

一个 $(2+1)$ -维KdV方程的lump解与lump-stripe混合解

陶司兴

商丘师范学院数学与统计学院, 河南 商丘

收稿日期: 2021年10月22日; 录用日期: 2021年11月22日; 发布日期: 2021年11月30日

摘要

本文通过利用Hirota双线性形式, 并借助Maple符号计算, 得到了 $(2+1)$ -维KdV方程的lump解、lump-stripe混合解。通过选取不同的参数, 并结合图像研究了这些解的动力学特征, 特别是讨论了lump解和stripe解之间的相互作用现象。这些解及其相关的性质将有助于研究 $(2+1)$ -维KdV方程所描述的物理学现象。

关键词

$(2+1)$ -维KdV方程, 双线性方法, lump解, lump-stripe混合解

Lump Solutions and Mixed Lump-Stripe Solutions of a $(2+1)$ -Dimensional KdV Equation

Sixing Tao

School of Mathematics and Statistics, Shangqiu Normal University, Shangqiu Henan

Received: Oct. 22nd, 2021; accepted: Nov. 22nd, 2021; published: Nov. 30th, 2021

Abstract

In this paper, by using Hirota bilinear form, the lumped solution and lump strip mixed solution of $(2+1)$ -dimensional KdV equation are obtained with the help of Maple symbolic calculation in this paper. By choosing different parameters, the dynamic characteristics of these solutions are studied combined with images, especially the interaction between lumps and stripe solutions. These

solutions and their related properties will help to study the dynamic characteristics described by physical phenomena of the (2 + 1)-dimensional KdV equation.

Keywords

(2 + 1)-Dimensional KdV Equation, Bilinear Method, Lump Solution, Lump Stripe Mixed Solution

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

众所周知，非线性发展方程的精确解在孤立子理论的发展中起着举足轻重的作用。在寻求孤子方程精确解的过程中，Horita 双线性方法[1]是一个重要而直接的方法。Hirota 双线性算子定义为

$$D_t^m D_x^n (f \cdot f) = D_t^m D_x^n (f(t, x, y) f(t, x, y)) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \times [f(t+T, x+X, y) f(t-T, x-X, y)] \Big|_{T=0, X=0}.$$

对于(2 + 1)-维 KdV 方程[2]

$$u_t + 3uu_y + u_{xy} + 3u_x \int_{-\infty}^x u_y(t, x, y) dx = 0 \quad (1)$$

张玉峰教授利用 Hirota 方法给出方程(1)的精确双孤子解，并利用适当的代数变换和 Riccati 方程，将 Riccati 方程中的变量作为自变量，得到了方程(1)的一类钟形孤子解。冯滨鲁[3]则利用 Pfaffianization 方法推导出方程(1)的耦合系统及其 Gramm 型的 pfaffian 解。

近年来，lump 解的研究受到众多国内外学者的关注。2015 年，马文秀教授[4]利用双线性方法并通过 Maple 进行符号计算，得到了(2 + 1)维 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程的一类在各个方向上合理局部化的 lump 解，并分析了其动力学行为。2017 年，赵等[5]利用(2 + 1)维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程的双线性形式，得到了该方程的 lump 解、stripe 解以及 lump 周期解，并讨论了 lump 解与 stripe 解之间的相互作用，证明了两个孤立波之间的相互作用是非弹性的。2018 年，陈守婷等[6] [7]利用双线性方法并借助 Maple 符号计算研究了广义 Bogoyavlensky-Konopelchenko 方程及广义(2 + 1)-维 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程的 lump 解，并通过图像分析了 lump 解的动力学特征。2020 年，张玉峰教授等[8]利用双线性方法和符号计算研究了广义(2 + 1)-维 Hirota-Satsuma-Ito 方程的 lump 解，并分析了解的动力学特征。

本文在前面学者研究的基础上，利用 Horita 双线性方法，利用符号计算，讨论张玉峰教授所构造的(2 + 1)-维 KdV 方程(1)的 lump 解与 lump-stripe 混合解，并分析其动力学特征。

2. (2 + 1)-维 KdV 方程的 lump 解与 lump-stripe 解

首先假设 $f = f(x, y, t)$ 是关于变量 x, y, t 的可微函数，作变量代换 $u = u_0 + 2(\ln f)_{xx}$ 代入方程(1)，可得

$$2(\ln f)_{xxt} + 6[u_0 + 2(\ln f)_{xx}] (\ln f)_{xxy} + 2(\ln f)_{xxxxy} + 12(\ln f)_{xxx} (\ln f)_{xy} = 0. \quad (2)$$

对变量 x 进行一次积分，可得方程(1)的双线性导数方程为

$$D_x \left(D_t + 3u_0 D_y + D_x^2 D_y \right) (f \cdot f) = 0. \quad (3)$$

为得到方程(1)的 lump-stripe 解, 可设

$$f = g^2 + h^2 + k_1 e^{(k_2 x + k_3 y + k_4 t)} + a_9 \quad (4)$$

上式中, $g = a_1 x + a_2 y + a_3 t + a_4$, $h = a_5 x + a_6 y + a_7 t + a_8$, 其中 $a_j (1 \leq j \leq 9)$ 和 $k_j (1 \leq j \leq 4)$ 均是待定的实数参数。将式(4)代入式(3), 借助符号计算软件 Maple, 搜集关于变量 x, y, t 及 $e^{(k_2 x + k_3 y + k_4 t)}$ 的系数, 就会得到关于待定系数 a_j 和 k_j 的多项式方程。通过求解这些方程, $a_j (1 \leq j \leq 9)$ 和 $k_j (1 \leq j \leq 4)$ 就会被随之确定。我们讨论下面两种情形:

(1) 当 $k_1 = 0$ 时, 可以得到方程(1)的若干种不同形式的 lump 解。在此, 只讨论其中的一种:

$$a_1 = a_1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = a_4, a_5 = 0, a_6 = a_6, a_7 = a_7, a_8 = a_8, a_9 = a_9, u_0 = -\frac{a_7}{3a_6}. \quad (5)$$

这样得到双线性导数方程(3)的解为

$$f = (a_1 x + a_4)^2 + (a_6 y + a_7 t + a_8)^2 + a_9. \quad (6)$$

式中 a_1, a_4, a_7, a_8, a_9 为任意实数, 且 a_6 是非零实数。通过变换 $u = u_0 + 2(\ln f)_{xx}$ 可得方程(1)的 lump 解为

$$u = u_0 + \frac{4a_1^2 f - 8a_1^2 g^2}{f^2}. \quad (7)$$

上式中, $g = a_1 x + a_4$, u_0 , f 与上述表示形式相同。

下面讨论解(7)的相关性质。首先假设时间 t 是常量, 取 $\begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases}$ 可得到一个驻点

$$(x_1, y_1) = \left(-\frac{a_4}{a_1}, -\frac{a_7 t + a_8}{a_6} \right).$$

经过计算, 在驻点 (x_1, y_1) 处的 Hessian 矩阵

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{\left(-\frac{a_4}{a_1}, -\frac{a_7 t + a_8}{a_6} \right)} = \frac{192 a_1^6 a_6^2}{a_9^4} > 0. \quad (8)$$

且 $u_{xx}(x_1, y_1) = -\frac{24a_1^4}{a_9^2} < 0$, 因此式(7)在 (x_1, y_1) 处得到最大值, 且最大值为 $-\frac{a_7}{3a_6} + \frac{4a_1^2}{a_9}$ 。当参数

$a_1 = 1, a_4 = 1, a_6 = -1, a_7 = 2, a_8 = 1, a_9 = 2$ 时, 式(7)的 lump 解的在 $t = -3, t = 0, t = 3$ 三个不同时刻的三维图和密度图如图所示:

从图 1 可以看出, 在不同时刻, lump 孤子的结构没有发生改变, 只是位置发生了移动。

(2) 当 $k_1 \neq 0$ 时, 下面讨论双线性方程(3)的四种 lump-stripe 解。

解一:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_1, k_2 = 0, k_3 = k_3, k_4 = 0, a_1 = 0, a_2 = a_2, a_3 = 0, \\ a_4 &= a_4, a_5 = a_5, a_6 = 0, a_7 = 0, a_8 = a_8, a_9 = a_9, u_0 = 0. \end{aligned}$$

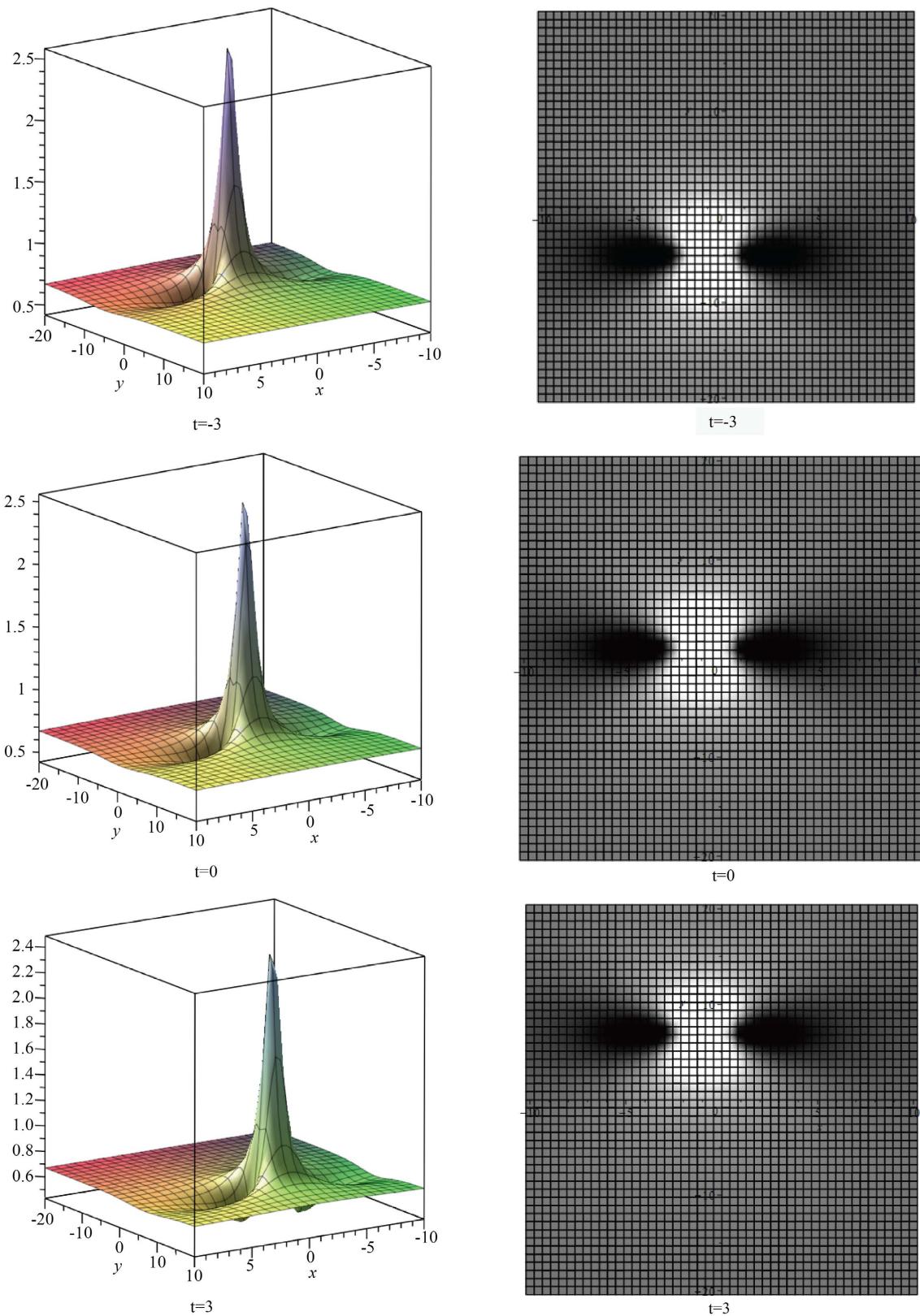


Figure 1. Three dimensional diagrams and density diagrams of equation (7) at different times
图 1. 式(7)在不同时刻的三维图和密度图

这样，我们可以得到双线性方程(3)的含有二次函数及指数函数形式的解为

$$f = (a_2y + a_4)^2 + (a_5x + a_8)^2 + k_1 e^{k_3y} + a_9. \quad (9)$$

上式中 $k_1, k_3, a_2, a_4, a_5, a_8, a_9$ 为任意常数。将(9)代入 $u = u_0 + 2(\ln f)_{xx}$ 可得方程(1)的 lump-stripe 混合解。如果取

$$k_1 = 1, k_3 = 1, a_2 = 1, a_4 = 2, a_5 = 1, a_8 = 1, a_9 = 2, u_0 = 0$$

可以得到(1)的 lump-stripe 混合解

$$u = \frac{4}{(y+2)^2 + (x+1)^2 + e^y + 2} - \frac{8(x+1)^2}{((y+2)^2 + (x+1)^2 + e^y + 2)^2}. \quad (10)$$

式(10)的三维图与密度图如图 2 所示。因为上式中不显含时间 t ，故从图 2 中可以看出，本次得到的孤子作用结构，随时间变化不会发生变化。

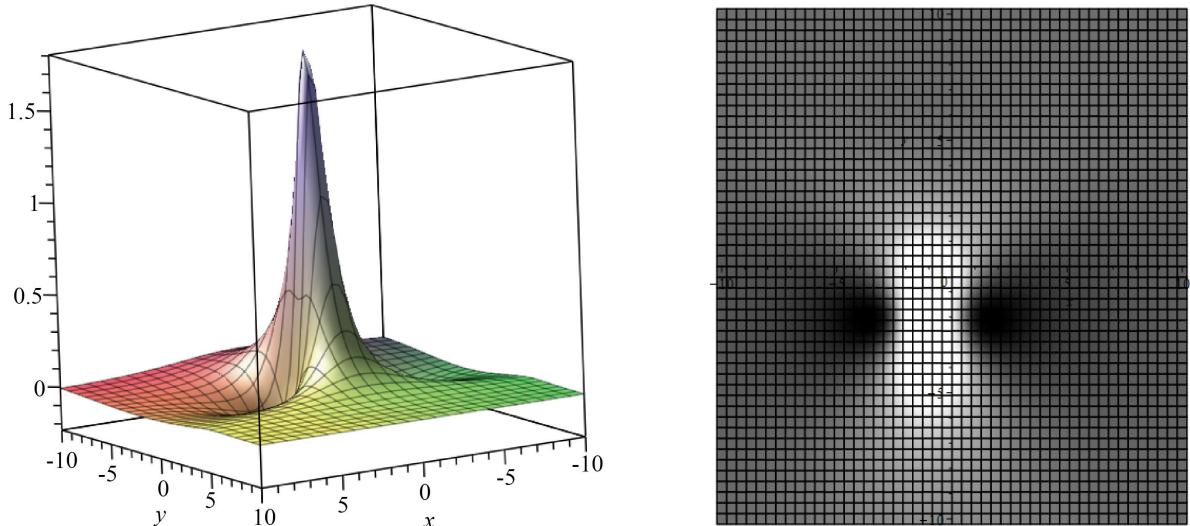


Figure 2. Three dimensional diagrams and density diagrams of equation (10)
图 2. 式(10)的三维图和密度图

解二：

$$k_1 = k_1, k_2 = 0, k_3 = k_3, k_4 = k_4, a_1 = 0, a_2 = \frac{k_3 a_3}{k_4}, a_3 = a_3,$$

$$a_4 = a_4, a_5 = a_5, a_6 = 0, a_7 = 0, a_8 = a_8, a_9 = a_9, u_0 = -\frac{k_4}{3k_3}.$$

这样，我们可以得到双线性方程(3)的含有二次函数及指数函数形式的解为

$$f = \left(\frac{k_3 a_3}{k_4} y + a_3 t + a_4 \right)^2 + (a_5 x + a_8)^2 + k_1 e^{k_3 y + k_4 t} + a_9. \quad (11)$$

上式中 $k_1, k_3, k_4, a_3, a_4, a_5, a_8, a_9$ 为任意常数。将(11)代入 $u = u_0 + 2(\ln f)_{xx}$ 可得到方程(1)的 lump-stripe 混合解。如果取

$$k_1 = 1, k_3 = 1, k_4 = 2, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 1, a_8 = 1, a_9 = 2$$

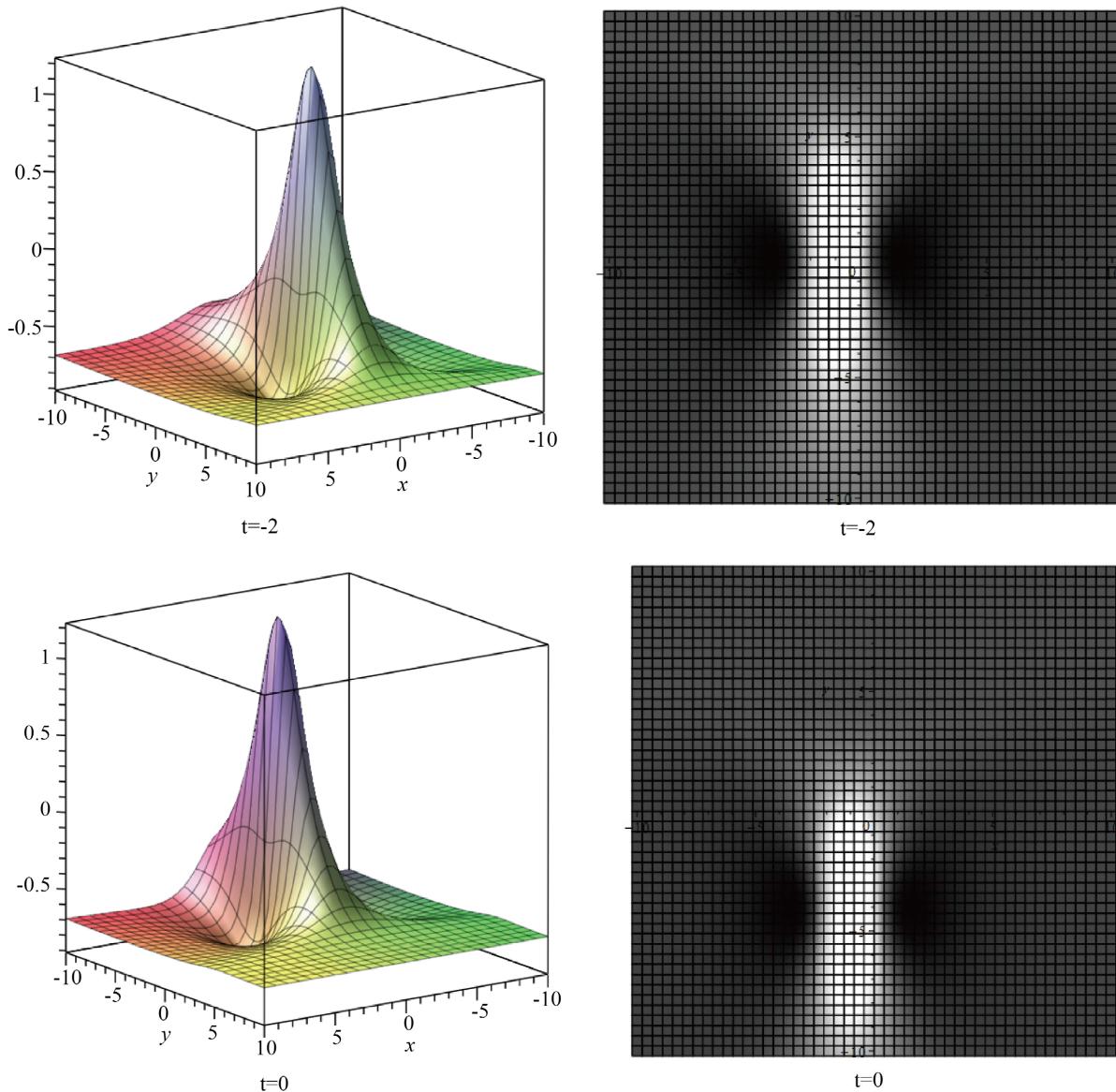
可以得到(1)的 lump-stripe 混合解

$$u = -\frac{2}{3} + \frac{4}{(0.5y+t+2)^2 + (x+1)^2 + e^{y+2t} + 2} - \frac{8(x+1)^2}{((0.5y+t+2)^2 + (x+1)^2 + e^{y+2t} + 2)^2}. \quad (12)$$

式(12)的 lump-stripe 解在 $t = -2, t = 0, t = 2$ 三个不同时刻的三维图和密度图如图 3 所示。在式(12)中，当 $t \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 0$ 。也就是说，随着时间的变化增大，lump-stripe 对应的水波会消失。并且从图 3 中可以看出，lump 与 stripe 孤子发生弹性碰撞时，lump 孤子吞噬了 stripe 孤子，使 lump 孤子形状发生了改变。

解三：

$$\begin{aligned} k_1 &= k_1, k_2 = 0, k_3 = k_3, k_4 = k_4, a_1 = a_1, a_2 = -\frac{a_5 a_6}{a_1}, a_3 = -\frac{k_4 a_5 a_6}{k_3 a_1}, \\ a_4 &= a_4, a_5 = a_5, a_6 = a_6, a_7 = \frac{k_4 a_6}{k_3}, a_8 = a_8, a_9 = a_9, u_0 = -\frac{k_4}{3k_3}. \end{aligned}$$



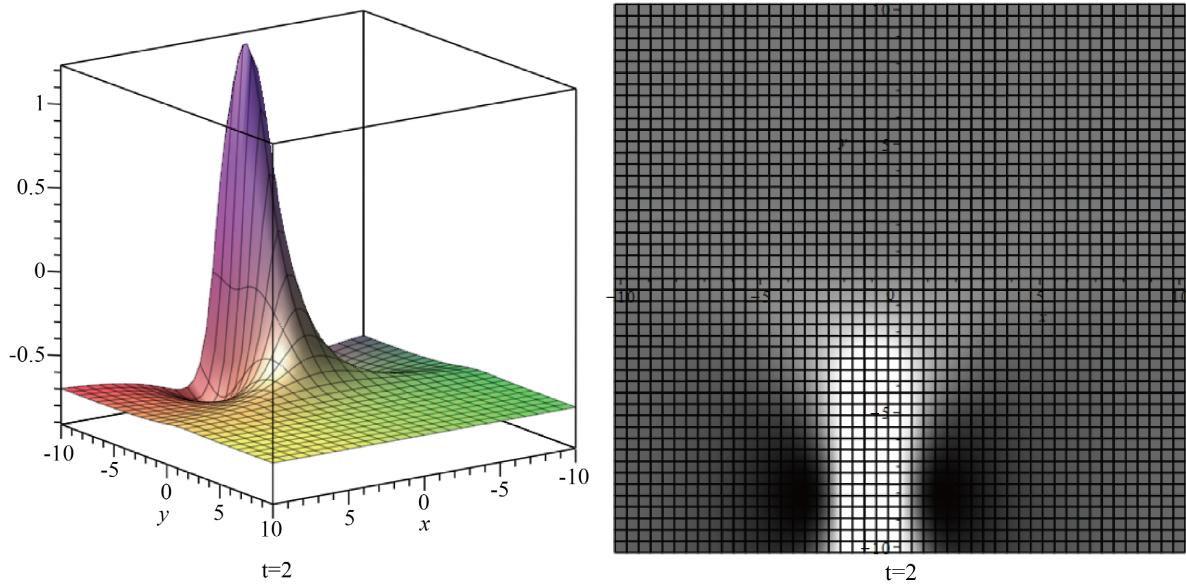


Figure 3. Three dimensional diagrams and density diagrams of equation (12) at different times
图 3. 式(12)在不同时刻的三维图和密度图

这样，我们可以得到双线性方程(3)的含有二次函数及指数函数形式的解为

$$f = \left(a_1 x - \frac{a_5 a_6}{a_1} y - \frac{k_4 a_5 a_6}{k_3 a_1} t + a_4 \right)^2 + \left(a_5 x + a_6 y + \frac{k_4 a_6}{k_3} t + a_8 \right)^2 + k_1 e^{k_3 y + k_4 t} + a_9. \quad (13)$$

上式中 $k_1, k_3, k_4, a_1, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9$ 为任意常数。将(13)代入 $u = u_0 + 2(\ln f)_{xx}$ 可得到方程(1)的 lump-stripe 混合解。如果取

$$k_1 = 1, k_3 = 2, k_4 = -1, a_1 = 2, a_4 = 1, a_5 = 1, a_6 = 2, a_8 = 1, a_9 = 1$$

可以得到(1)的 lump-stripe 混合解

$$u = \frac{1}{6} + \frac{20}{(2x-y+0.5t+1)^2 + (x+2y-t+1)^2 + e^{2y-t} + 1} - \frac{8(5x+3)^2}{\left((2x-y+0.5t+1)^2 + (x+2y-t+1)^2 + e^{2y-t} + 1\right)^2}. \quad (14)$$

式(14)的 lump-stripe 解在 $t = -4, t = 0, t = 4$ 三个不同时刻的三维图和密度图如图 4 所示。在式(12)中，当 $(2x-y+0.5t+1)^2 + (x+2y-t+1)^2 \rightarrow \infty$ ， $u \rightarrow 0$ 。并且从图 4 中可以看出，lump 与 stripe 孤子发生弹性碰撞时，lump 孤子吞噬了 stripe 孤子，使 lump 孤子形状发生了改变。

解四：

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = a_4, a_5 = 0, a_6 = a_6, a_7 = a_7, a_8 = a_8, \\ a_9 &= a_9, k_1 = k_1, k_2 = k_2, k_3 = k_3, k_4 = \frac{a_7 k_3}{a_6}, u_0 = -\frac{a_6 k_2^2 + a_7}{3a_6}. \end{aligned}$$

这样，我们可以得到双线性方程(3)的含有二次函数及指数函数形式的解为

$$f = a_4^2 + (a_6 y + a_7 t + a_8)^2 + k_1 e^{\frac{k_2 x + k_3 y + \frac{a_7 k_3}{a_6} t}{a_6}} + a_9. \quad (15)$$

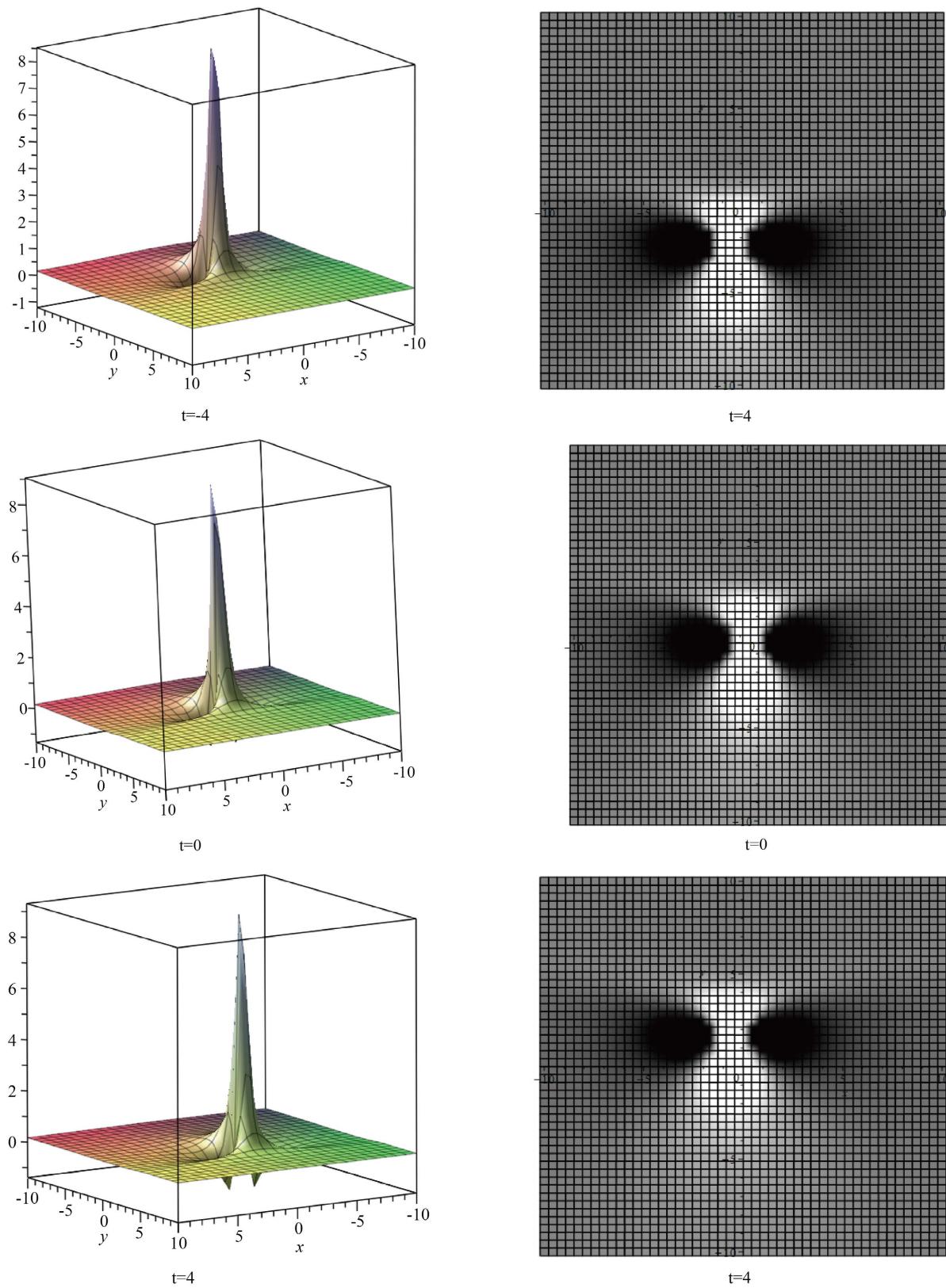


Figure 4. Three dimensional diagrams and density diagrams of equation (14) at different times
图 4. 式(14)在不同时刻的三维图和密度图

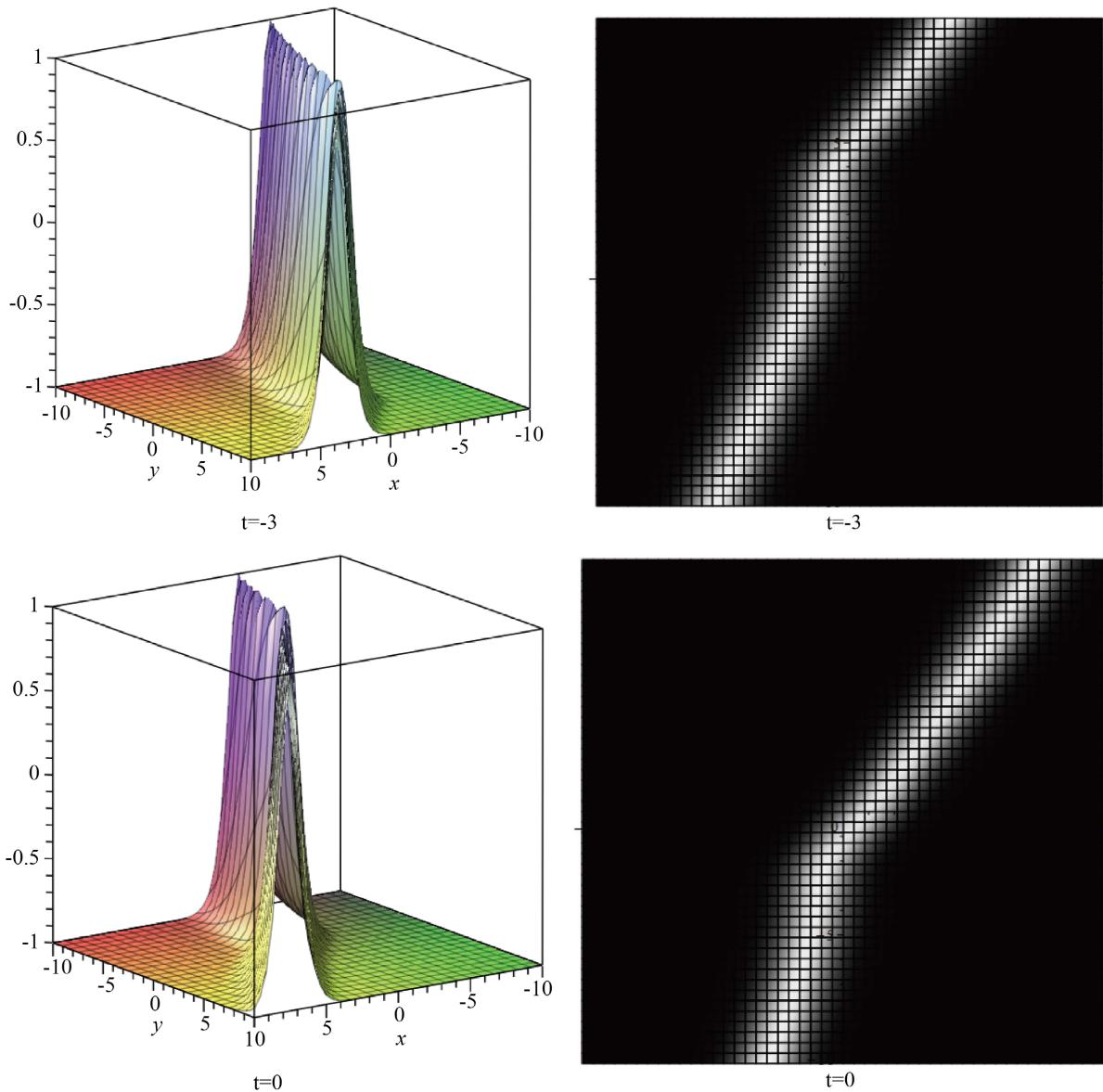
上式中 $a_4, a_6, a_7, a_8, a_9, k_1, k_2, k_3$ 为任意常数。将(15)代入 $u = u_0 + 2(\ln f)_{xx}$ 可得到方程(1)的 lump-stripe 混合解。如果取

$$a_4 = 1, a_6 = 1, a_7 = 2, a_8 = 2, a_9 = 1, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = -1$$

可以得到(1)的 lump-stripe 混合解

$$u = -1 + \frac{8e^{2x-y-2t}}{(y+2t+2)^2 + e^{2x-y-2t} + 2} - \frac{8(e^{2x-y-2t})^2}{((y+2t+2)^2 + e^{2x-y-2t} + 2)^2}. \quad (16)$$

式(16)的 lump-stripe 解在 $t = -3, t = 0, t = 3$ 三个不同时刻的三维图和密度图如图 5 所示。在式(12)中, 当 $(2x-y+0.5t+1)^2 + (x+2y-t+1)^2 \rightarrow \infty, u \rightarrow 0$ 。从图 5 中可以看出, lump 与 stripe 孤子发生弹性碰撞时, 无论时间怎么变化, lump 与 stripe 孤子不会发生分离, 并且这种作用结构随时间变化不会发生变化。



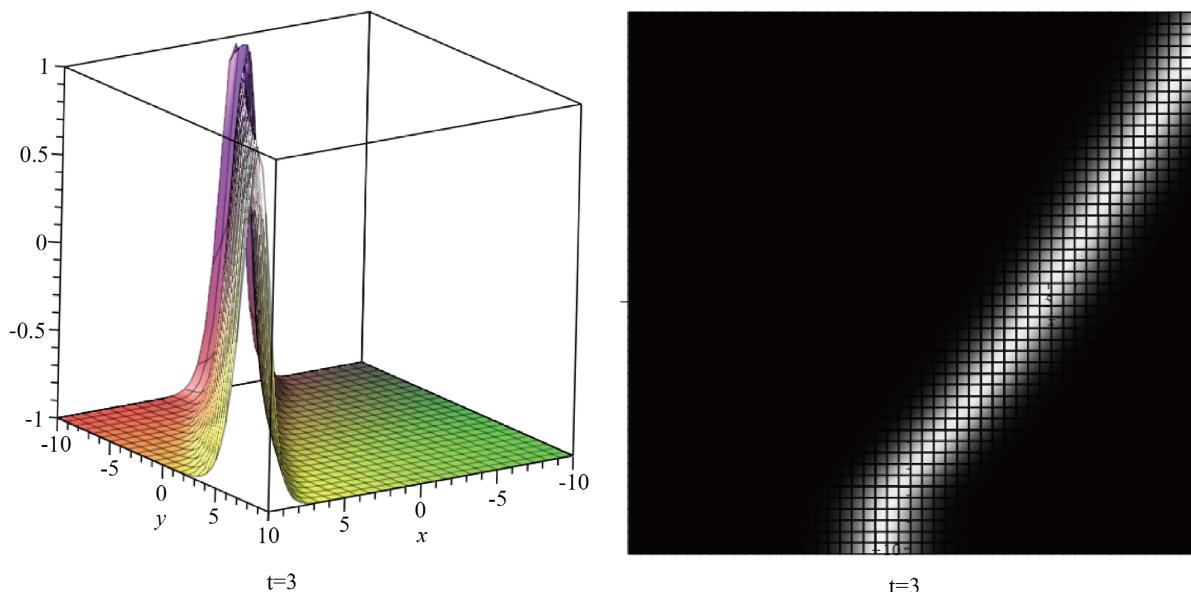


Figure 5. Three dimensional diagrams and density diagrams of equation (16) at different times
图 5. 式(16)在不同时刻的三维图和密度图

此时所得解的结构与文献[5]中的现象不同, lump 孤子与 stripe 孤子一直结合在一块, 形状没有发生改变, 只是随时间变化位置发生移动, 这是一种很有趣的现象。

3. 结束语

Hirota 双线性方法是求可积方程孤子解的一种非常有效的方法。本文直接利用双线性方法, 借助 Maple 符号计算软件, 得到了 $(2+1)$ 维 KdV 方程的 lump 解及 lump-stripe 混合解。并且借助符号计算软件 Maple 将本文中获得的所有解都代入方程(1)中进行了检验。本文所得到的四种 lump-stripe 混合解各有特点: 第一种混合解不显含时间 t ; 第二种与第三种混合解中 lump 孤子与 stripe 孤子发生的是弹性碰撞, 并且 lump 孤子吞噬了 stripe 孤子; 第四种混合解中 lump 孤子与 stripe 孤子发生的是非弹性碰撞, 并且 lump 孤子与 stripe 孤子一直结合在一块, 形状不随时间发生改变。这些结果对于理解 $(2+1)$ 维 KdV 方程所描述的物理现象具有一定的理论参考价值。另外, 本文求非线性演化方程 lump 解及 lump-stripe 混合解的方法简单有效, 可以推广到其它一系列的非线性偏微分方程的求解。

基金项目

河南省自然科学基金(编号: 162300410075)资助项目。

参考文献

- [1] Hirota, R. (2004) *The Direct Method in Soliton Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, England. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511543043>
- [2] Zhang, Y.-F., Tam, H. and Zhao, J. (2006) Higher-Dimensional KdV Equations and Their Soliton Solutions. *Communications in Theoretical Physics*, **45**, 411-413. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/45/3/007>
- [3] 冯滨鲁, 郭婷婷. $(2+1)$ 维 KdV 方程的 Gramm 解及其 pfaffian 化[J]. 潍坊学院学报, 2008, 8(6): 75-78.
- [4] Ma, W.X. (2015) Lump Solutions to the Kadomtsev-Petviashvili Equation. *Physics Letters A*, **379**, 1975-1978. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.06.061>
- [5] Zhao, Z.L., Chen, Y. and Han, B. (2017) Lump Soliton, Mixed Lump Tripe and Periodic Lump Solutions of a $(2+1)$ -Dimensional Asymmetrical Nizhnik-Novikov-Veselov Equation. *Modern Physics Letters B*, **31**, 1750157.

<https://doi.org/10.1142/S0217984917501573>

- [6] Chen, S.T. and Ma, W.X. (2018) Lump Solutions to a Generalized Bogoyavlensky-Konopelchenko Equation. *Frontiers of Mathematics in China*, **13**, 525-534. <https://doi.org/10.1007/s11464-018-0694-z>
- [7] Chen, S.T. and Ma, W.X. (2018) Lump Solutions of a Generalized Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **76**, 1680-1685. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.07.019>
- [8] Zhang, Y.F., Ma, W.X. and Yang, J.Y. (2020) A Study on Lump Solutions to a (2 + 1)-Dimensional Completely Generalized Hirota-Satsuma-Ito Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S*, **13**, 2941-2948. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2020167>