

Study on Vibration and Dynamics Characteristics of Rotating Disk Based on Large Deflection Plate Theory

Tiejian Liu, Liang Zhang, Xin Li

Faculty of Mechanical Engineering and Automation, Liaoning University of Technology, Jinzhou Liaoning
Email: zhangliang545238@163.com

Received: Dec. 3rd, 2015; accepted: Dec. 16th, 2015; published: Dec. 23rd, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The disk was simplified as the same thickness elastic circular plate model fixed at the inner ring and free at the outer ring, and the large deflection transverse free vibration equation of axis symmetry rotating disk was established in the fixed coordinate system based on the Kirchhoff theory of thin plates. The free vibration mode of disk was obtained by using the Galerkin method two times. A transverse load was applied near the critical speed; the forced vibration equation of rotating disk was established, and then the dynamic characteristics of the disk under different rotating speeds were analyzed. The results showed that the same diameter number corresponds to the same vibration mode of disk, but the phases of two vibration modes are different. The forced vibration responses of the disk under different rotating speeds are periodically distributed, and the higher the rotating speed, the shorter the period in the same time. The dynamic characteristic of the disk under the certain condition is roughly presented by the dynamic response, and the changing trend of the maximum amplitude of the disk has no direct relationship with the rotating speed.

Keywords

Large Deflection Plate, Disk, Continuum Model, Vibration Characteristic, Dynamics Characteristic

基于大挠度板理论的旋转轮盘振动及动力学特性研究

刘铁箭, 张亮, 李欣

辽宁工业大学机械工程与自动化学院, 辽宁 锦州
Email: zhangliang545238@163.com

收稿日期: 2015年12月3日; 录用日期: 2015年12月16日; 发布日期: 2015年12月23日

摘要

将轮盘简化为内圈固定 - 外圈自由的等厚弹性圆板模型, 通过运用基尔霍夫薄板理论在固定坐标系里建立了轴对称旋转轮盘的大挠度横向自由振动方程。运用两次伽辽金法获得轮盘自由振动的振型。在临界转速附近, 施加一个横向载荷, 得到旋转轮盘的受迫振动方程, 进而分析了不同转速下的轮盘动态特性。结果表明: 相同的节径数对应的振型相同, 但是相位有所区别; 不同转速下的受迫振动响应曲线总体呈周期分布, 转速越高, 同一时间段内的周期越短。在一定工况下动态响应可以大致反映轮盘的振动形式, 且振幅最大值的变化趋势与转速大小没有直接关系。

关键词

大挠度板, 轮盘, 连续体模型, 振动特性, 动力学特性

1. 引言

轮盘是航空发动机的重要零部件, 在高温、高速下工作, 所承受的载荷复杂、环境严酷, 一旦发生故障将导致严重的后果。我国某型发动机涡轮盘因轮盘径向有效应力超过材料屈服强度, 造成涡轮盘塑性变形过大而失效 [1]。美国某型发动机也因涡轮盘低周疲劳断裂, 造成飞行事故。我国也曾发生过多起涡轮盘的低周疲劳断裂失效事件 [2] [3]。由此可见, 轮盘的失效大多会造成严重破坏, 所造成的后果是灾难性的。由于日益追求发动机重量轻、寿命长, 轮盘结构日趋轻型化, 轮盘做得很薄, 在高负荷和长时间工作条件下, 轮盘振动问题更为突出。

采用连续体模型分析轮盘时, 通常是将轮盘简化为一圆板进行研究。在国外, Southwell [4]最早给出了中心固定周边自由的均匀薄圆板的运动方程。Vogel 和 Skinner [5]发展了 Southwell 的工作, 计算了不同边界条件下均匀薄圆板的固有频率和振型。Ehrich [6]采用 Myklestad 法计算了变厚度旋转圆盘的固有频率。Mote [7]采用 Rayleigh-Ritz 法分析了中心固定变厚度薄圆板的动力特性。在轮盘振动分析方面被广泛接受的理论为薄板理论 [8]。Mindlin [9]在分析厚板时, 考虑了转动惯性和剪切变形的影响, 这一修正被称为 Mindlin 厚板理论。Mindlin 和 Derisicwicz [10]应用厚板理论, 使厚圆板的振动分析更为精确, 同时该理论也适用于薄圆板。目前研究薄板的方法大都是在 Mindlin 厚板理论上发展起来的。这些方法应用都比较繁复, 但引入相应的近似方法分析就能容易些。在国内, 毛海鱼 [11]建立了旋转圆板的横向自由振动方程, 得到了圆板低阶模态对应的临界转速。朱梓根 [12]采用薄板和厚板理论, 将轮盘振动特性的求解问题化成导出等价的一阶微分方程组, 用微分方程组数值解法求解。本文采用连续体模型将轮盘简化成中间有孔的弹性均匀圆板, 基于大挠度薄板理论, 研究了旋转轮盘的振动及动力学特性。

2. 轮盘自由及受迫振动模型

2.1. 轮盘自由振动模型

考虑一个等厚度的轴对称圆环板, 如图 1 所示, 以定常角速度 Ω 绕 z 轴旋转。圆环板在内半径 $r = a$ 处固支, 在外半径 $r = b$ 处自由, 板的厚度为 h 。惯性坐标系 (r, θ) 建立在板中性面 $z = 0$ 的几何中心, 因

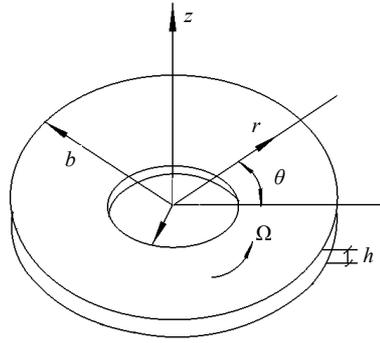


Figure 1. Rotate circular plate with clamped inner-boundary and free outer-boundary
图 1. 内圈固支 - 外圈自由的旋转圆板

此板的上下表面分别为 $z = \pm h/2$ 。

设中性面上各点的横向、径向、周向位移分量为 w^0 、 u^0 、 v^0 ，径向、周向和面内剪应变分量分别为 ε_r^0 、 ε_θ^0 和 $r_{r\theta}^0$ 。根据基尔霍夫板理论，垂直于中面的线在变形后仍垂直于中面，而且长度保持不变，所以整个板内任一点的应变分量设为 ε_r 、 ε_θ 、 $r_{r\theta}$ 。由于中法线在变形过程中长度不变，因此其上各点的挠度相等，等于中面上相应点的挠度 w^0 ，后面统一用 w 表示。在中面上，根据达朗贝尔原理，列出中面内力的力平衡和弯矩平衡方程，联立平衡方程、几何方程与物理方程，并化简得到轴对称圆板的大挠度动力学方程：

$$\begin{cases} \rho h (w_{,tt} + 2\Omega w_{,t\theta} + \Omega^2 w_{,\theta\theta}) + D\nabla^4 w + c(w_{,t} + \Omega w_{,\theta}) - hL[w, \phi] + \rho hr\Omega^2 \left(\frac{r}{2} \nabla^2 w + w_{,r} \right) = 0 \\ \nabla^4 \phi = -EL[w, w] + 2\rho(1-\mu)\Omega^2 \end{cases} \quad (1)$$

式中各参数说明参见文献 [11]，将式(1)采用文献 [11] 中的方法进行简化，并采用文献 [13] 的方法计算旋转引起的应力，进而得到简化的圆板的大挠度横向振动控制方程：

$$\begin{cases} \rho h (w_{,tt} + 2\Omega w_{,t\theta} + \Omega^2 w_{,\theta\theta}) + D\nabla^4 w + c(w_{,t} + \Omega w_{,\theta}) - hL[w, \phi_2] - hF(w) = 0 \\ \nabla^4 \phi_2 = -\frac{1}{2}EL[w, w] \end{cases} \quad (2)$$

式中算子

$$F = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r\sigma_{1r}^0 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \sigma_{1\theta}^0 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]$$

引入无量纲参数如下 [14]：

$$\begin{cases} w' = \frac{b}{h^2} w, \quad t' = \frac{t}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad \omega' = \Omega b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad r' = \frac{r}{b} \\ \phi' = \frac{h}{D} \phi, \quad c' = \frac{b^4}{24(1-\mu^2)\sqrt{\rho h^5 D}} c, \quad \sigma' = \frac{hb^2}{D} \sigma \end{cases} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)，去掉上标后得到：

$$\begin{cases} w_{,tt} + 2\omega w_{,t\theta} + \omega^2 w_{,\theta\theta} + \nabla^4 w + 2\varepsilon c(w_{,t} + \omega w_{,\theta}) - L[w, \phi_2] - F(w) = 0 \\ \nabla^4 \phi_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon L[w, w] \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\varepsilon = 12(1-\mu^2)\frac{h^2}{b^2} \quad (5)$$

若考虑特殊情况 $\varepsilon = 0$ ，式(4)的第二式等于零，第一式则变成

$$w_{,tt} + 2\omega w_{,t\theta} + \omega^2 w_{,\theta\theta} + \nabla^4 w - F(w) = 0 \quad (6)$$

式(6)即为旋转轮盘的线性自由振动方程。

2.2. 轮盘受迫振动模型

自由振动为轮盘的特殊振动形式，更具一般性的振动是受到外界激励作用下产生的受迫振动。因此，为模拟激励力，在圆盘上施加横向载荷 Q ，式(1)变成为

$$\begin{cases} \rho h(w_{,tt} + 2\Omega w_{,t\theta} + \Omega^2 w_{,\theta\theta}) + D\nabla^4 w + c(w_{,t} + \Omega w_{,\theta}) - hL[w, \phi] + \rho hr\Omega^2 \left(\frac{r}{2} \nabla^2 w + w_{,r} \right) = Q \\ \nabla^4 \phi = -EL[w, w] + 2\rho(1-\mu)\Omega^2 \end{cases} \quad (7)$$

同样采用同样方法简化，在随板以固定角速度旋转的动坐标系中，原固定坐标系下的 $w = w(r, \theta(t), t)$ 将变为 $w = w(r, \theta, t)$ ，则式(7)变为：

$$w_{,tt} + \nabla^4 w - F(w) = q \quad (8)$$

式(8)即为旋转轮盘的受迫振动方程。其中：

$$q(r, \theta, t) = Q\delta(r-r_0)\delta(\theta-\omega t)/r, \quad (a < r_0 < 1) \quad (9)$$

3. 轮盘振动及动态特性分析

3.1. 伽辽金法求解振动模态

在运用伽辽金法求解旋转圆板自由振动式(6)的模态时，分两步进行。首先定义了一个自伴随的刚度算子 [15]，通过该算子的特征值问题获得板的横向振动模态；接着将该模态解代入完整的动力学方程式(6)，计算出各阶模态的频率。图2是轮盘按节径振动的正弦模态，节径数分别取 $n=1, n=2, n=3$ 。

特定节径的轮盘振型对应着特定阶数的振型，但是正弦模态和余弦模态在轮盘同一节径下相位有所不同，如图3所示的轮盘振动俯视图，其中左侧为实部的余弦模态，右侧为虚部的正弦模态。

3.2. 轮盘受迫振动分析

定义线性刚度算子，对应的特征值问题为：

$$L_1(w) = \nabla^4 w - F(w) = \lambda^2 w \quad (10)$$

在某阶临界转速下的圆盘横向位移模态可以表示为

$$w(r, \theta, t) = R_{mn}(r) [\mu(t) \cos n\theta + \eta(t) \sin n\theta] \quad (11)$$

其中 η 、 μ 为模态坐标。将式(10)代入式(8)，得到

$$w_{,tt} + \lambda^2 w = q \quad (12)$$

将式(11)代入式(12)中，并两边同时乘以 $rR \cos n\theta$ 和 $rR \sin n\theta$ 且进行积分，得到

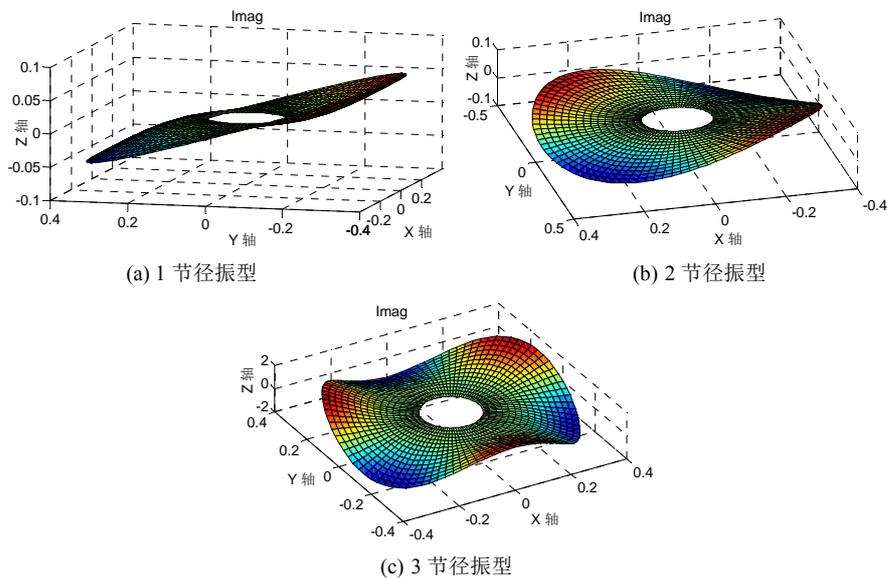


Figure 2. Vibration mode of disk
图 2. 轮盘的节径振型

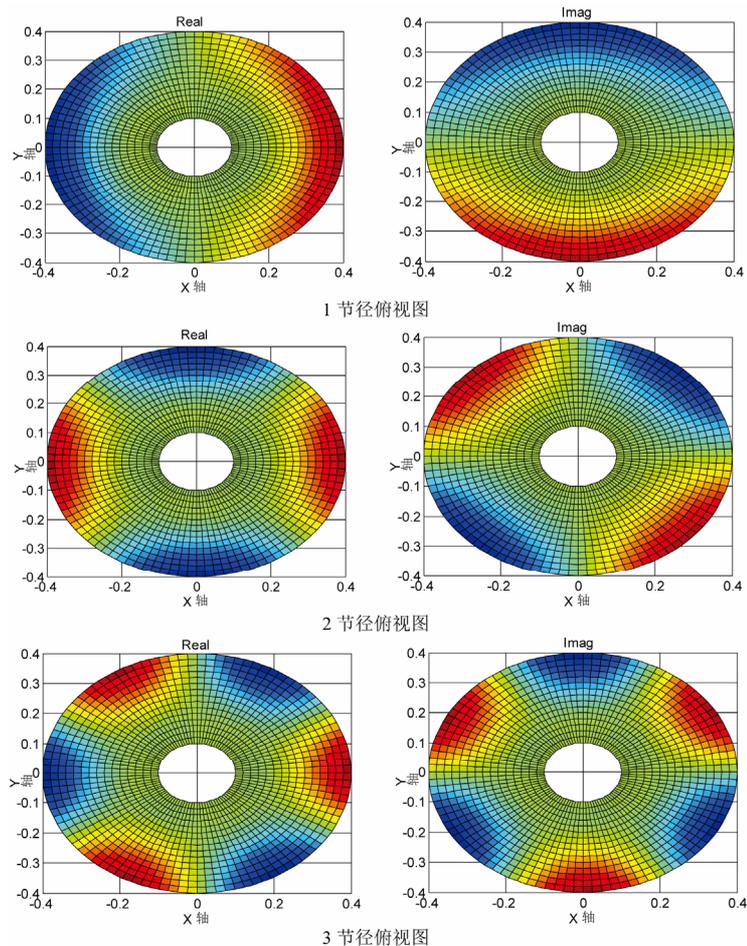


Figure 3. The comparison of sine-mode and cosine-mode top view
图 3. 余弦模态与正弦模态俯视图比较

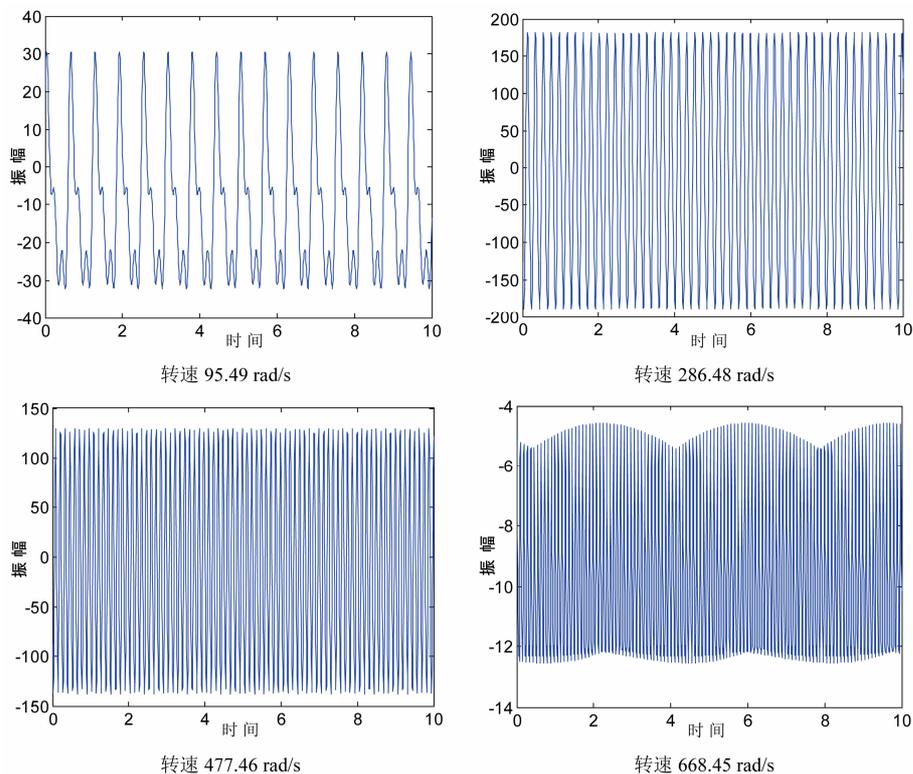


Figure 4. Responses of forced vibration under 4 different working conditions
图 4. 四种工况下的受迫振动响应图

$$\begin{cases} \ddot{\mu} + \lambda^2 \mu = f \cos n\omega t \\ \ddot{\eta} + \lambda^2 \eta = f \sin n\omega t \end{cases} \quad (13)$$

式中： $f = \frac{QR(r_0)}{\int_a^1 rR^2 dr}$ 。

则可求得模态坐标为：

$$\mu_n = \frac{f \cos n\omega t}{1 - n^2 \omega^2 / \lambda_n^2}, \quad \eta_n = \frac{f \sin n\omega t}{1 - n^2 \omega^2 / \lambda_n^2} \quad (14)$$

图 4 为四种工况下轮盘受迫振动响应，从图 4 中可以看出，相同时间段内，转速越高，振动周期越短；很显然前三个转速对应的响应均为节径振动，而第四个或为单纯的节圆振动，或为节圆和节径的耦合振动；随转速的不同，节径振动的振幅最大值不同，而且振幅最大值与转速并不成正比、反比或周期关系。

4. 结论

本文基于基尔霍夫薄板理论给出了轴对称旋转轮盘的大挠度横向自由振动方程。运用两次伽辽金法获得轮盘自由振动的振型。并在模型上施加一个横向载荷，得到旋转轮盘的受迫振动方程，进而获得外载荷作用下不同转速的轮盘动态响应曲线。结果表明：相同的节径数对应的振型相同，但是相位有所区别；不同转速下的受迫振动响应曲线总体呈周期分布，转速越高，同一时间段内的周期越短；在一定工况下的响应可以大致反映轮盘的振动形式，且振幅最大值的变化趋势与转速大小没有直接关系。

基金项目

辽宁省教育厅科学研究项目(L2014246); 辽宁工业大学校基金项目(X201202)。

参考文献 (References)

- [1] 岳承熙, 等. 航空涡喷、涡扇发动机结构设计准则(研究报告)[R]. 北京: 中国航空工业总公司发动机系统工程局, 1997.
- [2] 宋兆涨, 主编. 航空发动机典型故障分析[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2000: 85-92.
- [3] 杨兴宇, 阎晓军, 赵福星. 某型航空发动机涡轮盘低压循环疲劳寿命分析[J]. 机械强度, 2004, 26(S): 229-233.
- [4] Southwell, R.V. (1922) On the Free Transverse Vibrations of a Uniform Circular Disc Clamped at Its Center and on the Effect of Rotation. *Proceedings of the Royal Society (London), Series A*, **101**, 133-153. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1922.0032>
- [5] Vogel, S.M. and Skinner, D.W. (1965) Natural Frequencies of Transversely Vibration Uniform Annular Plates. *Journal of Applied Mechanics*, **32**, 926-931. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3627337>
- [6] Ehrich, F.F. (1956) A Matrix Solution for the Vibration Modes of Non-Uniform Disks. *Journal of Applied Mechanics*, **23**, 109-115.
- [7] Mote Jr., C.D. (1965) Free Vibration of Initially Stressed Circular Disks. *Journal of Engineering for Industry*, **87**, 258-264. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3670808>
- [8] Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. (1959) *Theory of Plates and Shell*. 2nd Edition, McGraw-Hill Book Co, Inc., New York, 116-120.
- [9] Mindlin, R.D. (1951) Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motion of Isotropic Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 31-38.
- [10] Mindlin, R.D. and Derisicwicz, H. (1954) Thickness-Shear and Flexural Vibrations of a Circular Disk. *Journal of Applied Physics*, **25**, 1329-1332. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1721554>
- [11] 毛海鱼. 圆型薄板的临界转速及动力学分析[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 西南交通大学, 2007.
- [12] 朱梓根. 轮盘振动特性计算[J]. 航空动力学报, 1987(2): 127-130.
- [13] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (2003) *Theory of Elasticity*. 北京: 清华大学出版社(影印版), 2003: 57-80.
- [14] Meirovitch, L. (1980) *Computational Methods in Structural Dynamics*. Alphen aan den Rijn, The Netherlands. Sithoff & Noordhoff, Rockville, 64-75.
- [15] 晏砺堂, 朱梓根, 李其汉. 高速旋转机械振[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994: 25-46.