{x}_2 + \tau_3 (x_3 - \bar{x}_3) \dot{x}_3 + \tilde{\rho} \dot{\tilde{\rho}} + \tilde{\sigma} \dot{\tilde{\sigma}} + \tilde{\eta} \dot{\tilde{\eta}} \\ &= \tau_1 (x_1 - \bar{x}_1) \dot{x}_1 + \tau_2 (x_2 - \bar{x}_2) \dot{x}_2 + \tau_3 (x_3 - \bar{x}_3) \dot{x}_3 + \tilde{\rho} \dot{\tilde{\rho}} + \tilde{\sigma} \dot{\tilde{\sigma}} + \tilde{\eta} \dot{\tilde{\eta}} \end{aligned} \tag{18}$$

将方程(14) (15) (16)代入到(18)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -l_1(x_1 - \bar{x}_1)^2 - l_2(x_2 - \bar{x}_2)^2 - l_3(x_3 - \bar{x}_3)^2 \\ & + (x_3 - \bar{x}_3)(\tilde{\rho}x_1x_2 + \tilde{\sigma}x_1 - \tilde{\eta}x_3) + \tilde{\rho}\dot{\rho} + \tilde{\sigma}\dot{\sigma} + \tilde{\eta}\dot{\eta} \end{aligned} \quad (19)$$

将(16)代入可得

$$\dot{V} = -l_1(x_1 - \bar{x}_1)^2 - l_2(x_2 - \bar{x}_2)^2 - l_3(x_3 - \bar{x}_3)^2 - l_4\tilde{\rho}^2 - l_5\tilde{\sigma}^2 - l_6\tilde{\eta}^2 \quad (20)$$

很明显  $\dot{V} \leq 0$  因此该方法的稳定性得以证明。当  $t \rightarrow \infty$  时, 状态变量稳定至平衡点, 未知参数误差  $\tilde{\rho}, \tilde{\sigma}, \tilde{\eta}$  收敛至零。

## 5. 数值仿真

为验证本文控制方法的有效性, 对上述两种控制方法进行数值仿真。首先对模型(5)采用最优控制方法进行仿真, 控制器采用方程(13)中所示的最优控制器。在时间  $[0, 6]$  内系统状态的初始值和最终值分别取为

$$\begin{aligned} x_1(0) = 5, x_2(0) = 5, x_3(0) = 5 \\ x_1(6) = 0, x_2(6) = 0, x_3(6) = 0 \end{aligned}$$

系统各参数取值分别为

$$\begin{aligned} \tau_1 = 6.45, \tau_2 = 7.125, \tau_3 = 1, \\ v_d = -12.70, v_q = 2.34, T_L = 0.525, \\ \rho = 1.516, \sigma = 16, \eta = 2.8 \end{aligned}$$

正常数取值  $\alpha_i = 10, \beta_i = 5, (i=1, 2, 3)$ , 仿真结果如图 3 和图 4 所示。

可以看到在控制器作用下状态变量沿着满足性能指标的最优轨迹收敛到平衡点。

然后我们对模型(5)在采用自适应控制的情况下进行仿真, 系统参数的取值与上面一样, 但这里的参数  $\rho, \sigma, \eta$  均为未知参数, 因此我们将未知参数的估计值分别取为  $\rho_1 = 2, \sigma_1 = 20, \eta_1 = 2$ , 系统的初始值取为  $[5, 5, 5]$ 。在控制律(15)和自适应律(16)下对系统(14)进行仿真, 其中  $l_i = 1, (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$  仿真结果见图 5 和图 6。

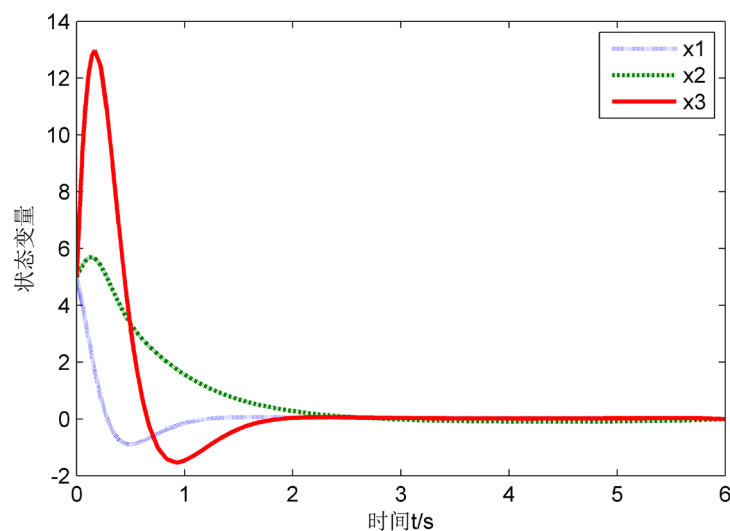


Figure 3. Optimal control state variable graph  
图 3. 最优控制状态变量图

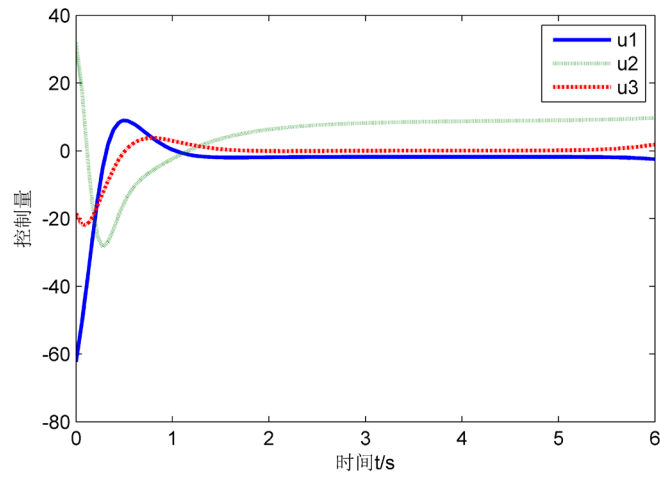


Figure 4. Control amount chart of optimal control

图 4. 最优控制控制量图

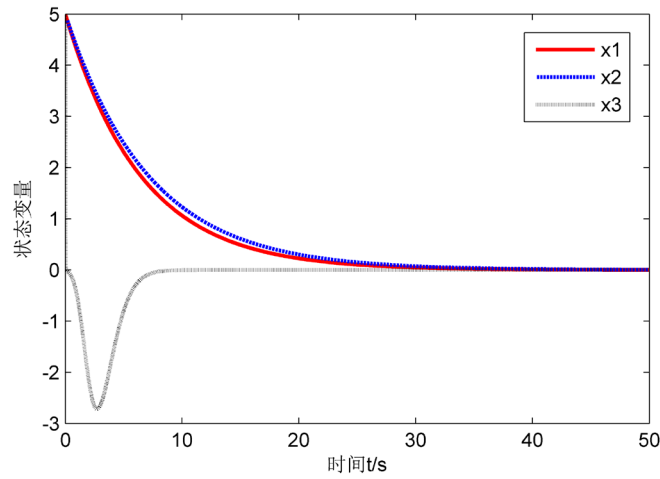


Figure 5. Optimal control state variable graph

图 5. 最优控制状态变量图

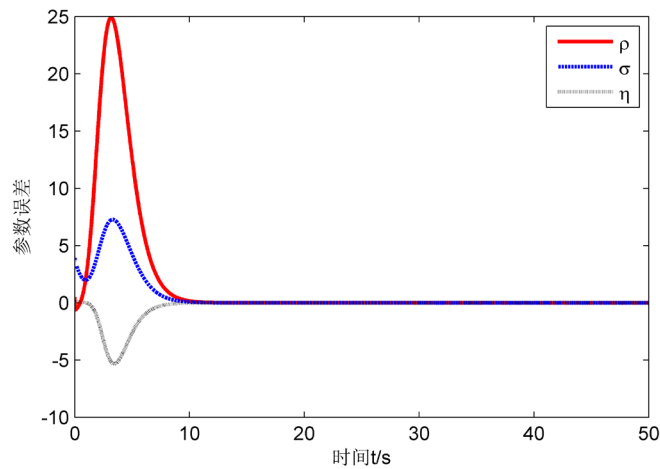


Figure 6. Optimal control parameter error plot

图 6. 最优控制参数误差图



如图可以看到在控制器的作用下, 系统状态变量迅速趋于平衡点, 且系统未知参数和自适应律解出的参数之间的误差也逐渐趋于零点, 说明该控制方法对多未知参数的 PMSM 系统可以达到期望的控制效果。

## 6. 结论

本文给出非均匀气隙永磁同步电机混沌系统的一种最优控制和一种自适应控制的方法。在对永磁同步电机混沌行为进行分析的基础上, 采用 Pontryagin 极小值原理设计了系统处于混沌情况下的最优控制控制器, 采用 Lyapunov 方法设计多参数未知的 PMSM 系统的自适应控制器并证明其稳定性, 最后的 MATLAB 数值仿真证明了方法的有效性。

## 基金项目

国家自然科学基金项目资助(51407104)。

## 参考文献 (References)

- [1] 郑泽东, 李永东. 永磁同步电机伺服控制系统的研究现状及发展[J]. 伺服控制, 2008(12): 20-22.
- [2] 薛薇, 郭彦岭, 陈增强. 永磁同步电机的混沌分析及其电路实现[J]. 物理学报, 2009, 58(12): 8146-8151.
- [3] Hu, J., Qiu, Y. and Lu, H. (2016) Adaptive Robust Nonlinear Feedback Control of Chaos in PMSM System with Modeling Uncertainty. *Applied Mathematical Modelling*, **40**, 8265-8275.
- [4] 张涛, 蒋静坪, 张国宏. 交流永磁同步电机伺服系统的线性化控制[J]. 中国电机工程学报, 2001, 21(6): 40-43.
- [5] 刘小河, 王鹤华. 基于 SVPWM 永磁同步电机反馈线性化控制[J]. 现代电子技术, 2013(12): 159-162.
- [6] 杜方. 交流永磁同步电机变结构控制器设计与研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2013.
- [7] Formentini, A., Trentin, A., Marchesoni, M., et al. (2015) Speed Finite Control Set Model Predictive Control of a PMSM Fed by Matrix Converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **62**, 6786-6796.
- [8] George, R. and Mathew, A.S. (2015) Speed Control of PMSM using Backstepping Method. *International Journal of Engineering & Technical Research*, **4**.
- [9] Lemmens, J., Vanassche, P. and Driesen, J. (2014) PMSM Drive Current and Voltage Limiting as a Constraint Optimal Control Problem. *IEEE Journal of Emerging & Selected Topics in Power Electronics*, **3**, 1.
- [10] 张兴华, 丁守刚. 非均匀气隙永磁同步电机的自适应混沌同步[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(6): 661-664.
- [11] 周群利. 永磁同步电动机混沌系统的控制研究[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2015(4): 545-547.
- [12] 薛薇, 郭彦岭, 陈增强. 永磁同步电机的混沌分析及其电路实现[J]. 物理学报, 2009, 58(12): 8146-8151.

期刊投稿者将享受如下服务:

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [jee@hanspub.org](mailto:jee@hanspub.org)