Modern Physics 现代物理, 2019, 9(6), 277-281
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2019.96027

An Analysis for the Error of a Common Derivation Process of $E = Mc^2$ on the Internet

Yifeng Wang

Kunming Institute of Physics, Kunming Yunnan
Email: wangyifeng63@qq.com

Received: Oct. 11th, 2019; accepted: Oct. 29th, 2019; published: Nov. 5th, 2019

Abstract

A derivation process of $E = Mc^2$, which is widely spread on the internet, is checked in detail by the engineering calculation software MATLAB. The results show that it is impossible to deduce $E = Mc^2$ by using existing mathematical tools correctly. This paper introduces the method of deducing $E = Mc^2$ from physical and mathematical point of view based on dimensional analysis, which is independent of relativity.

Keywords

Dimensional Analysis, Mass-Energy Relationship, Special Relativity, Principle of Light Speed

试析网上常见的一个$E = Mc^2$推导过程中的错误

王忆锋

昆明物理研究所，云南 昆明
Email: wangyifeng63@qq.com

收稿日期：2019年10月11日；录用日期：2019年10月29日；发布日期：2019年11月5日

摘 要

用工程计算软件MATLAB详细分析验算了网上流传较广的一个$E = Mc^2$的推导过程，结果表明在正确使用现有数学工具的前提下，该过程不可能推导出$E = Mc^2$。介绍了基于量纲分析，从物理和数学角度推导$E = Mc^2$的方法，该方法与相对论无关。

文章引用: 王忆锋. 试析网上常见的一个 $E = Mc^2$ 推导过程中的错误[J]. 现代物理, 2019, 9(6): 277-281.
DOI: 10.12677/mp.2019.96027

关键词

量纲分析，质量－能量关系式，狭义相对论，光速原理

1. 引言

$E = Mc^2$ 是一个著名的公式(其中，E 为能量，M 为质量，c 为光速)，在(狭义)相对论中称为质量－能量关系式，或者称为质能方程，它是相对论的基础之一。一个源自国外出版物的基于微积分推导 $E = Mc^2$ 的计算过程在网上流传较广。作者用 MATLAB 对该计算过程逐步进行了详细分析和验算，结果表明在正确使用现有数学工具的前提下，该过程不可能推导出 $E = Mc^2$。可以基于量纲分析方法，从物理和数学角度推导 $E = Mc^2$，该方法与相对论无关。

2. 用 MATLAB 验算网上常见的一个推导 $E = Mc^2$ 过程

网上常见的一个推导 $E = Mc^2$ 的过程如图 1 所示[1]。限于条件，作者未能查到其原始出处，这里只是转引。

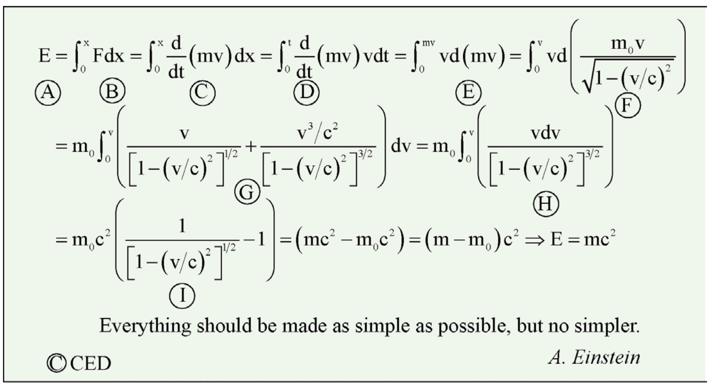

Figure 1. A common derivation process of $E = Mc^2$ on the internet
图 1. 网上常见的一个推导 $E = Mc^2$ 过程

在函数记号 $y = f(x)$ 中，x 称为自变量，y 称为因变量。定积分的一般形式为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，式中积分下限 a 和积分上限 b 均为常数，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为固定积分限的积分。积分号里面 $\mathrm{d}x$ 之外的部分称为被积函数。如果积分限是变化的，则称为变限积分；变限可以是只变一个积分限，例如 $\int_0^{\sin t} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 等；也可以是两个积分限同时变化，例如 $\int_{\cos t}^{\sin t} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 等。变限积分还有一种比较特殊的形式，即以被积函数 $f(x)$的自变量 x 作为积分的上限或者下限，例如 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 等。

MATLAB 是一款功能强大的工程计算软件，是科学技术领域应用和影响最广泛的三个计算机数学语言之一。利用 MATLAB 的符号运算工具箱，可以直接求解一般的微积分计算问题。当然 MATLAB 不是万能的，对于某些特殊的微积分问题，MATLAB 同样无能为力。

$y = f(x)$ 的微分定义为[2]

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

式中 $f'(x)$ 为一阶导数。进一步取 $f'(x)$ 的导数可以得到二阶、三阶及高阶导数。在 MATLAB 中，如果函数及自变量已知且均为符号变量，可以用 diff( )命令求解给定函数的各阶导数。

具体到图 1 中的(F)环节，这里用圆括号( )代替图 1 中的○，记

$$\mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{v}) = \frac{\mathrm{m_0 v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v/c})^2}} \tag{2}$$

这里为了便于比较，式(2)与图 1 中的记号对应一致，有关符号均未使用斜体。

在 MATLAB 中输入下列语句

```
>> syms m0 c v;
>> simple(diff((m0*v)/sqrt(1-(v/c)^2),v))
```

simple( )为 MATLAB 的化简命令。化简后的最终结果为

```
ans =m0/(-(-c^2+v^2)/c^2)^(3/2)
```

将上述结果写成解析形式，即有

$$\mathrm{y}'(\mathrm{v}) = \frac{\mathrm{m_0}}{\left[1-(\mathrm{v/c})^2\right]^{3/2}} \tag{3}$$

于是图 1 中的(F)环节为

$$\mathrm{dy} = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{m_0 v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v/c})^2}}\right) = \mathrm{y}'(\mathrm{v})\mathrm{dv} = \frac{\mathrm{m_0}}{\left[1-(\mathrm{v/c})^2\right]^{3/2}}\mathrm{dv} \tag{4}$$

由此得到图 1 中的(H)环节

$$\int_0^{\mathrm{v}} \mathrm{v}\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{m_0 v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v/c})^2}}\right) = \mathrm{m_0}\int_0^{\mathrm{v}} \frac{\mathrm{vdv}}{\left[1-(\mathrm{v/c})^2\right]^{3/2}} \tag{5}$$

注意到这是一个以被积函数的自变量 v 为上限的变限积分。输入下列命令，

```
>> syms v c m0
>> m0*int(v/(1-(v/c)^2)^(3/2),v,0,v)
```

显示的信息为

```
??? Error using ==> sym/maple
Error, (in limit) invalid limiting point
```

表明 MATLAB 无法直接计算式(5)所示的自变量 v 为上限的变限积分。需要指出的一点是，由于 MATLAB 不是一个开源软件，在满足 MATLAB 使用规则的前提下，对于 MATLAB 不能计算的情况，无法追溯到 MATLAB 源码处理层次找到运算过程，看一看它为什么不能计算，具体到这里的情况，无法解释到底为什么出错或者为什么不能计算，也无法补充支持不规范的源码级运算过程内容，只能选择

接受或者不接受。

下面换一个角度来看一看图 1 中的(H)环节即式(5)的计算问题。文献[3]第 294~295 页给出了一道例题 33，为了方便对比，现将该例题及有关证明部分摘录如下：

设函数 $f(x)$在闭区间$\left[a,b\right]$上具有连续的二阶导数，试证：存在$\xi\in\left(a,b\right)$，使得

$$\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(b-a\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}\left(b-a\right)^3 f''\left(\xi\right) \tag{6}$$

证法一：设$F\left(x\right)=\int_a^x f\left(x\right)\mathrm{d}x$，在$x_0=\dfrac{a+b}{2}$的二阶泰勒公式为

$$\begin{aligned}F\left(x\right)=\int_a^x f\left(x\right)\mathrm{d}x=&\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\\&+\frac{1}{2!}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f''\left(\xi_1\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\end{aligned} \tag{7}$$

式(7)中的ξ_1在$\left(a+b\right)/2$和 x 之间。该题后面的证明过程与本文无关，暂略。

具体到式(5)来说，其中的被积函数可以记为

$$f\left(\mathrm{v}\right)=\frac{\mathrm{v}}{\left[1-\left(\mathrm{v}/\mathrm{c}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{8}$$

利用 diff( )可以求出其一阶导数

```
>> diff(v/(1-(v/c)^2)^(3/2),v)
ans =1/(1-v^2/c^2)^(3/2)+3*v^2/(1-v^2/c^2)^(5/2)/c^2
```

即

$$f'\left(\mathrm{v}\right)=\frac{1}{\left[1-\left(\mathrm{v}/\mathrm{c}\right)^2\right]^{3/2}}+\frac{3}{\left[1-\left(\mathrm{v}/\mathrm{c}\right)^2\right]^{5/2}}\cdot\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2 \tag{9}$$

利用 diff( )还可以求出其二阶导数

```
>> diff(v/(1-(v/c)^2)^(3/2),v,2)
ans = 9/(1-v^2/c^2)^(5/2)*v/c^2+15*v^3/(1-v^2/c^2)^(7/2)/c^4
```

即

$$f''\left(\mathrm{v}\right)=\frac{9\mathrm{v}}{\mathrm{c}^2\left[1-\left(\mathrm{v}/\mathrm{c}\right)^2\right]^{5/2}}+\frac{15\mathrm{v}^3}{\mathrm{c}^4\left[1-\left(\mathrm{v}/\mathrm{c}\right)^2\right]^{7/2}} \tag{10}$$

比较一下式(5)和(7)，如果再把一阶导数表达式(9)和二阶导数表达式(10)代入，可以看出在图 1 所示的计算过程中难以从(H)得到(I)。那么(I)是如何得到的？

在 MATLAB 中输入下列语句

```
>> syms v c m0
>> simple(m0*int(v/(1-(v/c)^2)^(3/2),v,0,w))
```

化简后的最终结果为

```
ans =m0*c^2/(1-1/c^2*w^2)^(1/2)-m0*c^2
```

即

$$E=\cdots=m_0\int_0^w \frac{vdv}{\left[1-(v/c)^2\right]^{3/2}}=m_0c^2\left(\frac{1}{\left[1-(w/c)^2\right]^{1/2}}-1\right) \tag{11}$$

得到这个形式的结果仅仅是因为改变了一下积分上限的符号；换言之，在图 1 所示的计算过程中，从(F)环节到(H)环节，积分上限均为被积函数的自变量 v；等到(H)环节要具体计算定积分的时候，先把 v 换成另外一个非自变量符号例如 w，得到积分结果以后再将 w 换回 v，于是得到了(I)环节所示的结果，即

$$\begin{array}{ccc} m_0\int_0^v \frac{vdv}{\left[1-(v/c)^2\right]^{3/2}} & \Rightarrow \text{将积分限中的自变量v换成w} \Rightarrow & m_0\int_0^w \frac{vdv}{\left[1-(v/c)^2\right]^{3/2}} \\ \Updownarrow & & \Downarrow \\ m_0c^2\left(\frac{1}{\left[1-(v/c)^2\right]^{1/2}}-1\right) & \Leftarrow \text{将w换回自变量v} \Leftarrow & m_0c^2\left(\frac{1}{\left[1-(w/c)^2\right]^{1/2}}-1\right) \end{array} \tag{12}$$

但是这种处理方式无论是从逻辑还是从数学角度来看都是不正确的，在这种情况下，再讨论后面的处理步骤已经没有任何意义。换言之，在规范使用数学工具和满足逻辑一致性的前提下，按照图 1 所示的步骤不可能推导出 $E=Mc^2$。

3. 从物理和数学角度推导 $E=Mc^2$ 的方法

质量、能量和速度三者之间在量纲上存在下列关系

$$\text{能量} \equiv \text{质量} \times (\text{速度})^2 \tag{13}$$

式中的“≡”表示量纲意义上的等价关系。以式(13)为基础，可以分别从物理和数学角度简捷地导出 $E=Mc^2$，文献[4] [5]详细了有关推导过程，感兴趣的读者可以参阅，本文不再重述。

4. 结束语

本文基于 MATLAB 的详细分析验算结果表明，在规范使用数学工具和满足逻辑一致性的前提下，按照图 1 所示的步骤不可能推导出 $E=Mc^2$。如果图 1 所示的推导过程就是相对论体系中导出 $E=Mc^2$ 的方法，并且除此之外没有其他方法，那么将引发对相对论基础的质疑。

另一方面，$E=Mc^2$ 是有物理意义的，当然这种物理意义与相对论所说的物理意义是不相同的。基于量纲分析方法，可以分别从物理角度和数学角度简单地导出 $E=Mc^2$。

参考文献

[1] 质能方程 $E=Mc^2$ 的推导过程是怎样的？http://www.360doc.com/content/19/0101/15/45506057_805832643.shtml

[2] M. R. Spiegel 著. 高等数学的理论和习题[M]. 谢国瑞, 蒋司勋, 宣月华, 等, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1978.

[3] 朱有清, 贺才兴. 高等数学复习十五讲(上) [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1985.

[4] 王忆锋. 基于量纲分析从物理和数学角度推导光速原理[J]. 现代物理, 2019, 9(4): 183-190.

[5] 王忆锋. 光速原理及其推论[J]. 现代物理, 2019, 9(5): 227-245.