

Progress of Max-Flow Method in Image Denoising and Segmentation

Xiaohuan Wang, Xiaoyi Yang, Jinping Song

School of Mathematics and Information Sciences, Henan University, Kaifeng
Email: wangxiaohuan861113@163.com, yxy@henu.edu.cn, songjp@henu.edu.cn

Received: Jan. 20th, 2013; revised: Feb. 2nd, 2013; accepted: Mar. 14th, 2013

Copyright © 2013 Xiaohuan Wang et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: In recent years, image denoising and segmentation model based on energy functional received widely attention. Max-flow method is one of the most powerful tools to solve this kind of model. Discrete and continuous max-flow methods are introduced, they both include the basic steps in which energy functional minimization problem transformed to max-flow problem, and the solutions of the corresponding max-flow problem are also reviewed. In addition, the development of max-flow method are also discussed.

Keywords: Max-Flow; Image Denoising; Image Segmentation

最大流方法在图像去噪和分割中的研究进展

王小欢, 杨晓艺, 宋锦萍

河南大学数学与信息科学学院, 开封
Email: wangxiaohuan861113@163.com, yxy@henu.edu.cn, songjp@henu.edu.cn

收稿日期: 2013年1月20日; 修回日期: 2013年2月2日; 录用日期: 2013年3月14日

摘要: 近年来, 基于能量泛函的图像去噪和分割模型得到广泛的关注, 解决这类模型的有效工具之一是最大流方法。本文分别介绍离散的和连续的最大流方法, 包括能量泛函最小化问题转化为最大流问题的基本步骤, 以及相应最大流问题的求解方法, 并展望最大流方法的发展前景。

关键词: 最大流; 图像去噪; 图像分割

1. 引言

最大流方法是基于图论的一种全局最优方法, 该方法应用于图像去噪或分割问题的主要思路^[1]是: 将图像映射为加权图, 把图像像素看作图的顶点, 邻接像素之间的关系看作图的边, 邻接像素之间的相似性看作边的权值, 根据边的权值设计能量函数, 通过最小化能量函数完成对图的分割, 从而实现图像的去噪或分割。该方法的优点在于: 1) 图论是一门研究比较早而且已经发展成熟的学科, 具有较好的数学基础; 2) 图像和图之间非常类似, 在图像映射为图之后, 可

利用图论中的各种理论和数学工具进行分析和处理。

3) 最大流方法能够求解非凸模型的全局最优解, 克服多数方法只能找到逼近解的缺点。

最大流方法解决图像去噪或分割中能量泛函最小化模型的一般框架^[2]: 1) 根据能量最小化模型构造能量函数, 从而将原问题转化为能量函数最小化问题; 2) 根据图像构造图, 使能量与图论中图的割相对应, 从而将能量最小化问题转化为图论中图的最小割问题; 3) 根据最大流与最小割之间的等价关系(这种等价关系又称为最大流/最小割原理), 将图的最小割

问题转化为最大流问题；4) 通过求解最大流问题，求得图的最小割，从而获得图像去噪或分割问题的解。

最大流方法有多种分类方法，包括连续性和离散性方法、确定性和随机性方法、全局和局部方法等。本文分别介绍离散的最大流方法与连续的最大流方法的步骤及其主要应用的模型，并对其特点进行分析。

2. 离散的最大流方法

Greig 等于 20 世纪 80 年代末首次将最大流理论应用于图像处理领域^[3]，同时他最早提出使用组合优化理论中的最小割/最大流算法来最小化计算机视觉中的能量函数。20 世纪 90 年代末 Boykov 等^[4]将该理论应用到图像分割领域，提出了基于图割的交互式图像分割方法。Gurholt 等在^[5]中，在基于 Mumford-shah 模型进行图像分割时采用水平集图割最小化方法。与传统求解欧拉 - 拉格朗日方程的方法相比，这种方法的优势在于不要求解任何偏微分方程，而仅仅需要在一个特别设定的图中计算出最小割。算法对于初值非常稳定并且几乎是无参数的，能够快速解决像素点较多的分割问题。Bae 等人在^[6]中用能量最小化的图割方法，这种方法仅仅是将去噪问题转化为一组简单的图表示问题，其与能量函数的梯度流相联系，并且收敛于一个最小点。这种方法能够保持平滑的视觉效果且能够保存图像中的尖锐特征。

2.1. 基于能量泛函的图像去噪模型

图像去噪的一般模型为

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx \quad (1)$$

其中 u 表示理想图像, f 表示观测图像, $\lambda > 0$, $BV(\Omega)$ 为 Banach 空间。其中的范数定义如下:

$$\|u\| := \int_{\Omega} |u| dx + |Du|(\Omega)$$

函数 J 称为是离散的全变分，如果对于任意的非负凸函数 $J: \mathbb{R}^M \rightarrow [0, \infty)$ 满足离散的共面积公式:

$$J(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(X^{\{u \geq s\}}) ds \quad (2)$$

其中 \mathbb{R}^M 表示 M 维向量空间, s 是积分变量。

$X^{\{u \geq s\}} \in \{0, 1\}^M$ 表示向量, 且满足:

$$\begin{cases} X_i^{\{u \geq s\}} = 0, & \text{if } u_i \leq s \\ X_i^{\{u \geq s\}} = 1, & \text{if } u_i > s \end{cases}$$

定理 1 若 J 是一个离散的全变分及 $f \in \mathbb{R}^M$, 假设 $u \in \mathbb{R}^M$ 是

$$\min_{u \in \mathbb{R}^M} \lambda J(u) + \frac{1}{2} \|u - f\|^2 \quad (3)$$

的唯一解。则对于 $s > 0$, 超水平集 $E_s = \{u \geq s\}$ 和 $E_s = \{u > s\}$ 的特征函数分别是

$$\min_{\theta \in \{0, 1\}^M} \lambda J(\theta) + \sum_{i=1}^M \theta_i (s - f_i) \quad (4)$$

的最大解与最小解。

由定理 1 知, 求解问题(1)等价于求解问题(4)。

2.2. 图的构造及割集容量

如果(4)式中的 $J(\theta)$ 仅仅具有两两的相互作用, (4)式为 Pichard 等在^[7]中提出的二元伊辛能量, 一般形式为

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} |\theta_i - \theta_j| + \sum_i \beta_i \theta_i \quad (5)$$

其中 $\alpha_{i,j} \geq 0$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $\theta_i \in \{0, 1\}$ 。

这个模型能够在图上表示且可以由最大流算法进行最小化。首先令 $\beta_i = s - f_i$, 及

$$\begin{cases} \alpha_{i,j} = \lambda, & i, j \text{ 相邻} \\ \alpha_{i,j} = 0, & i, j \text{ 不相邻} \end{cases}$$

构造有向权图 $G = (V, \varepsilon)$ 如下:

1) 点集合 $V = \{1, \dots, M\} \cup \{S\} \cup \{T\}$, 结点 S 和 T 分为“源”和“汇”。

2) 有向边 (S, i) , (i, T) 和 (i, j) , 其中 $1 \leq i, j \leq M$ 。它们的容量分别设为:

$$\begin{cases} c(S, i) = \beta_i^-, & i = 1, \dots, M \\ c(i, T) = \beta_i^+, & i = 1, \dots, M \\ c(i, j) = \alpha_{i,j}, & 1 \leq i, j \leq M \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\beta_i^+ = \max\{0, \beta_i\}$, $\beta_i^- = \max\{0, -\beta_i\}$, $\beta_i = \beta_i^+ - \beta_i^-$ 。

3) 边集合 ε 表示具有非零容量的边集。

在图上定义一个“割”将 ε 分成两个集合 D 和 E , 并且 $S \in D$ 和 $T \in E$, (D, E) 为割集。割集容量指满足始点在源边, 终点在汇边的所有边的容量之和:

$$C(D, E) = \sum_{\substack{(\mu, \nu) \in \varepsilon \\ \mu \in D, \nu \in E}} c(\mu, \nu)$$

然后, 若令 $\theta \in \{0, 1\}^M$ 是 $S \cap \{1, \dots, M\}$ 的特征函数, 则最小割问题为:

$$\begin{aligned} C(D, E) &= \sum_{i=1}^M (1 - \theta_i) \beta_i^- + \theta_i \beta_i^+ + \sum_{i,j=1}^M \alpha_{i,j} (\theta_i - \theta_j)^+ \\ &= \sum_{i,j=1}^M \alpha_{i,j} (\theta_i - \theta_j)^+ + \sum_{i=1}^M \theta_i \beta_i^+ + \sum_{i=1}^M \beta_i^- \end{aligned}$$

如果 $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$, 上式与(5)式仅仅相差一个常数。

基于上述分析, 图像去噪问题(1)可转化为问题(5), 而求解问题(5)等价于求解最小割问题(7), 由最大流算法可以对最小割问题进行求解, 进而得到图像去噪问题的解。

2.3. 离散的最大流算法

离散的最大流算法主要包括两大类^[8]: 推进重标记算法和增广路径算法。

推进重标记算法^[9,10]沿着非饱和边给一个到汇的距离的低界估计。然后, 面向具有到汇最小估计距离的顶点来推进剩余的流。随着推进操作, 边逐渐饱和, 距离逐渐增加。该算法易于并行实现, 通常采用 GPU 加速实现来提高效率。

Ford 和 Fulkerson 的标号算法是基于增广路径的方法^[11], 通过标号不断生长一棵树, 直到找不到关于可行流的增广路径为止。这种算法的计算复杂性和网络的节点数或边数无关, 而与边上的权值有关。为了避免求最大流时计算复杂度依赖于边的权值大小的缺点, Dinic 设计了一种分层算法^[12]。为了提高最大流算法的效率, Boykov 等提出了基于增广路径的新算法^[13], 该算法在图像去噪和分割的应用非常广泛。其核心是建立两棵搜索树 S 和 T , S 以源点 s 为根, T 以汇点 t 为根。树 S 中所有父结点到子结点的边都是不饱和的。树 S 中的结点分为主动结点和被动结点, 主动结点可以通过从树 T 获得新的后代来使得搜索树“生长”, 被动结点不能生长。算法重复以下三个阶段: 1) 生长阶段: 搜索树 S 、 T 生长, 直到找到汇点; 2) 扩展阶段: 扩展路径, 搜索树变成森林; 3) 收养阶段: 收养孤立结点, 恢复搜索树。

离散的最大流方法的一个缺点是存在网格偏倚。两两的相互作用位势比其他方法惩罚的空间方向多,

这会在最终的结果中产生不需要的视觉效应, 这种情况通常被称为度量误差。而减少这样的视觉效应会导致额外的存储和计算负担^[14]。另一个缺点是离散的最大流算法一般不能并行执行。

3. 连续的最大流方法

3.1. 连续的最大流方法的应用与发展

近些年来, 连续的图割由于其度量误差小, 而且可以并行执行的优点受到了广泛的关注。其中 G. Strang 在[15,16]最先在连续的区域中研究了最大流/最小割相关的优化问题。其中在[15]中研究了在平面域 Ω 里由向量场 $\sigma(x, y)$ 来描述的网络流。其中的容量约束条件类似于离散的网络流中的容量约束条件, 为 $|\sigma| \leq c(x, y)$, 并且源和汇在边界上满足 $\sigma \cdot n = \lambda f$, 在内部满足 $-\text{div} \sigma = \lambda F$, G. Strang 在其中证明了最大的 λ (最大流)是由最小割决定的。离散的情况下对偶问题的求解结果, 是由最小割的特征函数得出的 0~1 解。在[16]中连续问题的求解依赖于有界变分函数的共面积公式。G. Strang 在[16]中研究了在容量约束 $\|v_1, v_2\| \leq c(x, y)$ 下, 连续的最大流问题可以通过找到 t 的最大值, 使得 $\text{div} V = tF(x, y)$ 成立。其对偶问题可以通过找到最小割 ∂S 来求解, 进一步得到原始问题的解。目前这种模型已经在医学图像中有很广泛的应用, 但是在连续的最大流下的显流线, 以及类似于有向图的约束条件都需要进一步的研究。

Appleton 等在[17,18]提出了用一种连续的最小曲面方法来分割 2 维和 3 维物体, 并且用 PDE(Partial Differential Equation, 简称偏微分方程)对它进行求解, 其具体模型构造如下:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot F \quad (8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\nabla P \quad (9)$$

约束条件为

$$|F| \leq g \quad (10)$$

其中 g 是流 F 的容量上限。(9)式通过标量场 P 的梯度导出了流 F , 并且(8)式和(9)式构成了一个简单的波动方程系统。它们可以看作是描述具有压强 P 和速度 F 的理想流体动力学的 Navier-Stokes 方程线性化形式。

(10)式是对流速 F 大小的约束。这种方法已经成功地运用到了医学图像的分割以及立体图像对的3维重构,并且2维中的结果与现有的平面最小曲面算法结果一致,在3维图像分割和重构中的结果展示了这种新的方法不存在网格偏倚。

Chan在[19]中提出了一种用凸方法来对连续的图像区域进行分割的方法,主要是在求解连续的最小割问题时:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda(x) \in [0,1]} & \int_{\Omega} (1-\lambda(x)) f_1(x) dx \\ & + \int_{\Omega} \lambda(x) f_2(x) dx + \alpha TV(\lambda(x)) \end{aligned}$$

将分拆函数 $\lambda(x) \in \{0,1\}$ 的二值约束松弛为凸集 $\lambda(x) \in [0,1]$ 。

Chan证明出通过简单地设定阈值 $\lambda^*(x) \in [0,1]$ 会产生一系列的全局二值最优解,即产生本原非凸分块问题的全局最优二值解的集合。这种模型一般被看做是没有先验监督的连续最小割模型。

Chan的模型在[20-22]中被扩展到超过两个区域,在其中提出了在连续的情况下多向割的方法并且应用于多重标号问题。其中Bae等在[20]中求解基于连续的Potts模型条件的多重标号问题时,首先提出了一种新的对偶模型,然后构造了一种基于对偶性的方法,并且证明新的对偶模型的最优解等价于原始非凸Potts模型的最优解。对于处理不平滑的对偶问题,采取的是基于对数函数的平滑方法。其算法在处理多重标号问题时,效率相对较高。Lellmann等在[21]中证明多级标号这种组合问题可以通过凸优化方法解决,并提出一种新的基于多维全变分公式的泛函,其优化过程是通过Douglas-Rachford分裂在算子分裂框架中实现的。这种方法可以用于解决ROF类型子问题且具有较高的效率,并且这种方法在应用到单一和多波段图像时效果显著。T. Pock等在[22]在计算最小分块问题时用一种凸松弛方法将Potts模型改写为与之等价的原始对偶全变分泛函,基于此提出了一种有效的原始对偶投影梯度算法,其算法可以实现并行执行。这种凸松弛方法在现有的松弛方法中优势明显,并且在一些多重标号图像分割和立体问题中效果显著。但是存在的缺点是这种方法不能保证得到Potts模型的全局最优解。

3.2. 连续的最大流图像分割模型

Yuan在[23]中提出了连续的最大流方法,基本思想是先通过建立连续的最大流模型,并证明它是连续的最小割问题的对偶问题,然后通过求解连续的最大流问题,得到对应的连续的最小割的解。具体过程如下:

令 $\Omega \in R^2$ 为闭区域, s, t 分别表示源点和汇点。 $\forall x \in \Omega$, 设经过点 x 的空间流为 $p(x)$; 从 s 到 x 的有向源流为 $p_s(x)$; 从 x 到 t 的有向汇流为 $p_t(x)$ 。则连续的最大流模型为

$$\max_{p_s, p_t, p} \int_{\Omega} p_s(x) dx \quad (12)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & |p(x)| \leq C(x), p_s(x) \leq C_s(x), p_t(x) \leq C_t(x), \\ & \text{div } p(x) - p_s(x) + p_t(x) = 0 \end{aligned}$$

对上述模型中的等式约束引入乘子函数 $\lambda(x)$, 连续的最大流模型可以转化为与它等价的原始对偶模型:

$$\begin{aligned} \max_{p_s, p_t, p} \min_{\lambda(x)} & \int_{\Omega} \{ (1-\lambda(x)) p_s(x) + \lambda(x) p_t(x) \\ & + \lambda(x) \text{div } p(x) \} dx \quad (13) \end{aligned}$$

$$s.t. \quad |p(x)| \leq C(x), p_s(x) \leq C_s(x), p_t(x) \leq C_t(x)$$

由最大最小定理,对原始对偶问题的对偶变量 $\lambda(x)$ 进行优化等价于对连续最大流模型(12)式进行优化。同样地,对原始对偶模型(13)式中的流变量 $p_s(x), p_t(x)$ 和 $p(x)$ 进行优化产生与它等价的对偶模型:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda(x) \in [0,1]} & \left\{ \int_{\Omega} (1-\lambda(x)) C_s(x) + \lambda(x) C_t(x) \right. \\ & \left. + C(x) |\nabla \lambda(x)| \right\} dx \quad (14) \end{aligned}$$

可以证明,由(14)式的最优解 $\lambda^*(x)$ 可得原始非凸分割问题的全局二值解。

3.3. 连续的最大流图像分割模型算法

第一步: 选取初值 (p_s^0, p_t^0, τ^0) , 令 $k=0$;

第二步: 通过求解

$$p^{k+1} := \arg \max_{|p| \leq C(x)} L_c(p, p_s^k, p_t^k, \tau^k) \quad (15a)$$

$$p_s^{k+1} := \arg \max_{p_s(x) \leq C_s(x)} L_c(p^{k+1}, p_s, p_t^k, \tau^k) \quad (15b)$$

$$p_t^{k+1} := \arg \max_{p_t(x) \leq C_t(x)} L_c(p^{k+1}, p_s^{k+1}, p_t, \tau^k) \quad (15c)$$

$$\tau^{k+1} = \tau^k - c(\operatorname{div} p^{k+1} - p_s^{k+1} + p_t^{k+1}) \quad (15d)$$

第三步: 若 $err^k = \frac{\|\tau^{k+1} - \tau^k\|}{\|\tau^{k+1}\|} \leq \varepsilon$, 则终止算法,

得出解 τ^* 。否则令 $k = k + 1$, 返回执行第二步。

连续的最大流可以克服网格倚倚的缺点, 并且可以去除或减少不需要的视觉效应。

4. 结束语

最大流方法的优点非常明显: 1) 在全局最优的框架下进行去噪或分割, 保证了能量函数的全局最优解; 2) 同时利用了图像的像素灰度信息和区域边界信息, 使去噪或分割效果有所提高。根据 Ford 和 Fulkerson 的对偶定理, 在离散的和连续的情况下, 均已有许多快速算法。最大流方法由于能够避免其他优化方法固有局部最优的缺点已被广泛应用于计算机视觉中极小化能量函数, 为进一步的图像分析与图像理解奠定基础。虽然最大流方法可以得到全局最优解或逼近最优解, 计算效率高。但是其缺点是只能应用到某类能量函数。需要扩展应用到更多的能量函数, 而这一点需要更多的研究工作。

5. 致谢

河南大学数学与信息科学学院的庞志锋副教授对本文提供了非常有益的帮助, 特此致谢。同时感谢国家自然科学基金(11001075)和河南省教育厅自然科学基金基础研究基金(2009B110006)对本文提供的资助。

参考文献 (References)

- [1] 刘松涛, 殷福亮. 基于图割的图像分割方法及其新进展[J]. 自动化学报, 2012, 38(6): 911-922.
- [2] 杨建功, 汪西莉. 一种结合图割与双水平集的图像分割方法[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(3): 195-197.

- [3] D. Greig, B. Porteous and A. Ssheult. Exact maximum a posteriori estimation for binary images. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 1989, 51(2): 271-279.
- [4] Y. Bovkov, M. P. Jolly. Interactive organ segmentation using graph cuts. *Proceeding of the 3rd International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, Pittsburgh: Springer, 2000: 276-286.
- [5] T. P. Gurholt, X.-C. Tai. 3D multiphase piecewise constant level set method based on graph cut minimization. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, 2009, 2: 403-420.
- [6] E. Bae, J. Shi and X.-C. Tai. Graph cuts for curvature based image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009: 1-30.
- [7] J. C. Picard, H. D. Ratliff. Minimum cuts and related problems. *Networks*, 1975, 5(4): 357-370.
- [8] Y. Bovkov, O. Veksler. Graph cuts in vision and graphics: Theories and applications. *Handbook of Mathematical Models in Computer Vision*, New York: Springer, 2006: 79-96.
- [9] B. V. Cherkassky, A. V. Goldberg. On implementing the push-relabel method for the maximum flow problem. *Algorithmica*, 1997, 19(4): 390-410.
- [10] Goldberg A V, Tarjan R E. A new approach to the maximum-flow problem. *Journal of the ACM*, 1988, 35(4): 921-940.
- [11] Ford L, Fulkerson D. *Flows in Networks*. Princeton: Princeton University Press, 1962.
- [12] Dinic E A. Algorithm for solution of a problem of maximum flow in networks with power estimation. *Soviet Mathematics-Doklady*, 1970, 11(5): 1277-1280.
- [13] Y. Boykov, O. Veksler and R. Zabih. Fast approximate energy minimization via graph cuts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2001, 23(11): 1222-1239.
- [14] V. Kolmogorov. What metrics can be approximated by geo-cuts or global optimization of length/area and flux. *ICCV*, 2005: 564-571.
- [15] G. Strang. Maximal flow through a domain. *Mathematics Programming*, 1983, 26: 123-143.
- [16] G. Strang. Maximum flows and minimum cuts in the plane. *Advances in Mechanics and Mathematics*, 2008, III: 1-11.
- [17] B. Appleton, H. Talbot. Globally optimal surfaces by continuous maximal flows. *Digital Image Computing: Techniques and Applications*, 2003: 987-996.
- [18] B. Appleton, H. Talbot. Globally minimal surfaces by continuous maximal flows. *IEEE PAMI*, 2006: 28.
- [19] T. Chan, S. Esedoglu and M. Nikolova. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2006, 66(5): 1632-1648.
- [20] E. Bae, J. Yuan and X.-C. Tai. Convex relaxation for multipartitioning problems using a dual approach. *Technical Report CAM 09-75*, UCLA, CAM, 2009 September.
- [21] J. Lellmann, J. Kappes, J. Yuan, F. Becker and C. Schnorr. Convex multi-class image labeling by simplex-constrained total variation. *Technical Report, HIC, IWR, University Heidelberg*, 2008 November.
- [22] T. Pock, A. Chambolle, H. Bischof and D. Cremers. A convex relaxation approach for computing minimal partitions. *CVPR*, Miami, 2009.
- [23] J. Yuan, E. Bae and X.-C. Tai. A study on continuous max-flow and min-cut approaches. *IEEE*, 2010: 2217-2224.