

树木轮伐模型研究云杉最佳轮伐周期

袁 慧, 段 菲, 李榕乐, 陈国华*

湖南人文科技学院数学与金融学院, 湖南 娄底

收稿日期: 2022年6月1日; 录用日期: 2022年7月20日; 发布日期: 2022年7月27日

摘 要

本文对Faustmann模型和树高模型进行优化, 得到树木轮伐模型。再对华北云杉的最佳轮伐期进行探究, 将森林价值分为碳收益和木材收益, 根据两者的单价计算出所探究的森林两者的收益。再根据树木轮伐模型算出最大净收益以及林地期望值即总收益最高时的树龄为最佳轮伐期, 树林成长到该阶段时采伐而产生的碳收益和木材收益之和的总收益达到最高。最后综合考虑森林生态价值和经济价值得出, 云杉最佳轮伐期为23年。

关键词

Faustmann模型, 树高模型, 树木轮伐模型

Study on the Best Rotation Cycle of Spruce by Tree Rotation Model

Hui Yuan, Fei Duan, Rongle Li, Guohua Chen*

School of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities, Science and Technology, Loudi Hunan

Received: Jun. 1st, 2022; accepted: Jul. 20th, 2022; published: Jul. 27th, 2022

Abstract

In this paper, Faustmann model and tree height model are optimized, and the tree rotation model is obtained. Then, the best rotation period of *Picea crassifolia* was explored, and the forest value was divided into carbon income and wood income. According to the unit price of the two, the income of the explored forest was calculated. Then, according to the tree rotation model, the maximum net income and the expected value of forest land, that is, the age when the total income is the highest, are calculated as the best rotation period. When the forest grows to this stage, the total income of the sum of carbon income and wood income generated by cutting reaches the highest.

*通讯作者。

Finally, considering the ecological value and economic value of the forest, it is concluded that the best rotation cutting period of spruce is 23 years.

Keywords

Faustmann Model, Tree Height Model, Tree Rotation Model

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1975年,美国气候学家布勒克尔教授在一篇论文中预言“大气中二氧化碳的上升将导致明显的全球变暖”,2020年全球二氧化碳排放量分布图如图1所示。迄今为止,全球变暖仍然是人类面临的一个难题,为了减少二氧化碳的排放,人们提出了“低碳生活”。而如何规划和管理森林,使森林的碳汇和森林价值最合理,成为人们解决全球变暖问题的一座高山。因此需要针对森林的最佳轮伐期进行分析。

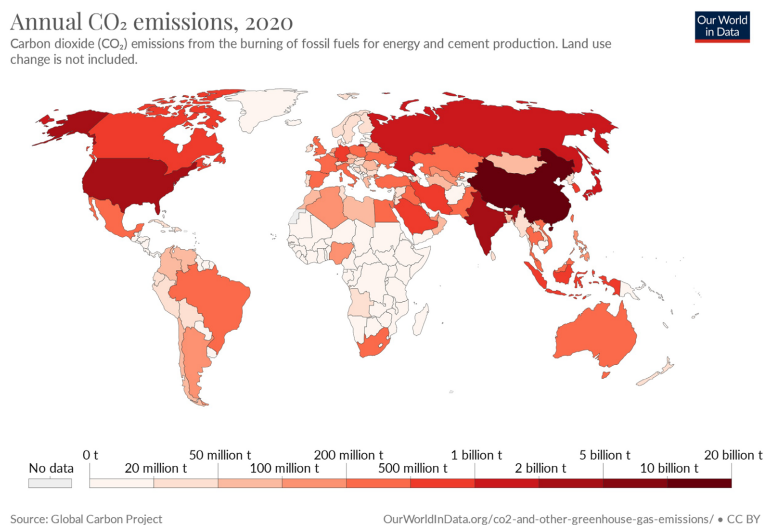


Figure 1. Carbon dioxide emissions in 2020

图 1. 2020 年的二氧化碳排放量

针对最佳轮伐期, Faustmann 模型是德国的林业经济学家佛斯特曼提出的关于林地期望值,即林地的土地价值计算的公式。通常被运用到计算森林树木的最佳轮伐期中。

目前大量的文献在计算最佳轮分期的时候,只考虑到森林的材积价值。例如,王桢等的研究桉树经营的最优轮伐期“错位”问题[1];张楠等的基于弗斯曼模型及其广义改进计算林地期望[2];使用生长模型的北亚热带日本落叶松纸浆林最佳轮伐期研究[3];杨佳伟等基于最大土地期望值法确定造林树种最佳轮伐期的探讨[4]。随着温室效应日益加剧,针对于碳的一系列措施陆续出台,因此目前森林除去材积收益外还应考虑碳收益。

而经典的 Faustmann 模型中,更多偏向于对木材收益的考虑,而忽略了碳收益。这里本文将树高生

长模型与 Faustmann 模型结合得到一个树木轮伐模型，在既考虑木材收益又考虑碳收益的基础上，以华北云杉为例，计算最佳轮伐期。

2. 模型建立

对于最佳轮伐期的计算，在使用经典 Faustmann 模型时，需要对各轮伐期在立木价格、林分材积、造林成本、利率等因素保持相同的条件下进行轮伐，因此需要得出各因素的具体数值，本文运用树高模型进行计算。

2.1. 经典 Faustmann 模型

Faustmann 模型是研究林木最优轮伐期的经典模型，最早由德国林学家浮士德曼于 1849 年提出。林地管理的核心问题是林木采伐方案的决策选择，Faustmann 模型框架下的林地管理决策主要涉及采伐时机、规划林分年龄结构等问题。Faustmann 提出的探讨“确定林地和未成熟林分的林业价值”的“弗斯曼公式”是计算森林连续生长的最佳经济轮伐周期的模型。当推迟轮伐期的采伐成本与收益相等时，林地期望值最大，此时的轮伐期 T 为最佳轮伐期。

$$LEV = \frac{PQ(T)(1+r)^{-T} - C}{1 - (1+r)^{-T}} \quad (1)$$

为更加准确地计算森林林业价值，将 n 年期复利 $(1+r)^T$ 改为更科学的连续复利形式，即 $(1+r)^T = e^{rT}$ ，公式改进如下：

$$LEV = \frac{PQ(T)e^{-rT} - C}{1 - e^{-rT}} \quad (2)$$

式中假设造林成本 C 、材积生长量 $Q(T)$ 、木材价格 P 已知， T 为轮伐期数， r 为贴现率，仅以木材收入计算地期望值(LEV)。

2.2. 树高模型

考虑森林的碳汇和社会价值，通过树高生长模型确定森林经营方案，通过林地的期望价值计算最大效益。最后，制定了基于最优轮伐期的森林经营方案。该模型如下：

树高生长模型[5]：树木生长的数学模型。描述树木体积与生长时间的关系。根据研究，树木的蓄积量与生长年龄之间存在“S”型关系。幼苗种植时，树木的生长期较慢，但当树木长到一定年龄时，会有一个较快的生长期。当这个生长期过去后，树木的生长会减缓到一个相对稳定的水平，树木的体积基本保持不变。为了测试树木在不同生长阶段的体积，我们使用：

$$M = b_1 SI^{b_2} [1 - \exp(-kt)]^c \quad (3)$$

其中 m 代表材积， SI 代表立地指数， t 代表树龄。而 $b_1 = 4.535$ ， $b_2 = 1.609$ ， $c = 3.720004$ ， $k = 0.096004$ 然后计算研究树木的平均 DBH 和树高：

$$D = 1.77871 SI^{1.38791} [1 - \exp(-0.011672t)]^{0.80127} \quad (4)$$

其中 $SI = 16.148$ 。

$$H = 14.8032 SI^{0.42132} [1 - \exp(-0.00942t)]^{0.76364} \quad (5)$$

林地期望值计算，其中 $r = 1/20$ ：

$$\Delta CO_2 = \sum p_i w_i \times n \tag{6}$$

$$R_{FC.CO_2} = P_{CO_2} \sum_{t=0}^t \Delta CO_2 (1+r)^t + P_{FC} \sum_{t=0}^t V_t (1+r)^t \tag{7}$$

$$W_1 = 3.4166 \times 10^{-2} D^{1.7202} H^{1.1057}$$

$$W_2 = 4.3570 \times 10^{-2} (D^2 H)^{0.7172} \tag{8}$$

$$W_3 = 1.3987 \times 10^{-2} D^{2.35555} H^{-0.2717}$$

$$W_4 = 0.9780 + D^2$$

碳含量的计算公式:

$$C = (W_1 \times P_1 + W_2 \times P_2 + W_3 \times P_3 + W_4 \times P_4) \tag{9}$$

$$R_1 = \sum_0^t 3.9 \times C \times (1+r)^{n-t} \tag{10}$$

$$R_2 = \sum_0^t 450 \times M \times (1+r)^{n-t} \tag{11}$$

$$F = \sum_0^t (\alpha + \beta) \times (1+r)^{n-t} \tag{12}$$

其中 $R_{FC.CO_2}$ 代表碳价格, ΔCO_2 代表复合经营目标的树种收益, P_{CO_2} 代表期间的碳储量, t 代表轮伐期, r 代表利润, P_{FC} 代表木材价格, V_t 代表时间范围内的累计量。 W_1 、 W_2 、 W_3 、 W_4 分别代表干燥后茎、根、枝和叶的生物量。

针对华北云杉最佳轮伐期的计算, 首先本文运用经典 Faustmann 模型、树高模型对华北云杉的木材收益和碳收益进行计算。这里本文将经典 Faustmann 模型、树高模型进行优化, 最后得到树木轮伐模型。

2.3. 树木轮伐模型

综合考虑森林树木的碳汇收益和木材收益, 以实现森林复合碳汇收益和木材收益最大为目标, 基于经典的 Faustmann 模型改进为更加科学准确的连续复利计算的形式, 构建杉树林的林地期望值关于轮伐周期 T 的计算模型, 当林地期望值最大时可得到森林的最佳轮伐周期。最佳轮伐期计算流程如图 2 所示。

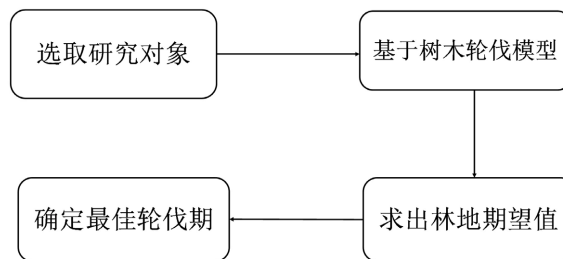


Figure 2. Tree rotation model solving process
图 2. 树木轮伐模型求解流程

林地管理的核心问题是林木采伐方案的决策选择, Faustmann 模型框架下的林地管理决策主要涉及采伐时机、规划林分年龄结构等问题。

Faustmann 模型提出以后, 后来的学者针对不同情况对 Faustmann 模型进行了改进, 如考虑非木质产品和服务的 Hartman 模型等。但是在经典 Faustmann 模型中忽略了对于碳收益的考虑, 因此本文对此模

型进行优化，将碳收益加入样本模型中进行考虑得到一个优化后的 Faustmann 模型的表达式为：

$$Lev = \frac{R_1 + R_2 - F}{(1+r)^t - 1} \quad (13)$$

其中，其中 R_1 代表碳收入， R_2 代表木材收入， r 代表利润， F 代表成本， t 代表轮伐期， Lev 为无穷轮伐期下土地的期望值。

3. 模型求解

3.1. 云杉生长变化分析

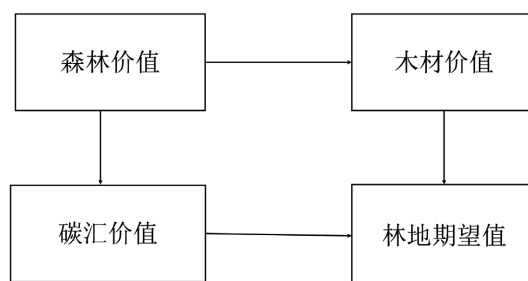


Figure 3. Forestland expected value calculation process
图 3. 林地期望值计算流程

在考虑树木木材和碳收益的基础上，对平衡森林碳汇和森林效益的经营方案进行如下分析：

首先，我们选取华北云杉林作为样本进行研究，根据“Faustmann 理论：无限轮伐期的最大净现值”计算出最佳轮伐期。即最佳轮伐期是木材年均生长量和净收益最大，收益达到最大的时候为该林的最佳轮伐期。本文对林木的种植、生长和抚育进行假设，在林木的种植和抚育成本不变的情况下，对其进行无限采伐。根据树木轮伐模型来确定华北云杉的最佳轮伐期，计算流程如图 3 所示。

根据参考文献，得到云杉含碳率为 0.51，密度为 0.45 千克/立方米，每公顷约 2971 棵树。将森林价值分为碳收益和木材收益，将固碳量根据碳的单价计算出所研究的森林的碳收益，再根据木材单价计算出该林的木材收益，得到该林的总收益，即除去成本之后的森林净收益再算出林地期望值，得出最佳轮伐期，即在树林成长到该阶段时砍伐而产生的碳收益和木材收益之和的总收益达到最高。

根据林地净收益的公式，可以看出林地净收益与时间有关。假设时间的周期间隔，则林地期望值变化曲线可以计算出从育苗到采伐期间森林累计总收入达到最大值的树木生长年龄。根据云杉生长的年份，本文针对杉树生长的不同年龄阶段进行分析，计算出不同生长年龄段的杉树的林地期望值，如下表 1 所示：

Table 1. The values of different growth stages of spruce
表 1. 云杉不同生长阶段各数值

时间 t /年	材积 M /元· hm^2	碳储量 C /元· hm^2	木材收益 R_1 /元· hm^2	碳收益 R_2 /元· hm^2	成本 F /元· hm^2	林地期望值 LEV /元· hm^2	F 林地期望值 LEV /元· hm^2
1	1.77E+03	3.8852E+04	1.4801E+08	1.8073E+07	5.9638E+05	1.6145E+09	0.0027E+11
3	6.7493E+03	7.1349E+04	6.9874E+08	5.6674E+07	1.7906E+06	4.7811E+09	0.0442E+11
5	3.2310E+04	1.5502E+05	4.2883E+09	1.6553E+08	2.8467E+06	1.6110E+10	0.155E+111
7	8.1778E+04	2.5888E+05	1.3354E+10	3.3822E+08	3.8046E+06	3.3623E+10	0.3279E+11

Continued

9	1.5248E+05	3.7935E+05	2.9556E+10	5.7374E+08	4.6734E+06	5.4640E+10	0.4294E+11
11	2.3810E+05	5.1394E+05	5.3326E+10	8.6796E+08	5.4615E+06	7.6285E+10	0.6441E+11
13	3.3165E+05	6.6076E+05	8.4087E+10	1.2150E+09	6.1763E+06	9.6309E+10	0.8531E+11
15	4.2707E+05	8.1827E+05	1.2064E+11	1.6081E+09	6.8247E+06	1.1330E+11	1.0381E+11
17	5.1980E+05	9.8516E+05	1.6150E+11	2.0401E+09	7.4128E+06	1.2657E+11	1.1181E+11
19	6.0676E+05	1.1603E+06	2.0518E+11	2.5040E+09	7.9462E+06	1.3601E+11	1.2499E+11
21	6.8617E+05	1.3428E+06	2.5032E+11	2.9929E+09	8.4300E+06	1.4183E+11	1.3437E+11
23	7.5722E+05	1.5317E+06	2.9575E+11	3.5005E+09	8.8688E+06	1.4446E+11	1.4015E+11
25	8.1979E+05	1.7262E+06	3.4057E+11	4.0209E+09	9.2669E+06	1.4440E+11	1.4183E+11
27	8.7421E+05	1.9257E+06	3.8408E+11	4.5487E+09	9.6279E+06	1.4217E+11	1.4304E+11
29	9.2107E+05	2.1296E+06	4.2578E+11	5.0793E+09	9.9554E+06	1.3826E+11	1.3663E+11

其中 1~29, 表示云杉生长的第一年到第三十年, 本文每两年对杉树的林地期望值进行一次计算, 其中 M 表示材积, C 表示碳储量, R_1 表示木材收益, R_2 表示碳收益, F 表示成本, LEV 表示林地期望值。随着林龄增加, 材积和碳储量都随着杉树的树林增加, 但增长幅度减小。木材收益在 t 等于 29 达到最大值 $4.2578E+11$ 元· hm^2 , 碳汇收益在 t 等于 29 时达到最大值 $5.0793E+097$ 元· hm^2 。林地期望值随林龄正大先增加至 $1.4446E+11$ 元· hm^2 , 在 t 等于 23 到达最大值, 随后又逐年减少, 因此最佳轮伐期为 23 年。

在这里本文将经典 Faustmann 模型中林地期望值根据树木生长的年龄变化而变化的情况与优化后的树木轮伐模型中林地期望值随树木生长年龄的变化进行对比。树木轮伐模型在对因素进行考虑时, 除了对森林的木材收益进行考虑外, 与经典的 Faustmann 模型进行对比还考虑了碳收益。由于随着温室效应的影响越来越大, 对于排放的二氧化碳实行的是针对排放量进行收费。而森林中的树木运用光合作用将排放的二氧化碳吸收运用。由于考虑的因素不同, 对林地期望值会有一些影响。根据上表一可以分析, 选用经典 Faustmann 模型, 不考虑碳收益时, 在树木生长阶段达到 27 年时, 林地期望值达到最大, 并且涨幅未减小; 在第 29 年时, 林地期望值减小, 因此在不考虑碳收益的情况下, 经典 Faustmann 模型计算出云杉最佳轮伐期为 27 年。

随着温室效应日益严重, 排碳量成为了工业中必要的考虑因素。森林是地球之肺, 是解决温室效应的主力之一。因此有必要将碳收益纳入森林价值中考虑, 在考虑碳收益的情况下, 在树龄达到 23 时, 林地期望值达到最大, 云杉的最佳轮伐期为 23 年。

3.2. 木材价格变化分析

针对不同碳价格和木材价格进行分类讨论, 首先针对木材价格进行分析。当碳价格不变, 木材价格上涨时, 根据表 2 所示, 可分析得出, 最佳轮伐期随着木材价格的上涨而最佳轮伐期时间延长。

Table 2. The optimal rotation period when timber prices change
表 2. 木材价格变化时的最佳轮伐期

碳价格/元	木材价格/元	最佳轮伐期/年
3.9	100	23
3.9	200	23

Continued

3.9	300	23
3.9	400	23
3.9	500	24
3.9	600	24
3.9	700	24

3.3. 碳价格变化对最佳轮伐期的影响

碳价格是影响碳收益的直接因素。为了探讨碳价格变化对最佳轮伐期的影响，本文针对碳价格做了单一变量分析。在木材价格等其他因素不变的情况下，分析随着碳价格的变化最佳轮伐周期的变化。根据表 3 所示，可以分析得出，但碳价格作为单一变量时，随着碳价格的上涨，云杉的最佳轮伐周期缩短。

Table 3. The optimal rotation period when the carbon price changes

表 3. 碳价格变化时的最佳轮伐期

碳价格/元	木材价格/元	最佳轮伐期/年
2	450	24
2.5	450	24
3	450	24
3.5	450	24
4	450	23
4.5	450	23
5	450	23

利用树高模型，求出这种树木的蓄积和材积，结合树木的木材收益和碳收益，利用树木轮伐模型算出木材收益和碳收益两者的总收益达到最大时的时间，即为该树林的最佳轮伐期。这里，根据参考资料，我们假设每公顷种植 2971 棵树，林木作为木材的年利用率为 90%，碳的单价为每公斤 3.9 元，木材的年成本价为每立方米 450 元，年成本价为 4000 元，每年废弃后排放到大气中的木制品的碳排放成本为 1000 元。最后得到林地期望值，如下图 4 所示：

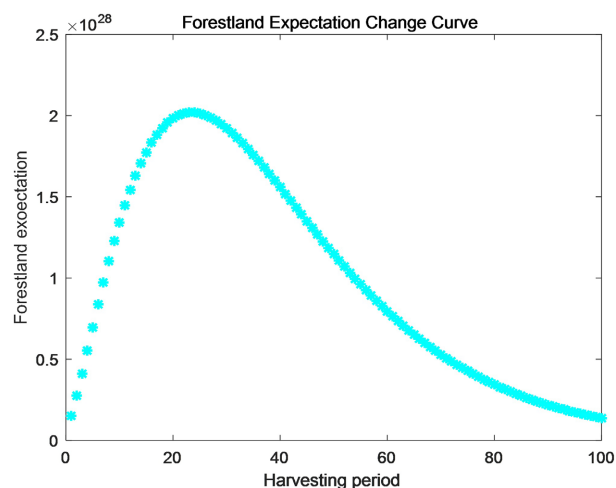


Figure 4. Forest land expected value change curve

图 4. 林地期望值变化曲线

当林龄为 23 时，林地期望值最大，此时为最佳轮伐期。

4. 结论与验证

基于碳封存量最大考虑，根据树木轮伐模型最后得到林地的一个期望值，即林地净收益公式。林学理论中树木的最佳轮伐期为成熟期，即发挥作用最大的年龄，而超过这一年龄固碳能力就会逐步下降，最终计算出森林树木的碳收益和木材收益，以及出去成本后总的净收益，得到云杉最佳轮伐期为 23 年，此时总的净收益达到最大，而固碳能力也相对较好。根据单一变量，当碳单价不变，木材价格上涨时可以延长轮伐期；当木材价格不变，碳单价的上涨，云杉轮伐期变短。

本文运用树木轮伐模型，针对云杉进行分析。在考虑碳收益和木材收益，最终得出华北云杉的最佳轮伐周期为 23 年。根据所参考的文献目标规划与轮伐公式确定森林收获的比较分析[6]中对云杉的最佳轮伐期研究，参考此文云杉蓄积量等数据，运用与本文所得树木轮伐模型下，最后得出云杉最佳轮伐期 23 年。并且根据实际的华北云杉的轮伐情况，与本文所计算得出的最佳轮伐期相符，因此具有一定的准确性。

致 谢

感谢湖南人文科技学院数学与金融学院对本文的支持。

基金项目

湖南省学位与研究生教育改革研究项目“专业学位硕士研究生创新人才培养的数学建模‘两轮驱动’模式研究与实践”(湘教通[2019] 293 号 No. 2019YGYB67)。

参考文献

- [1] 王枫, 任世奇, 吴海龙. 桉树经营的最优轮伐期“错位”问题研究[J]. 桉树科技, 2021, 38(3): 11-16.
- [2] 张楠, 宁卓, 杨红强. 弗斯曼模型及其广义改进: 基于林地期望值评估方法学演进[J]. 林业经济, 2020, 42(10): 3-15.
- [3] 李子敬. 北亚热带日本落叶松纸浆林最佳轮伐期研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 中国林业科学研究院, 2011.
- [4] 杨家伟. 最大土地期望值法确定造林树种最佳轮伐期的探讨[J]. 云南林业科技, 1996(4): 24-32.
- [5] 朱臻, 沈月琴, 徐志刚, 等. 森林经营主体的碳汇供给潜力差异及影响因素研究[J]. 自然资源学报, 2014, 29(12): 2013-2022.
- [6] 李婷婷, 陆元昌, 刘宪钊, 王霞, 庞丽峰. 目标规划与轮伐公式确定森林收获的比较分析[J]. 林业科学研究, 2014, 27(1): 38-44.