

# Light Cone Sum Rule for $B \rightarrow \eta \ell \nu$ under Heavy Quark Expansion

Chenliang Ma

School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing  
Email: [lianxingqingjie@163.com](mailto:lianxingqingjie@163.com)

Received: Nov. 20<sup>th</sup>, 2014; revised: Dec. 28<sup>th</sup>, 2014; accepted: Jan. 7<sup>th</sup>, 2015

Copyright © 2015 by author and Hans Publishers Inc.  
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

The semileptonic decay  $B \rightarrow \eta \ell \nu$  is studied. The transition form factor and the branching ratio for this decay are calculated by using the light cone sum rule method within the framework of the heavy quark effective field theory. We adopt both the chiral current and the pseudoscalar current in the correlation functions. The results are compared with those from other approaches and experiments.

## Keywords

$B \rightarrow \eta \ell \nu$ , Light Cone Sum Rule, Heavy Quark Expansion

---

# 重夸克展开下 $B \rightarrow \eta \ell \nu$ 的光锥求和规则计算

马晨亮

北京科技大学数理学院, 北京  
Email: [lianxingqingjie@163.com](mailto:lianxingqingjie@163.com)

收稿日期: 2014年11月20日; 修回日期: 2014年12月28日; 录用日期: 2015年1月7日

---

## 摘要

本文利用光锥求和规则讨论  $B \rightarrow \eta \ell \nu$  半轻衰变形状因子, 并估算了分支比。计算在重夸克有效场论框架

下进行，且在关联函数中分别采用手征流和赝标流，并且对不同方法的计算结果及实验数据作了比较。

## 关键词

$B \rightarrow \eta \ell \nu$ ，光锥求和规则，重夸克展开

## 1. 引言

$B$  介子到轻介子的半轻衰变是抽取 CKM 矩阵元数值  $|V_{ub}|$  的最重要途径。但是目前确定的  $|V_{ub}|$  结果相对于  $|V_{cb}|$  而言还有较大不确定度，而且从单举衰变  $B \rightarrow X \ell \nu$  和遍举衰变  $B \rightarrow \pi(\rho) \ell \nu$  抽取的  $|V_{ub}|$  值还有较明显差异[1]。对于  $B$  介子到其他轻介子衰变如  $B \rightarrow \eta(\eta') \ell \nu$  的研究将有助于  $|V_{ub}|$  的更准确确定，当然也有助于了解  $\eta - \eta'$  混合，所以成为近年来实验和理论上很受关注的问题。文献[2] [3] [4]利用 QCD 光锥求和规则计算了  $B \rightarrow \eta(\eta') \ell \nu$  形状因子，文献[5] [6]则计算了类似的过程  $D_s \rightarrow \eta(\eta') \ell \nu$ 。由于  $B$  含有一个重夸克和一个轻夸克，人们也经常利用重夸克有效理论来处理有关衰变[9]-[13]。例如文献[13]在统一的重夸克有效场论框架下计算了  $B, D_s, B_s$  等重介子到轻介子  $\pi, \rho, K, K^*$  的衰变。其优点是可以明显体现出不同重强子衰变形状因子间的联系。

本文在重夸克有效场论框架下利用光锥求和规则方法讨论  $B \rightarrow \eta \ell \nu$  衰变。之前文献计算重介子到轻介子的衰变关联函数多采用赝标流，文献[14]为消除扭度 3 贡献以减小不确定度而提出采用手征流，文献[2]也据此采用手征流计算了  $B \rightarrow \eta \ell \nu$ 。本文计算中，关联函数中将分别采用手征流和赝标流，根据计算结果对夸克流的选取作比较。本文结构如下：第二节给出形状因子定义，以及与重夸克有效场论下相关波函数的联系；第三节采用不同的流组成关联函数，并由此展开光锥求和规则计算；第四节根据求和规则等式作数值分析，得到形状因子和衰变分支比。最后是简要总结。

## 2. $B \rightarrow \eta \ell \nu$ 跃迁矩阵元和形状因子

与半轻衰变  $B \rightarrow \eta \ell \nu$  相关的强子矩阵元是  $\langle \eta | \bar{u} \gamma^\mu b | B \rangle$ ，其行为可以用两个形状因子  $f_+$  和  $f_-$  表示：

$$\langle \eta(p) | \bar{u} \gamma^\mu b | B(p+q) \rangle = 2f_+(q^2) p^\mu + (f_+(q^2) + f_-(q^2)) q^\mu \quad (1)$$

其中  $q$  为放出的轻子对动量。 $f_+$  和  $f_-$  包含 QCD 非微扰效应，所以无法从 QCD 微扰计算得到。如果忽略轻子质量， $B \rightarrow \eta \ell \nu$  的微分衰变宽度为

$$\frac{d\Gamma}{dq^2} = \frac{G_F^2 |V_{ub}|^2}{24\pi^3} (E_\eta^2 - m_\eta^2)^{3/2} [f_+(q^2)]^2 \quad (2)$$

式中  $E_\eta = (m_B^2 + m_\eta^2 - q^2)/(2m_B)$ 。因此，对形状因子  $f_+(q^2)$  的计算是了解该衰变过程的关键。

从 QCD 出发，通过场的重新定义，并积分掉夸克场小分量，可以得到有效拉氏密度及矩阵元重夸克展开式。相应地，(1)式中的跃迁矩阵元也可以展开为[13]

$$\langle \eta | \bar{u} \gamma^\mu b | B \rangle = \sqrt{\frac{m_B}{\Lambda_B}} \left\{ \langle \eta | \bar{u} \gamma^\mu Q_v^+ | M_v \rangle + O(1/m_Q) \right\} \quad (3)$$

其中  $Q_v^+$  是重夸克有效场，重介子有效态  $|M_v\rangle$  归一化关系为  $\langle M_v | \bar{Q}_v^+ \gamma^\mu Q_v^+ | M_v \rangle = 2\bar{\Lambda}_v \nu^\mu$ 。而  $\bar{\Lambda}_B$  定义为  $\bar{\Lambda}_B = m_B - m_b$ ，其极限  $\bar{\Lambda} \equiv \lim_{m_Q \rightarrow \infty} \bar{\Lambda}_B$  是重介子束缚能，它与重夸克质量无关。 $O(1/m_Q)$  表示重夸克展开的  $1/m_Q$  修正，在本文计算中将忽略。

基于重夸克自旋-味道对称性, 跃迁矩阵元可参数化为

$$\langle \eta(p) | \bar{u} \Gamma Q_v^+ | M_\nu \rangle = -\text{Tr}[\eta(v, p) \Gamma \mathcal{M}_\nu] \quad (4)$$

上式中  $\Gamma$  代表狄拉克矩阵的任意组合,  $\mathcal{M}_\nu$  是与味道无关的自旋波函数。对于赝标介子,  $\mathcal{M}_\nu = -\sqrt{\Lambda} \frac{1+\not{v}}{2} \gamma^5$ 。而函数  $\eta(v, p)$  可以分解为

$$\eta(v, p) = \gamma^5 [A(v \cdot p) + \hat{p} B(v \cdot p)], \quad \hat{p} = \frac{\not{p}}{v \cdot p} \quad (5)$$

如此定义的洛伦兹标量函数  $A, B$  与重夸克质量无关, 我们称其为有效场论框架下的波函数。

综合式(1)~(5), 通过求迹计算可得形状因子与  $A, B$  的联系:

$$f_\pm(q^2) = \sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{m_B \Lambda_B}} \left\{ A(v \cdot p) \pm B(v \cdot p) \frac{m_b}{v \cdot p} \right\} \quad (6)$$

### 3. 光锥求和规则

作为光锥求和规则分析的出发点, 我们先考虑两点格林函数

$$F^\mu(p, q) = i \int d^4 x e^{iq \cdot x} \left\langle \eta(p) \left| T \left\{ \bar{u}(x) \gamma^\mu (1 + \gamma^5) b(x), \bar{b}(0) i (1 + \gamma^5) u(0) \right\} \right| 0 \right\rangle \quad (7)$$

上式中采用了手征流  $\bar{b} i (1 + \gamma^5) u$ , 这一选择的好处是求和规则计算中将不再涉及扭度3的光锥分布函数, 而这些分布函数目前还具有很大不确定度。为便于表述, 暂时忽略  $\eta - \eta'$  混合。

在(7)式中两流之间插入具有  $B$  介子量子数的完备组态, 可得唯象表示

$$F^\mu(p, q)_{ph} = \frac{\langle \eta(p) | \bar{u} \gamma^\mu b | B \rangle \langle B | \bar{b} i \gamma^5 u | 0 \rangle}{m_B^2 - (p+q)^2} + \sum_h \frac{\langle \eta(p) | \bar{u} \gamma^\mu b | h \rangle \langle h | \bar{b} i \gamma^5 u | 0 \rangle}{m_h^2 - (p+q)^2} \quad (8)$$

式中两项分别代表  $B$  介子态及更高能态  $|h\rangle$  插入后的结果。在有效理论中, 第一项可以用(5)式中的波函数  $A, B$  及  $B$  介子衰变常数表示, 而第二项可以表示为对于谱函数  $\rho$  的积分形式, 即表示为

$$F^\mu(p, q)_{ph} = 2iF \frac{m_B \bar{\Lambda}}{m_b \Lambda_B} \frac{A v^\mu + B \hat{p}^\mu}{2\bar{\Lambda}_B - \omega} + \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\rho(y, s)}{s - \omega} \quad (9)$$

其中  $y = v \cdot p = (m_B^2 + m_\eta^2 - q^2)/(2m_B)$ ,  $\omega = 2v \cdot k$ 。  $F$  为有效场论中定义的  $B$  介子衰变常数(重夸克展开领头阶),  $\langle 0 | \bar{q} \Gamma Q_v^+ | B_\nu \rangle = \frac{F}{2} \text{Tr}[\Gamma \mathcal{M}_\nu]$ 。同时, 关联函数(7)可以在 QCD 或其有效理论框架下被计算, 结果也可以表示为对谱函数积分的形式。从夸克-强子二象性假设, 可令唯象表示和理论表示相等。为了突出基态贡献并降低高阶非微扰贡献, 还应对等式两边同时做 Borel 变换:

$$\hat{B}_T^{(\omega)} \equiv \lim_{\substack{-\omega, n \rightarrow \infty \\ -\omega/n = T}} \frac{(-\omega)^{n+1}}{n!} \left( \frac{d}{d\omega} \right)^n$$

最终得到的求和规则等式形式为:

$$2iF \frac{m_B \bar{\Lambda}}{m_b \Lambda_B} [A(y) v^\mu + B(y) \hat{p}^\mu] e^{-2\bar{\Lambda}_B/T} = \int_0^{s_0} ds \rho(y, s) e^{-s/T} \quad (10)$$

我们在重夸克有效场论下计算关联函数(7)并以光锥分布函数来表示。此时重夸克有效场  $Q_v^+(x)$  与

$\bar{Q}_\nu^+$  (0) 缩并为传播子:

$$\frac{1+\gamma}{2} \int_0^\infty dt \delta(x-vt)$$

相比 QCD 夸克场传播子而言, 这使得计算很简单, 而且仅需涉及两粒子光锥分布函数。得到的谱密度是:

$$\rho(y, s) = \frac{f_\eta}{y} \left[ v^\mu \left( \frac{m_\eta^2}{2y} \mathbb{B}(u) \right) + \hat{p}^\mu \left( y \phi_\eta(u) - \frac{m_\eta^2}{16y} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbb{A}(u) \right) \right]_{u=1-\frac{s}{2y}} \quad (11)$$

其中  $\phi_\eta(u)$ 、 $\mathbb{A}(u)$ 、 $\mathbb{B}(u)$  是扭度为 2、4、4 的  $\eta$  介子光锥分布函数[3]。所以波函数可表示为

$$A(y) = \frac{f_\eta}{2yF} \frac{m_b \bar{\Lambda}_B}{m_B \bar{\Lambda}} \int_0^{s_0} ds e^{\frac{2\bar{\Lambda}_B - s}{T}} \left[ \frac{m_\eta^2}{2y} \mathbb{B}(u) \right]_{u=1-\frac{s}{2y}} \quad (12)$$

$$B(y) = \frac{f_\eta}{2yF} \frac{m_b \bar{\Lambda}_B}{m_B \bar{\Lambda}} \int_0^{s_0} e^{\frac{2\bar{\Lambda}_B - s}{T}} \left[ y \phi_\eta(u) - \frac{m_\eta^2}{16y} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbb{A}(u) \right]_{u=1-\frac{s}{2y}} \quad (13)$$

式中  $s_0$  为阈值。

在求和规则计算中, 对于关联函数中流的选取具有一定自由度。在上述计算中我们在关联函数(7)中采用了手征流  $\bar{b}i(1+\gamma^5)u$ 。如果采用赝标流  $\bar{b}i\gamma^5 u$ , 则关联函数为

$$F^\mu(p, q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \eta(p) | T \{ \bar{u}(x) \gamma^\mu b(x) \bar{b}(0) i\gamma^5 u(0) \} | 0 \rangle \quad (14)$$

此时可得到谱密度

$$\rho(y, s) = \frac{f_\eta}{2y} \left[ v^\mu \left( \frac{m_\eta^2}{2y} \mathbb{B}(u) + \frac{m_\eta^2}{4} \frac{\phi_p(u)}{m_s} + \frac{1}{6} \frac{m_\eta^2}{4} \frac{m_s}{m_\eta} \left( 1 - \left( \frac{4}{3} \frac{m_s}{m_\eta} \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial u} \phi_\sigma(u) \right) \right. \\ \left. + \hat{p}^\mu \left( y \phi_\eta(u) - \frac{m_\eta^2}{16y} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbb{A}(u) - \frac{1}{6} \frac{m_\eta^2}{4} \frac{m_s}{m_\eta} \left( 1 - \left( \frac{4}{3} \frac{m_s}{m_\eta} \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial u} \phi_\sigma(u) \right) \right]_{u=1-\frac{s}{2y}} \quad (15)$$

其中  $\phi_p$ 、 $\phi_\sigma$  是扭度为 3 的  $\eta$  介子光锥分布函数[3]。此时得到的波函数为

$$A(y) = \frac{f_\eta}{4yF} \frac{m_b \bar{\Lambda}_B}{m_B \bar{\Lambda}} \int_0^{s_0} ds e^{\frac{2\bar{\Lambda}_B - s}{T}} \left[ \frac{m_\eta^2}{2y} \mathbb{B}(u) + \frac{m_\eta^2}{4} \frac{\phi_p(u)}{m_s} + \frac{1}{6} \frac{m_\eta^2}{4} \frac{m_s}{m_\eta} \left( 1 - \left( \frac{4}{3} \frac{m_s}{m_\eta} \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial u} \phi_\sigma(u) \right]_{u=1-\frac{s}{2y}} \quad (16)$$

$$B(y) = \frac{f_\eta}{4yF} \frac{m_b \bar{\Lambda}_B}{m_B \bar{\Lambda}} \int_0^{s_0} e^{\frac{2\bar{\Lambda}_B - s}{T}} \left[ y \phi_\eta(u) - \frac{m_\eta^2}{16y} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbb{A}(u) - \frac{1}{6} \frac{m_\eta^2}{4} \frac{m_s}{m_\eta} \left( 1 - \left( \frac{4}{3} \frac{m_s}{m_\eta} \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial u} \phi_\sigma(u) \right]_{u=1-\frac{s}{2y}} \quad (17)$$

#### 4. 数值分析

光锥求和规则计算所需的输入参数包括衰变常数等强子参数和光锥分布振幅，以及合理的阈值  $s_0$ 。对于  $\eta$  介子，质量  $m_\eta = 0.548 \text{ GeV}$ ，衰变常数  $f_\eta = 1.07 f_\pi = 0.140 \text{ GeV}$  [4]。对于  $B$  介子，在有效场论框架下得到  $\bar{\Lambda} \approx \bar{\Lambda}_B = 0.53 \text{ GeV}$ ， $F = 0.30 \text{ GeV}^{3/2}$  [12]。对于光锥分布函数中的光锥分布振幅，我们采用文献[3]给出的结果，

$$a_2 = 0.115, \quad a_4 = -0.015, \quad \eta_3 = 0.013, \quad \omega_3 = -3, \quad \eta_4 = 0.5, \quad \omega_4 = 0.2$$

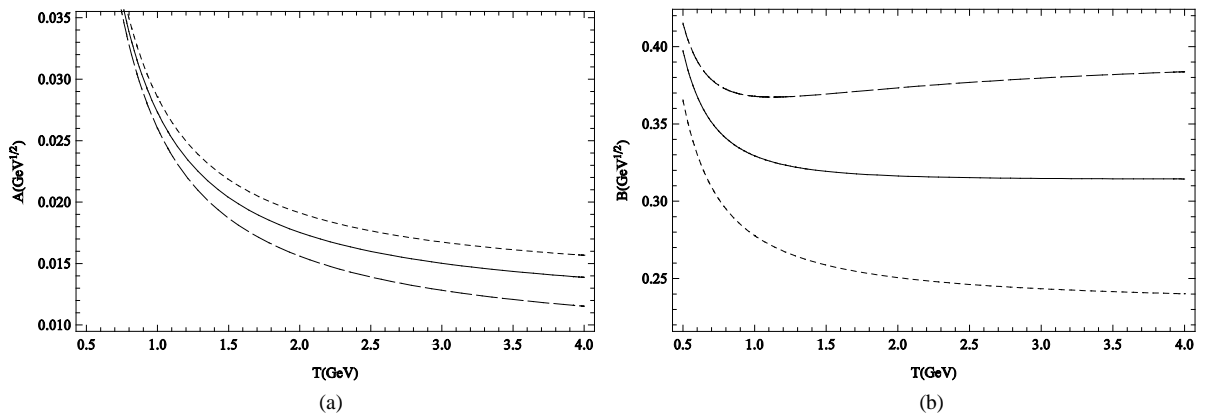
确定了以上输入参数后就可以利用式(12)，(13)分析波函数  $A$ 、 $B$ 。图 1 显示了取不同阈值  $s_0$  时  $A$ 、 $B$  在零反冲点的值随 Borel 参数  $T$  的变化曲线。求和规则方法只在当高阶非微扰修正及激发态和连续态的贡献都不太大的情况下有效，所以我们主要考察  $T = 2.0 \pm 0.5 \text{ GeV}$  区域。从图上看  $A$  没有一个很理想的求和规则平台，但选取阈值在  $s_0 = 1.7 \pm 0.3 \text{ GeV}$  时  $B$  随  $T$  变化很小，且  $A$  的曲线也相对平稳。

当  $s_0$  和  $T$  确定后，就可以计算形状因子和波函数随  $q^2$  的变化情况。不过由于光锥展开仅在小  $q^2$  区域有效，在大  $q^2$  区域不能由前述公式直接计算得真实物理结果。采用常用的方法，我们先在  $0 \leq q^2 \leq 15 \text{ GeV}^2$  区间把以上求和规则计算的结果表示为双极点形式：

$$f_+(q^2) = \frac{f_+(0)}{1 - a(q^2/m_B^2) + b(q^2/m_B^2)^2} \quad (18)$$

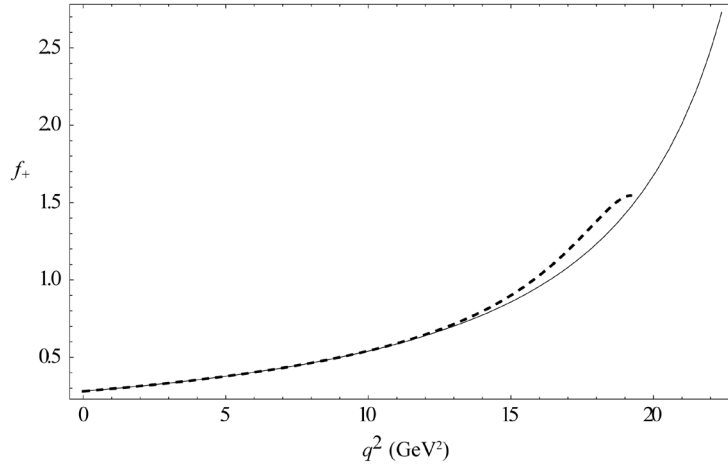
然后再把它拓展应用到整个动力学区间。拟合得到式中参数值为  $f_+(0) = 0.28, a = 1.52, b = 0.50$ 。图 2 展示了理论计算的  $f_+(q^2)$  和拟合后的  $f_+(q^2)$  函数曲线。可以看出，两者在区间  $0 \leq q^2 \leq 15 \text{ GeV}^2$  非常接近，而当  $q^2$  变得更大，两者明显分离。查粒子表可知  $B$  介子寿命  $\tau_{B^\pm} = 1.638 \text{ ps}$  和  $V_{ub} = 3.28 \times 10^{-3}$ ，进而可得分支比  $Br(B \rightarrow \eta \ell \nu) = 1.17 \times 10^{-4}$ 。

如果采用关联函数(14)，也可根据计算结果(16)和(17)做类似分析。图 3 是此时波函数随 Borel 参数  $T$  的变化情况，由图可见对于  $A$ 、 $B$  这两个波函数， $s_0 = 2.1 \pm 0.3 \text{ GeV}$  时曲线都很平坦，与手征流情况相比具有更好的稳定性。我们同样采用双极点形式来将结果拓展到整个物理的动力学区间。为直观和便于比较，表 1 给出了  $f_+(0)$ ，参数  $a$ 、 $b$  和分支比。



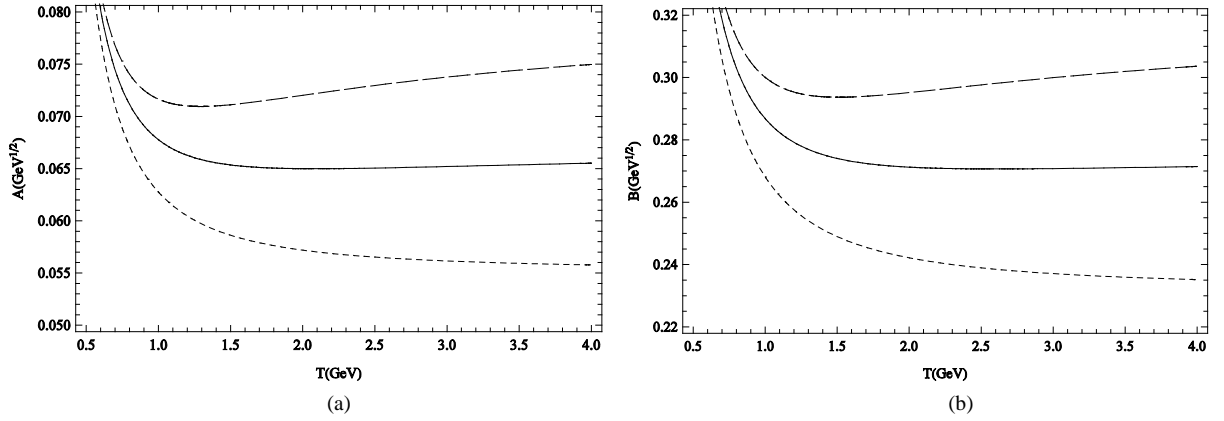
**Figure 1.** Variation of wave functions  $A$  and  $B$  with respect to the Borel parameter  $T$  at the momentum transfer  $q^2 = 0 \text{ GeV}^2$  when choosing the chiral current. The dashed, solid and dotted curves correspond to the threshold  $s_0 = 1.4, 1.7, 2.0 \text{ GeV}$  respectively

**图 1.** 采用手征流计算，波函数在  $q^2 = 0 \text{ GeV}^2$  点的数值随 Borel 参数  $T$  的变化曲线。点线、实线、虚线分别对应于  $s_0 = 1.4, 1.7, 2.0 \text{ GeV}$



**Figure 2.** Variation of form factor  $f_+$  with respect to the momentum transfer  $q^2$  when choosing the chiral current. The dashed curve is calculated from light cone sum rules for  $s_0 = 1.7$  GeV and  $T = 2.0$  GeV. The solid curve is the parameterized result

**图 2.** 用手征流计算的形状因子  $f_+(q^2)$ 。点线是光锥求和规则结果，取阈值  $s_0 = 1.7$  GeV 并固定  $T = 2.0$  GeV。实线是参数化后的双极点函数



**Figure 3.** Variation of wave functions  $A$  and  $B$  with respect to the Borel parameter  $T$  at the momentum transfer  $q^2 = 0$  GeV<sup>2</sup> when choosing the pseudoscalar current. The dashed, solid and dotted curves correspond to the threshold  $s_0 = 1.8, 2.1, 2.4$  GeV respectively

**图 3.** 采用赧标流计算，波函数在  $q^2 = 0$  GeV<sup>2</sup> 点的数值随 Borel 参数  $T$  的变化曲线。点线、实线、虚线分别对应于  $s_0 = 1.8, 2.1, 2.4$  GeV

**Table 1.** The values of form factor  $f_+$  at  $q^2 = 0$  GeV<sup>2</sup>, parameters  $a$  and  $b$ , and the branching ratio. “This work (A)” corresponds to the results from the chiral current, “This work (B)” corresponds to those from the pseudoscalar current

**表 1.** 形状因子  $f_+$  的零反冲点数值、参数  $a$  和  $b$ 、衰变分支比。其中“this work (A)”表示采用手征流计算的结果，“this work (B)”表示采用赧标流计算的结果

	$f_+(0)$	$a$	$b$	$Br(B \rightarrow \eta \ell \nu)$
This work (A)	0.28	1.52	0.50	$1.17 \times 10^{-4}$
This work (B)	0.26	1.45	0.45	$0.94 \times 10^{-4}$

从解析式(11), (15)和图表中计算结果可以看出, 虽然用赝标流得到的  $\rho_A$  和  $\rho_B$  分别比用手征流的结果多了  $\phi_p$ 、 $\phi_\sigma$  两项和少了  $\phi_\sigma$  一项, 这会导致波函数计算结果差异。例如在  $q^2 = 0$  处前者得到  $A$  值 ( $0.065 \text{ GeV}^{1/2}$ ) 大于后者 ( $0.018 \text{ GeV}^{1/2}$ ), 而前者得到的  $B$  值 ( $0.27 \text{ GeV}^{1/2}$ ) 小于后者 ( $0.32 \text{ GeV}^{1/2}$ ), 但是从(6)式可知  $f_+$  中  $A$  和  $B$  贡献的这些差异会部分抵消, 从而取不同流计算得到的  $f_+$  值相差不大。

以上计算中是把  $\eta$  介子当作跟  $\pi$  介子一样来处理, 未考虑与  $\eta'$  介子的混合。实际应该考虑混合, 采用夸克-味道混合方案[15], 有

$$\begin{pmatrix} |\eta\rangle \\ |\eta'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\eta_q\rangle \\ |\eta_s\rangle \end{pmatrix} \quad (19)$$

其中混合角  $\phi = 39.3^\circ$ 。相应地关联函数之间的关系为

$$F_\eta^\mu = F_q^\mu \cos\phi - F_s^\mu \sin\phi \quad (20)$$

由于关联函数中流为  $\bar{u}\gamma^\mu(1+\gamma^5)b$  或  $\bar{u}\gamma^\mu b$ , 只考虑  $\alpha_s$  领头阶贡献  $F_s^\mu$  为零。于是

$$F_\eta^\mu = F_q^\mu \cos\phi \quad (21)$$

之前计算中取的  $|\eta\rangle$  实际为考虑混合后的  $|\eta_q\rangle$ , 因此形状因子和衰变分支比分别需要  $\cos\phi$  和  $\cos^2\phi$  的因子修正。我们把考虑  $\eta-\eta'$  混合后得到的结果列于表 2。作为比较, 表中也同时列出了其他一些工作得到的结果。从表 2 可以看出, 重夸克有效场论框架下的衰变分支比, 与从完整 QCD 出发得到的结果略有出入, 比实验结果稍大, 但基本在误差允许的范围内。

## 5. 结论

我们用光锥求和规则方法计算了半轻衰变  $B \rightarrow \eta \ell \nu$  形状因子  $f_+$ 。计算在重夸克有效场论框架下进行。由  $b$  夸克有效场的传播子形式简单, 计算得到简化。重夸克有效场不发出胶子线, 所以计算中仅涉及两粒子光锥分布函数, 三粒子及多粒子分布函数在重夸克展开的高阶才会出现。

本文在作为研究出发点的强子关联函数中分别采用了手征流和赝标流进行计算。取手征流计算的优势是结果不涉及不确定度大的扭度 3 的  $\eta$  介子分布函数, 但我们发现波函数  $A$  随  $T$  变化没有一个很理想的平台区域。而取赝标流时虽然涉及更多光锥分布函数, 但求和规则平台获得了更好稳定性。

**Table 2.** The values of form factor  $f_+$  at  $q^2 = 0 \text{ GeV}^2$ , parameters  $a$  and  $b$ , and the branching ratio considering the  $\eta-\eta'$  mixing. “This work (A)” corresponds to the results from the chiral current, “This work (B)” corresponds to those from the pseudoscalar current  
**表 2.** 考虑  $\eta-\eta'$  混合后的形状因子  $f_+$  的零反冲点数值、参数  $a$  和  $b$ 、衰变分支比。其中 “This work (A)” 表示采用手征流计算的结果, “This work (B)” 表示采用赝标流计算的结果

	$f_+(0)$	$a$	$b$	$Br(B \rightarrow \eta \ell \nu)$
This work (A)	0.22	1.52	0.50	$0.70 \times 10^{-4}$
This work (B)	0.20	1.45	0.45	$0.56 \times 10^{-4}$
QCD LCSR [2]	0.15	1.08	0.22	$0.16 \times 10^{-4}$
QCD LCSR [4]	0.229			
QCD LCSR [6]	0.238			$0.73 \times 10^{-4}$
Experiment [7]				$(0.44 \pm 0.23 \pm 0.11) \times 10^{-4}$
Experiment [8]				$(0.36 \pm 0.05 \pm 0.04) \times 10^{-4}$



目前对  $B \rightarrow \eta \ell \nu$  的实验和理论研究结果都还有很大不确定度。本文给出的分支比数值在实验误差允许范围内，但比实验结果中心值偏大。更深入的研究需要更细致地考虑  $\eta - \eta'$  混合、重夸克展开高阶修正以及更高扭度分布函数的贡献。

## 参考文献 (References)

- [1] Kowalewski, R. and Mannel, T. (2012) Determination of  $|V_{cb}|$  and  $|V_{ub}|$ . *Physical Review D*, **86**, 1111.
- [2] Aliev, T.M., Kanik, I. and Ozpineci, A. (2003) Semileptonic  $B \rightarrow \eta \ell \nu$  decay in light cone QCD. *Physical Review D*, **67**, Article ID: 094009.
- [3] Ball, P. and Zwicky, R. (2005) New results on  $B \rightarrow \pi, K, \eta$  decay form factors from light-cone sum rules. *Physical Review D*, **71**, Article ID: 014015.
- [4] Ball, P. and Jones, G.W. (2007)  $B \rightarrow \eta'$  form factors in QCD. *Journal of High Energy Physics*, **8**, 25.
- [5] Azizi, K., Khosravi, R. and Falahati, F. (2011) Exclusive  $D_s \rightarrow (\eta, \eta') \ell \nu$  decays in light cone QCD. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, **38**, Article ID: 095001.
- [6] Offen, N., Porkert, F.A. and Schafer, A. (2013) Light-cone sum rules for the  $D_{(s)} \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell \nu$  form factor. *Physical Review D*, **88**, Article ID: 034023.
- [7] Adam, N.E., et al. (CLEO Collaboration) (2007) Study of exclusive charmless semileptonic B decays and  $|V_{ub}|$ . *Physical Review Letters*, **99**, Article ID: 041802.
- [8] del Amo Sanchez, P., et al. (BABAR Collaboration) (2011) Measurement of the  $B^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$  and  $B^+ \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell^+ \nu$  branching fractions, the  $B^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$  and  $B^0 \rightarrow \eta \ell^+ \nu$  form-factor shapes, and determination of  $|V_{ub}|$ . *Physical Review D*, **83**, Article ID: 052011.
- [9] Isgur, N. and Wise, M.B. (1989) Weak decays of heavy mesons in the static quark approximation. *Physics Letters B*, **232**, 113-117.
- [10] Falk, A.F., Grinstein, B. and Luke, M.E. (1991) Leading mass corrections to the heavy quark effective theory. *Nuclear Physics B*, **357**, 185-207.
- [11] Luke, M. and Manohar, A.V. (1992) Reparameterisation invariance constraints on heavy particle effective field theories. *Physics Letters B*, **286**, 348-354.
- [12] Wang, W.Y., Wu, Y.L. and Ye, F. (2011) Heavy quark expansion in  $1/\hat{m}_Q$  and  $|V_{cb}|$  extraction. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, **38**, Article ID: 045004.
- [13] Wang, W.Y., Wu, Y.L. and Zhong, M. (2003) Heavy to light meson exclusive semileptonic decays in effective field theory of heavy quarks. *Physical Review D*, **67**, Article ID: 014024.
- [14] Huang, T., Li, Z.-H. and Wu, X.-Y. (2001) Improved approach to the heavy-to-light form factors in the light-cone QCD sum rules. *Physical Review D*, **63**, Article ID: 094001.
- [15] Feldmann, Th., Kroll, P. and Stech, B. (1998) Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons. *Physical Review D*, **58**, Article ID: 114006.