

Research of Propagative Characteristic for Gaussian Beam

Zhuo Yang, Hua Zhou

School of Science, Hohai University, Nanjing Jiangsu

Email: nkyangzhuo@126.com

Received: Mar. 10th, 2015; accepted: Mar. 20th, 2015; published: Mar. 26th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The paper aims at exploring the general form of the propagative characteristics of Laser Gaussian beam. From the Fresnel diffraction equation, we obtain a new integral formula based on the Paraxial approximation and Fresnel approximation. Based on the Helmholtz equation, the general solutions of the Gaussian beam are obtained. Combining the general solutions of the Gaussian beam with the new integral formula, the general form of the Gauss beam amplitude and intensity can be obtained. The images of the propagative characteristics and frequency distribution for Gaussian beam are made. The related characteristics of the Gaussian beam propagation are explained with the images.

Keywords

Gaussian Beam, Propagative Characteristics, Fresnel-Kirchhoff' Law

高斯光束传播特性研究

杨卓, 邹华

河海大学理学院, 江苏 南京

Email: nkyangzhuo@126.com

收稿日期: 2015年3月10日; 录用日期: 2015年3月20日; 发布日期: 2015年3月26日

摘要

本文旨在探究激光高斯光束传播特性的一般形式。先以菲涅耳 - 基尔霍夫衍射公式为基础进行傍轴近似和菲涅耳近似得出新的积分式，再以亥姆霍兹方程为基础解出高斯光束一般解的形式。将高斯光束一般解与新的积分式进行结合，解出高斯光束振幅与光强的一般形式，并做出高斯光束传播特性图像与频率分布图像。利用图像解释高斯光束传播相关特性。

关键词

高斯光束，传播特性，菲涅耳 - 基尔霍夫定律

1. 引言

自激光器产生以来，已应用于科技、通信和医学等各个领域。对激光处处的高斯光束的研究是更好利用激光器的关键。高斯光束(如厄密 - 高斯光束，拉盖尔 - 高斯光束)可用来描述矩形对称和圆对称情况下的高阶激光模式，其特性已被人们广泛研究[1]-[3]。高斯光束束腰半径和位置、高斯光束远场发散角、光束衍射倍率因子、高斯光束经透镜变换规律是描述高斯光束基本特性的重要物理量和规律，同时也是激光物理教学中的重要内容[4]-[9]。已有很多学者利用不同的方法得到高阶高斯光束的传播特性，例如：数值分析法、矢量法、Wigner 分布函数法[3]等等。描述激光器高斯光束的数学函数是亥姆霍兹方程的一个近轴高斯函数形式的近似解，表示电磁场的复振幅。电磁波的传播包括电场和磁场两部分。研究其中任一个场，就可以描述波在传播时的性质[10] [11]。本文先用另一种方法来研究高斯光束的传播特性，先从基本衍射公式出发，利用近似变换和数理方程相结合的方法，然后推导出椭圆高斯光束公式的一般形式，进而得到高斯光束的传播特性。

2. 菲涅耳 - 基尔霍夫衍射公式及近似变换

首先，研究基础是菲涅耳衍射积分式

$$U(P) = -\frac{i}{2\lambda} \iint_{\Sigma} (\cos\theta_0 + \cos\theta) U_0(Q) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \quad (1)$$

后来基尔霍夫从电磁场理论出发，严格地推导出了两者的数学表达式

$$K = -\frac{i}{\lambda} \quad (2)$$

$$F(\theta_0, \theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta_0 + \cos\theta) \quad (3)$$

如果点光源距离孔径足够远，使入射光可以看成为垂直入射到孔径的平面波，那么倾斜因子有

$$F(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2} \quad (4)$$

通常情况下，衍射孔径的线度比观察屏到孔径的距离要小得多，在观察屏上的考察范围也比观察屏到孔径的距离小得多。据此，对(2)式可做傍轴近似：取 $\cos\theta \approx 1$ ，因此倾斜因子 $F(\theta) = 1$ ； $\frac{1}{r} = \frac{1}{z_0}$ ，其中 z_0 是观察屏和衍射屏之间的距离。取以上两点近似后，积分式可以写为

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda z_0} \iint_{\Sigma} U_0(Q) e^{ikr} d\Sigma \quad (5)$$

在孔径平面和观察平面分别取直角坐标系 (x_1, y_1) 和 (x, y) , r 可以写成

$$r = \sqrt{z_0^2 + (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = z_1 \left[1 + \left(\frac{x-x_1}{z_1} \right)^2 + \left(\frac{y-y_1}{z_1} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6)$$

下面利用菲涅耳近似, 当 z_1 大到使得第 3 项以后各项对位相作用远小于 π 时, 第 3 项以后各项便可忽略, 因而可只取头两项来表示 r , 即:

$$r = z_1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{z_1^2} \right] \right\} = z_1 + \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2z_1} \quad (7)$$

故在菲涅耳近似下, 球面波位相因子取如下形式:

$$e^{ikr} = \exp \left\{ ikz_1 + \frac{ik}{2z_1} \left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \right] \right\} \quad (8)$$

把这一结果代入积分式, 即可得到菲涅耳衍射的计算公式[12]:

$$U(x, y) = \frac{\exp(ikz_1)}{i\lambda z_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x_1, y_1) \exp \left\{ \frac{ik}{2z_1} \left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \right] \right\} dx_1 dy_1 \quad (9)$$

3. 高斯光束方程的一般形式

亥姆霍兹方程是一个描述电磁波的椭圆偏微分方程。其基本形式如下:

$$\nabla^2 \vec{U} + k^2 \vec{U} = 0 \quad (10)$$

假设瑞利距离为:

$$Z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (11)$$

在缓变振幅近似下, 高斯光束为方程的一个特殊解:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{U_0}{1 - \frac{jz}{Z_0}} \exp \left[-\frac{(x^2 + y^2)/w_0^2}{1 - \frac{jz}{Z_0}} \right] \cdot \exp(-jkz) \quad (12)$$

可以用以下的一般形式表示, 即:

$$\varphi(x, y, z) = A(z) \exp \left(-\frac{x^2}{w_{0x}^2} - \frac{y^2}{w_{0y}^2} \right) \quad (13)$$

4. 高斯光束的传播特性

单模半导体激光器发出的激光光束并非球面波或者平面波, 而是一种基模高斯光束, 可以用二维高斯分布来近似表示。假设从半导体激光器发出的光束束腰位于半导体激光器端面, 从半导体激光器端面所发出的光场可以写成:

$$U_0(x_1, y_1) = \exp\left(-\frac{x_1^2}{w_{0x}^2} - \frac{y_1^2}{w_{0y}^2}\right) \quad (14)$$

利用转化坐标平面的方法对上式进行求解得

$$U(x, y, z_0) = \frac{-ik \exp(ikz_0) \cdot w_{0x} w_{0y}}{\sqrt{(2z_0 - ikw_{0x}^2)(2z_0 - ikw_{0y}^2)}} \cdot \exp\left[-\frac{i2kz_0 x^2}{4z_0^2 + (kw_{0x}^2)^2} - \frac{i2kz_0 y^2}{4z_0^2 + (kw_{0y}^2)^2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{(kw_{0x} x)^2}{4z_0^2 + (kw_{0x}^2)^2} - \frac{(kw_{0y} y)^2}{4z_0^2 + (kw_{0y}^2)^2}\right] \quad (15)$$

这里定义快轴方向和慢轴方向的束腰半径

$$w_x(z_0) = w_{0x} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z_0}{\pi w_{0x}^2}\right)^2}, \quad w_y(z_0) = w_{0y} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z_0}{\pi w_{0y}^2}\right)^2} \quad (16)$$

和波阵面曲率半径[13]

$$R_x(z_0) = z_0 \left[1 + \left(\frac{\pi w_{0x}^2}{\lambda z_0}\right)^2\right], \quad R_y(z_0) = z_0 \left[1 + \left(\frac{\pi w_{0y}^2}{\lambda z_0}\right)^2\right] \quad (17)$$

将以上四个定义变量带入积分式，可得：

$$U(x, y, z_0) = \frac{-ik \exp(ikz_0) \cdot w_{0x} w_{0y}}{\sqrt{(2z_0 - ikw_{0x}^2)(2z_0 - ikw_{0y}^2)}} \cdot \exp\left[-\frac{kx^2}{(w_x(z_0))^2} - \frac{ky^2}{(w_y(z_0))^2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{ix^2}{2R_x(z_0)} - \frac{iy^2}{2R_y(z_0)}\right] \quad (18)$$

光强为

$$I = U^*(x, y, z_0)U(x, y, z_0) = \frac{k^2 w_{0x}^2 w_{0y}^2}{\sqrt{(4z_0^2 + k^2 w_{0x}^4)(4z_0^2 + k^2 w_{0y}^4)}} \exp\left\{2\left[\frac{kx^2}{(w_x(z_0))^2} + \frac{ky^2}{(w_y(z_0))^2}\right]\right\} \quad (19)$$

根据上式利用 MATLAB 做出椭圆高斯光束频率分布图像如图 1 所示，从图中可以看出中心频率处出现凸起，与高斯分布类似。为更加形象直观。频率分布曲线如图 2 所示，可以看出椭圆高斯光束在某一截面上的频率分布是呈椭圆形向外发散的。

5. 结语

本文探究的重点是以理论为基础、利用公式和图像阐述高斯光束的传播特性。先以菲涅耳-基尔霍夫衍射公式为基础，得出在两种近似情况下的新菲涅耳积分式。然后，在亥姆霍兹方程的基础上解出亥姆霍兹方程的一般解——即高斯光束的一般解。并将高斯光束一般解与新的积分式进行结合得出高斯光束振幅与光强的一般形式。最后，做出高斯光束传播特性图像与频率分布图像，利用图像解释高斯光束传播相关特性。从图像中不难看出，高斯光束中心点振幅最大，频率从中心点向外逐层递减，光束符

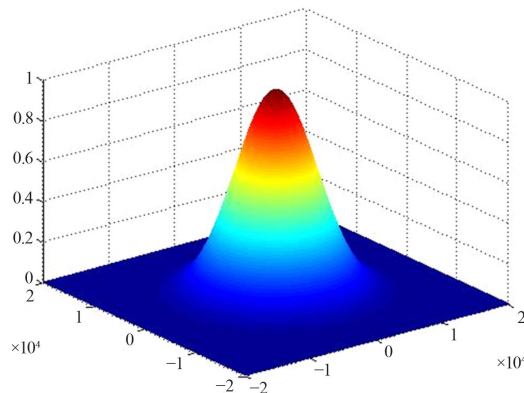


Figure 1. Propagative characteristic of elliptical Gaussian beam
图 1. 椭圆高斯光束传播特性

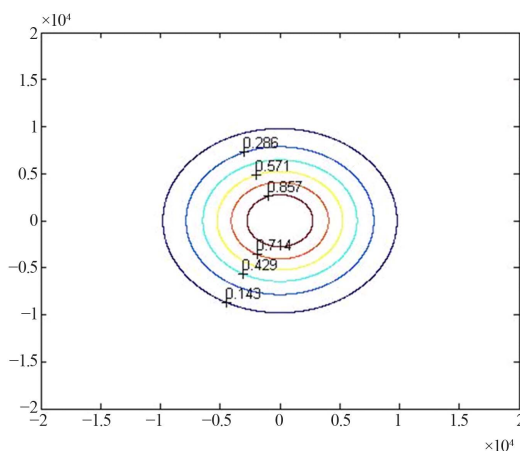


Figure 2. Frequency distribution of elliptical Gaussian beam
图 2. 椭圆高斯光束频率分布

合高斯分布，这也是将此类光场为高斯光束的缘由。

致 谢

感谢河海大学小型教研项目“《激光原理与应用》教学改革探索与实践”资助。

参考文献 (References)

- [1] Smirnov, V.N. and Stokovskii, G.A. (1994) On diffraction of optical Hermite-Gaussian beams from a diaphragm. *Optics and Spectroscopy*, **76**, 912-919.
- [2] Lin, Q., Zhao, D.-M. and Wang, S.-M. (1993) Propagation of non-Gaussian beam. *Acta Optica Sinica*, **13**, 740-745.
- [3] 蔡阳健, 林强 (2002) 高阶椭圆高斯光束及其传播特性. *光电子*, **2**, 188-192.
- [4] 范放, 洪小柳, 赵芳 (2009) 进口冷冻肉类沙门氏菌快速检验方法的研究. *检验检疫学刊*, **1**, 45-48.
- [5] 胡桂学 (2006) 动物微生物学实验教程. 中国农业出版社, 北京.
- [6] 姚火春 (2006) 兽医微生物学实验指导. 中国农业出版社, 北京.
- [7] 付庆玖, 韩振 (2009) 高等教育创新性实验教学体系的探讨. *实验室研究与探索*, **6**, 14-16.

- [8] 王春潮, 徐跃进, 王平祥 (2009) 强化实践推进大学生创新性实验计划. *实验室研究与探索*, **6**, 7-10.
- [9] 杨晓东, 谭锦业, 刘定文, 刘进宝 (2010) 高斯光束特性实验研究. *实验室研究与探索*, **8**, 23-320.
- [10] Riley, K.F., Hobson, M.P. and Bence, S.J. (2002) *Mathematical methods for physics and engineering*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [11] Saleh, B.E.A. and Teich, M.C. (1991) *Fundamentals of photonics*. John Wiley & Sons, New York.
- [12] 梁铨廷 (2012) *物理光学*. 第4版, 电子工业出版社, 北京.
- [13] 陈家璧, 彭润玲 (2013) *激光原理及应用*. 第3版, 电子工业出版社, 北京.