Modern Physics 现代物理, 2020, 10(5), 79-85
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2020.105009

Hans汉斯

无限深方势阱中分数阶量子力学核的变换

陆 莹，董建平*

南京航空航天大学理学院，江苏 南京
Email: luyingmaths@nuaa.edu.cn, *dongjianping@nuaa.edu.cn

收稿日期：2020年8月13日；录用日期：2020年9月1日；发布日期：2020年9月8日

摘 要

分数阶量子力学核是一种波函数，它可以描述分数阶量子系统的演化过程。本文研究无限深方势阱中自由粒子量子力学核的Laplace变换、能量–时间变换和动量表示。我们首先借助无限深方势阱中自由粒子量子力学核的Fox's *H*函数表示，得到量子力学核的Laplace变换。然后利用量子力学核的路径积分形式，计算出它的能量–时间变换和动量表示。量子力学核的变换可以简化分数阶量子力学中的计算结果，从而更好地研究其性质。

关键词

分数阶量子力学核，积分变换，Fox's *H*函数

Transformation of Fractional Quantum Mechanical Kernel in the Infinite Square Well

Ying Lu, Jianping Dong*

College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu
Email: luyingmaths@nuaa.edu.cn, *dongjianping@nuaa.edu.cn

Received: Aug. 13th, 2020; accepted: Sep. 1st, 2020; published: Sep. 8th, 2020

Abstract

Fractional quantum mechanics kernel is a kind of wave function, which can describe the evolution process of fractional quantum system. In this paper, we study the Laplace transformation, energy-time transformation and momentum representation of free particle quantum mechanics kernel

*通讯作者。

文章引用: 陆莹, 董建平. 无限深方势阱中分数阶量子力学核的变换[J]. 现代物理, 2020, 10(5): 79-85.
DOI: 10.12677/mp.2020.105009

in infinite square well. Firstly, we obtain the Laplace transformation of quantum mechanical kernel by using the Fox's *H* function representation of free particle quantum mechanics kernel in the infinite square well, and then use Path integral form of quantum mechanics kernel to calculate its energy-time transformation and momentum representation. The transformation of quantum mechanics kernel can simplify the calculation results in fractional quantum mechanics, so as to study its properties better.

Keywords

Fractional Quantum Mechanical Kernel, Integral Transform, Fox's *H*-Function

1. 引言

分数阶量子力学系统由 Laskin 建立[1] [2] [3] [4] [5]。他扩展了量子物理的分形概念，即构造了一个分数阶路径积分——Lévy 路径积分。Lévy 随机过程是布朗运动或 Wiener 随机过程的自然推广，这种推广的基础是 Lévy 提出的稳定概率分布理论[6]。根据广义中心极限定理，Lévy 分布的最基本性质是关于加法的稳定性。因此，从概率论的角度来看，稳定概率定律是对高斯定律的推广。Lévy 过程以 Lévy 参数 $\alpha\left(0<\alpha\le 2\right)$ 为表征，当 $\alpha=2$ 时，即可得到高斯过程或布朗运动过程。众所周知，在高斯情况下，量子力学的路径积分方法可以重现标准薛定谔方程。在一般情况下，Laskin 得到了薛定谔方程的分数阶推广，这是一种新的量子物理的基本方程。分数阶薛定谔方程包含了 α 阶 Riesz 导数，而不是标准薛定谔方程中的二阶 $\left(\alpha=2\right)$ 导数。此外，Laskin 还通过 Fox's H 函数导出了自由粒子的量子力学核，进而得到了分数阶平面波函数的方程。在量子力学中，量子力学核是一种特殊的波函数，包含所有经过端点的轨迹的总和，完整的分数阶量子力学核可以描述分数阶量子力学系统的演化过程。

目前，Laskin 在分数阶量子力学的框架中提出了一个自由粒子量子核的新方程。他利用重整化群技术研究了自由粒子核的标度性质，得到了自由粒子量子核的 Laplace 变换、能量－时间变换、格林函数和动量表示[7]。在文献[8]中，Laskin 提出了时空分数阶薛定谔方程，鉴于自由粒子的波函数表示十分复杂，他对量子核的坐标表示进行了 Laplace 变换、Fourier 变换和 Fox's H 函数的 cosine 变换。然后给出了较简洁的自由粒子量子力学核的 H 函数表示形式，以此验证了时空分数阶量子力学违背了量子叠加定律。由此可见，分数阶量子力学核的变换可以帮助我们简化分数阶量子力学中的一些计算结果，有助于研究分数阶量子力学的性质。同时，分数阶量子力学核的变换能提供关于路径积分的物理信息，进而会有更广泛的应用(束缚态方程、散射问题、量子效应等) [9] [10] [11] [12]。本文借助无限深方势阱中量子力学核的 H 函数表示和路径积分形式，得到无限深方势阱中自由粒子量子力学核的变换，包括 Laplace 变换、能量－时间变换和动量表示，为进一步研究分数阶量子力学问题提供有力的工具。

2. 量子力学核的 Laplace 变换

考虑粒子在无限深方势阱中运动，势能 $V\left(x\right)$ 定义为

$$V\left(x\right)=\begin{cases}0, & \left|x\right|\le l,\\ \infty, & \left|x\right|>l,\end{cases}\tag{1}$$

无限深方势阱的量子力学核已经给出[13]

$$K_L\left(x_b t_b \middle| x_a t_a\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[K_L^{(0)}\left(x_{2m} t_b \middle| x_a t_a\right)-K_L^{(0)}\left(x_{2m+1} t_b \middle| x_a t_a\right)\right], \tag{2}$$

其中，

$$x_r=\begin{cases}2lr+x_b, & r=2m,\\ 2lr-x_b, & r=2m+1,\end{cases} \tag{3}$$

$K_L^{(0)}\left(x_{2m}t_b\middle|x_a t_a\right)$表示起点在$\left(x_a,t_a\right)$，终点在$\left(x_{2m},t_b\right)$的自由粒子的量子力学核，$K_L^{(0)}\left(x_{2m+1}t_b\middle|x_a t_a\right)$表示起点在$\left(x_a,t_a\right)$，终点在$\left(x_{2m+1},t_b\right)$的自由粒子的量子力学核。

根据自由粒子量子力学核的H函数表示[5]

$$K_L^{(0)}\left(x_b t_b \middle| x_a t_a\right)=\frac{1}{\alpha\left|x_b-x_a\right|}H_{2,2}^{1,1}\left[\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{iD_\alpha\left(t_b-t_a\right)}\right)^{1/\alpha}\left|x_b-x_a\right|\middle|\begin{matrix}(1,1/\alpha),(1,1/2)\\(1,1),(1,1/2)\end{matrix}\right], \tag{4}$$

等式(2)可以写成H函数的形式

$$\begin{aligned}K_L\left(x_b t_b \middle| x_a t_a\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Bigg\{&\frac{1}{\alpha\left|x_{2m}-x_a\right|}H_{2,2}^{1,1}\left[\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{iD_\alpha\left(t_b-t_a\right)}\right)^{1/\alpha}\left|x_{2m}-x_a\right|\middle|\begin{matrix}(1,1/\alpha),(1,1/2)\\(1,1),(1,1/2)\end{matrix}\right]\\&-\frac{1}{\alpha\left|x_{2m+1}-x_a\right|}H_{2,2}^{1,1}\left[\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{iD_\alpha\left(t_b-t_a\right)}\right)^{1/\alpha}\left|x_{2m+1}-x_a\right|\middle|\begin{matrix}(1,1/\alpha),(1,1/2)\\(1,1),(1,1/2)\end{matrix}\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{5}$$

根据 Laplace 变换的定义

$$\tilde{K}_L\left(x_b,x_a;s\right)=\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{-s\tau}K_L\left(x_b,x_a;\tau\right), \tag{6}$$

这里$\tau=t_b-t_a$，并且无限深方势阱的量子力学核由等式(5)给出。应用H函数的级数展开[14] [15]，我们可以得到

$$\begin{aligned}\tilde{K}_L\left(x_b,x_a;s\right)=&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Bigg\{\frac{1}{\alpha\left|x_{2m}-x_a\right|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1+k}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{iD_\alpha}\right)^{1/\alpha}\left|x_{2m}-x_a\right|\right)^{1+k}\\&-\frac{1}{\alpha\left|x_{2m+1}-x_a\right|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1+k}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{iD_\alpha}\right)^{1/\alpha}\left|x_{2m+1}-x_a\right|\right)^{1+k}\Bigg\}\times\int_0^\infty\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{-s\tau}\tau^{-\frac{1+k}{\alpha}}\\=&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Bigg\{\frac{1}{\alpha s\left|x_{2m}-x_a\right|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1+k}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1+k}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar s}{iD_\alpha}\right)^{1/\alpha}\left|x_{2m}-x_a\right|\right)^{1+k}\\&-\frac{1}{\alpha\left|x_{2m+1}-x_a\right|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1+k}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1+k}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar s}{iD_\alpha}\right)^{1/\alpha}\left|x_{2m+1}-x_a\right|\right)^{1+k}\Bigg\},\end{aligned} \tag{7}$$

这里运用了公式

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{-s\tau}\tau^{-\frac{1+k}{\alpha}} = s^{\frac{1+k}{\alpha}-1}\Gamma\left(1-\frac{1+k}{\alpha}\right). \tag{8}$$

利用 H 函数的定义[16]，$\tilde{K}_L(x_b,x_a;s)$ 的 Laplace 变换可以写成 H 函数的形式

$$\begin{aligned}\tilde{K}_L(x_b,x_a;s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\Bigg\{ & \frac{1}{\alpha s|x_{2m}-x_a|}H_{3,2}^{1,2}\left[\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar s}{iD_\alpha}\right)^{1/\alpha}|x_{2m}-x_a|\,\Bigg|\begin{matrix}(1,1/\alpha),(0,-1/\alpha),(1,1/2)\\(1,1),(1,1/2)\end{matrix}\right] \\ & -\frac{1}{\alpha s|x_{2m+1}-x_a|}H_{3,2}^{1,2}\left[\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar s}{iD_\alpha}\right)^{1/\alpha}|x_{2m+1}-x_a|\,\Bigg|\begin{matrix}(1,1/\alpha),(0,-1/\alpha),(1,1/2)\\(1,1),(1,1/2)\end{matrix}\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{9}$$

当 $\alpha=2$ 时，利用 H 函数的级数展开，我们得到了标准量子力学中无限深方势阱自由粒子核的 Laplace 变换

$$\tilde{K}_L(x_b,x_a;s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\sqrt{\frac{M}{2si\hbar}}\exp\left(-\sqrt{\frac{2Ms}{i\hbar}}|x_{2m}-x_a|\right)-\sqrt{\frac{M}{2si\hbar}}\exp\left(-\sqrt{\frac{2Ms}{i\hbar}}|x_{2m+1}-x_a|\right)\right\}, \tag{10}$$

这里 M 是粒子质量。

3. 量子力学核的能量–时间变换

在分数阶量子力学中，分数阶固定–能量的振幅 $K_L(x_b,x_a;E)$ 具有重要作用，它是核函数 $K_L(x_bt_b|x_at_a)$ 关于时间变量的 Fourier 变换，

$$K_L(x_b,x_a;E) = \int_{t_a}^{\infty}\mathrm{d}t_b\,\mathrm{e}^{iE(t_b-t_a)/\hbar}K_L(x_bt_b|x_at_a), \tag{11}$$

固定–能量振幅 $K_L(x_b,x_a;E)$ 和核函数 $K_L(x_bt_b|x_at_a)$ 通过反 Fourier 变换相互关联[6]

$$K_L(x_bt_b|x_at_a) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}E\,\mathrm{e}^{-iE(t_b-t_a)/\hbar}K_L(x_b,x_a;E). \tag{12}$$

为了使积分收敛，我们必须将能量以无穷小的量 η 移动到上半复平面，则分数阶固定–能量的振幅 $K_L(x_b,x_a;E)$ 可以写成

$$K_L(x_b,x_a;E) = \sum_n \phi_n(x_b)\phi_n^*(x_a)\frac{i\hbar}{E-E_n+i\eta}, \tag{13}$$

其中，$\phi_n(x)$ 是一维无限深方势阱分数阶薛定谔方程本征值 E_n 的本征函数。等式(13)中能量 E 的小 $i\eta$ 位移可以被认为是附加到每一个能量 E_n 上的，这些能量在实际能量轴下以一个无穷小的值移动。对等式(12)进行 Fourier 变换，$i\eta$ 位移保证了当 $t_b<t_a$ 时，闭合轮廓内没有极值点使量子力学核消失。另一方面，对于 $t_b>t_a$，下半平面上的极点通过 Cauchy 留数定理给出了分数阶量子力学核(13)的谱表示。

借助自由粒子的积分形式[5]

$$K_L^{(0)}(x_bt_b|x_at_a) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left\{i\frac{p(x_b-x_a)}{\hbar}-i\frac{D_\alpha(t_b-t_a)|p|^\alpha}{\hbar}\right\}, \tag{14}$$

等式(5)可以写成路径积分形式

$$K_L\left(x_bt_b\left|x_at_a\right.\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left\{i\frac{p\left(x_{2m}-x_a\right)}{\hbar}-i\frac{D_\alpha\left(t_b-t_a\right)|p|^\alpha}{\hbar}\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left\{i\frac{p\left(x_{2m+1}-x_a\right)}{\hbar}-i\frac{D_\alpha\left(t_b-t_a\right)|p|^\alpha}{\hbar}\right\}\right\}. \quad (15)$$

因此，将等式(15)带入等式(11)中可以得到

$$K_L\left(x_b,x_a;E\right)=\int_0^\infty\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{iE\tau/\hbar}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left[i\frac{p\left(x_{2m}-x_a\right)}{\hbar}-i\frac{D_\alpha\tau|p|^\alpha}{\hbar}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left[i\frac{p\left(x_{2m+1}-x_a\right)}{\hbar}-i\frac{D_\alpha\tau|p|^\alpha}{\hbar}\right]\right\}, \quad (16)$$

其中 $\tau=t_b-t_a$。通过简单的计算，上述等式可以写成

$$K_L\left(x_b,x_a;E\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^\infty\frac{i\hbar}{E-D_\alpha|p|^\alpha}\left[\exp\left(i\frac{p\left(x_{2m}-x_a\right)}{\hbar}\right)+\exp\left(-i\frac{p\left(x_{2m}-x_a\right)}{\hbar}\right)\right]\mathrm{d}p\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^\infty\frac{i\hbar}{E-D_\alpha|p|^\alpha}\left[\exp\left(i\frac{p\left(x_{2m+1}-x_a\right)}{\hbar}\right)+\exp\left(-i\frac{p\left(x_{2m+1}-x_a\right)}{\hbar}\right)\right]\mathrm{d}p\right\}. \quad (17)$$

现在考虑 $E<0$ 的情形，利用公式

$$\frac{z^\beta}{1+az^\alpha}=a^{-\beta/\alpha}H_{1,1}^{1,1}\left[az^\alpha\left|\begin{matrix}(\beta/\alpha,1)\\(\beta/\alpha,1)\end{matrix}\right.\right], \quad (18)$$

则等式(17)可以改写成

$$\begin{aligned}K_L\left(x_b,x_a;E\right)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi\hbar}\int_0^\infty\frac{i\hbar}{E-D_\alpha|p|^\alpha}\cos\left[\frac{p\left(x_{2m}-x_a\right)}{\hbar}\right]\mathrm{d}p\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{\pi\hbar}\int_0^\infty\frac{i\hbar}{E-D_\alpha|p|^\alpha}\cos\left[\frac{p\left(x_{2m+1}-x_a\right)}{\hbar}\right]\mathrm{d}p\right\}\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{i}{\pi E}\int_0^\infty H_{1,1}^{1,1}\left[\left(-\frac{D_\alpha}{E}\right)p^\alpha\left|\begin{matrix}(0,1)\\(0,1)\end{matrix}\right.\right]\cos\left[\frac{p\left(x_{2m}-x_a\right)}{\hbar}\right]\mathrm{d}p\right.\\&\quad\left.-\frac{i}{\pi E}\int_0^\infty H_{1,1}^{1,1}\left[\left(-\frac{D_\alpha}{E}\right)p^\alpha\left|\begin{matrix}(0,1)\\(0,1)\end{matrix}\right.\right]\cos\left[\frac{p\left(x_{2m+1}-x_a\right)}{\hbar}\right]\mathrm{d}p\right\},\end{aligned} \quad (19)$$

应用 H 函数的性质[15]以及它的 Fourier-cosine 变换[17]，等式(19)可以写成

$$K_L\left(x_b,x_a;E\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{i\hbar}{\alpha E|x_{2m}-x_a|}H_{2,3}^{2,1}\left[\left(-\frac{E}{D_\alpha\hbar^2}\right)^{1/\alpha}|x_{2m}-x_a|\left|\begin{matrix}(1,1/\alpha),(1,1/2)\\(1,1),(1,1/\alpha),(1,1/2)\end{matrix}\right.\right]\right.$$
$$\left.-\frac{i\hbar}{\alpha E|x_{2m+1}-x_a|}H_{2,3}^{2,1}\left[\left(-\frac{E}{D_\alpha\hbar^2}\right)^{1/\alpha}|x_{2m+1}-x_a|\left|\begin{matrix}(1,1/\alpha),(1,1/2)\\(1,1),(1,1/\alpha),(1,1/2)\end{matrix}\right.\right]\right\}. \quad (20)$$

当 $\alpha=2$ 时，根据 H 函数的性质，并且运用公式

$$H_{0,1}^{1,0}\left[z\Big|_{(b,\beta)}^{-}\right]=\frac{1}{\beta}z^{b/\beta}\exp\left\{-z^{1/\beta}\right\},\tag{21}$$

等式(20)可以转变为

$$\begin{aligned}K_L\left(x_b,x_a;E\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}&\left\{-i\frac{M}{\hbar}\left(-\frac{E}{D_\alpha\hbar^2}\right)^{-1/\alpha}\exp\left[-\left(-\frac{E}{D_\alpha\hbar^2}\right)^{1/\alpha}\left|x_{2m}-x_a\right|\right]\right.\\&\left.+i\frac{M}{\hbar}\left(-\frac{E}{D_\alpha\hbar^2}\right)^{-1/\alpha}\exp\left[-\left(-\frac{E}{D_\alpha\hbar^2}\right)^{1/\alpha}\left|x_{2m+1}-x_a\right|\right]\right\}.\end{aligned}\tag{22}$$

等式(20)即为无限深方势阱中自粒子的能量时间变换。能量－时间变换可以帮助求解 delta 函数摄动下分数阶量子系统的本征值问题(更多细节参见参考文献[18])，从而更好地研究量子粒子的性质。因此，能量－时间变换对于解决量子粒子问题具有一定的价值。

4. 量子力学核的动量表示

根据波函数在动量空间中的演化，量子力学核的动量表示 $K_L\left(p_bt_b\left|p_at_a\right.\right)$ 可以用量子力学核的坐标表示 $K_L\left(x_bt_b\left|x_at_a\right.\right)$ 得到[7]

$$K_L\left(p_bt_b\left|p_at_a\right.\right)=\int\mathrm{d}x_b\mathrm{d}x_a\mathrm{e}^{-ip_bx_b/\hbar+ip_ax_a/\hbar}K_L\left(x_bt_b\left|x_at_a\right.\right),\tag{23}$$

这里 $t_b>t_a$，并且当 $t_b\le t_a$ 时，$K_L\left(p_bt_b\left|p_at_a\right.\right)=0$。

现在考虑无限深方势阱中自由粒子的量子力学核(15)，

$$\begin{aligned}K_L\left(p_bt_b\left|p_at_a\right.\right)=&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\hbar}\left\{\int\mathrm{d}x_{2m}\mathrm{d}x_a\mathrm{e}^{-ip_bx_{2m}/\hbar+ip_ax_a/\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left\{i\frac{p\left(x_{2m}-x_a\right)}{\hbar}-i\frac{D_\alpha\left(t_b-t_a\right)|p|^\alpha}{\hbar}\right\}\right.\\&\left.-\int\mathrm{d}x_{2m+1}\mathrm{d}x_a\mathrm{e}^{-ip_bx_{2m+1}/\hbar+ip_ax_a/\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left\{i\frac{p\left(x_{2m+1}-x_a\right)}{\hbar}-i\frac{D_\alpha\left(t_b-t_a\right)|p|^\alpha}{\hbar}\right\}\right\}\\=&\sum_{m=-\infty}^{\infty}2\pi\hbar\exp\left\{-i\frac{D_\alpha\left(t_b-t_a\right)\left|p_a\right|^\alpha}{\hbar}\right\}\left[\delta\left(p_a-p_{2m}\right)-\delta\left(p_a-p_{2m+1}\right)\right].\end{aligned}\tag{24}$$

等式(24)中 delta 函数的存在表明量子粒子的动量不改变，即核 $K_L\left(p_bt_b\left|p_at_a\right.\right)$ 支持力矩守恒定律。从上述等式可以看出，动量空间中自由粒子的量子力学核是用指数函数表示的，而在坐标表示中它用的是 Fox's H 函数或者较复杂的积分表示，则量子力学核的动量表示可以帮助我们简化符号。

当 $\alpha=2$ 时，等式(24)可以转化成

$$K_L\left(p_bt_b\left|p_at_a\right.\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}2\pi\hbar\exp\left\{-i\frac{\left(t_b-t_a\right)\left|p_a\right|^2}{2M\hbar}\right\}\left[\delta\left(p_a-p_{2m}\right)-\delta\left(p_a-p_{2m+1}\right)\right].\tag{25}$$

5. 结论

在分数阶量子力学体系下，本文研究了无限深方势阱中自由粒子量子力学核的 Laplace 变换、能量－时间变换和动量表示。基于无限深方势阱中自由粒子的量子力学核，借助 Fox's H 函数的性质以及级数展开形式，得到了量子力学核的 Laplace 变换(9)，再利用积分变换计算出量子力学核的能量－时间变换(22)和动量表示(24)。由此可见，量子力学核的变换形成了结构良好的符号表示，这有助于研究分数阶量子力学的性质。同时，量子力学核的变换能提供关于路径积分的物理信息，进而解决更多的物理模型问题。本文的结果包含了标准量子力学中的结果作为特例。

基金项目

本项目感谢国家自然科学基金(项目号：11701278)，中央高校基本科研业务费(项目号：NZ2019008)的资助。

参考文献

[1] Laskin, N. (2000) Fractional Quantum Mechanics and Levy Path Integrals. *Physics Letters A*, **268**, 298-305. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00201-2

[2] Laskin, N. (2000) Fractional Quantum Mechanics. *Physical Review E*, **62**, 3135-3145. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.3135

[3] Laskin, N. (2000) Fractals and Quantum Mechanics. *Chaos*: *An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **10**, 780-790. https://doi.org/10.1063/1.1050284

[4] Laskin, N. (2002) Fractional Schrödinger Equation. *Physical Review E*, **66**, Article ID: 056108. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056108

[5] Laskin, N. (2007) Lévy Flights over Quantum Paths. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **12**, 2-18. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.01.001

[6] Lévy, P. (1938) Théorie De L'Addition Des Variables Aleatoires. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **44**, 19-20. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1938-06659-1

[7] Laskin, N. (2018) Fractional Quantum Mechanics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore. https://doi.org/10.1142/10541

[8] Laskin, N. (2017) Time Fractional Quantum Mechanics. *Chaos*, *Solitons and Fractals*, **102**, 6-28. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.04.010

[9] Dong, J.P. and Xu, M.Y. (2007) Some Solutions to the Space Fractional Schrödinger Equation Using Momentum Representation Method. *Journal of Mathematical Physics*, **48**, Article ID: 072105. https://doi.org/10.1063/1.2749172

[10] Dong, J.P. (2014) Scattering Problems in the Fractional Quantum Mechanics Governed by the 2D Space-Fractional Schrödinger Equation. *Journal of Mathematical Physics*, **55**, Article ID: 032102. https://doi.org/10.1063/1.4866777

[11] Larkin, A.S., Filinov, V.S. and Fortov, V.E. (2016) Path Integral Representation of the Wigner Function in Canonical Ensemble. *Contributions to Plasma Physics*, **56**, 187-196. https://doi.org/10.1002/ctpp.201500078

[12] Dong, J.P. and Geng, H. (2018) Levy Path Integrals of Particle on Circle and Some Applications. *Journal of Mathematical Physics*, **59**, Article ID: 112103. https://doi.org/10.1063/1.5018039

[13] Dong, J.P. (2013) Lévy Path Integral Approach to the Solution of the Fractional Schrödinger Equation with Infinite Square Well.

[14] Mathai, A.M. and Saxena, R.K. (1978) The H-Function with Applications in Statistics and Other Disciplines. Wiley Eastern, New York.

[15] Mathai, A.M., Saxena, R.K. and Haubold, H.J. (2010) The H-Function: Theory and Applications. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9

[16] Fox, C. (1961) The G and H-Functions as Symmetrical Fourier Kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, **98**, 395-395. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1961-0131578-3

[17] Prudnikov, A.P., Brychkov, Y.A., Gould, C.G.T., *et al*. (1990) Integrals and Series More Special Functions. *Mathematics of Computation*, **44**, 573.

[18] Nayga, M.M. and Esguerra, J.P. (2016) Green's Functions and Energy Eigenvalues for Delta-Perturbed Space-Fractional Quantum Systems. *Journal of Mathematical Physics*, **57**, 3081-3122. https://doi.org/10.1063/1.4941086