

Pricing of Discrete Geometric Average Asian Discrete Barrier Option under Stochastic Volatility Model

Youjie Chen

School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi
Email: 1131643497@qq.com

Received: Sep. 20th, 2019; accepted: Oct. 5th, 2019; published: Oct. 12th, 2019

Abstract

In this paper, the pricing of Asian barrier options for discrete time scenarios based on the discrete geometric average of asset price is discussed under the model of Heston stochastic volatility which is discussed in the underlying asset price. Some stochastic analysis approaches such as the semi-martingale Itô formula, multidimensional federated characteristic functions, Girsanov theorem and Fourier inverse transform, multidimensional federated characteristic functions, Girsanov theorem and Fourier inverse transform technique are to derive the pricing formula for the Asian discrete barrier call option. And finally, numerical examples are given by us, and the impacts of some parameters in stochastic volatility process on the values of the barrier option values are examined by this numerical example.

Keywords

Heston Model, Barrier Option, Fourier Inverse Transform, Geometric Average

随机波动率模型下离散几何平均亚式障碍期权定价

陈有杰

广西师范大学数学与统计学院, 广西 桂林
Email: 1131643497@qq.com

收稿日期: 2019年9月20日; 录用日期: 2019年10月5日; 发布日期: 2019年10月12日

摘要

本文在标的资产价格满足Heston随机波动率模型下讨论基于资产价的离散几何平均情形的亚式离散障

碍期权定价。应用半鞅Itô公式、多维联合特征函数、Girsanov测度变换和Fourier反变换等随机分析方法，推导出了基于资产价的亚式几何平均离散障碍期权的定价公式，最后给出了数值计算实例，并分析了波动率参数对障碍期权价格的影响。

关键词

Heston模型, 障碍期权, Fourier反变换, 几何平均

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

期权是风险管理的核心工具, 如何给期权定价, 自然是一个非常重要的问题。1973年 Black 与 Scholes 在股票价格服从几何布朗运动, 利率和股票波动率均为常数的假设下, 给出了欧式标准期权定价模型, 即著名的 Black-Scholes 公式[1] (记为 B-S 模型)。后来人们发现从期权市场数据计算出的波动率表现出波动的聚集性和微笑现象, 这表明 B-S 模型计算的期权价格与实际市场表现存在一定偏差。为了解决这些偏差, 许多学者对 B-S 模型进行了改进, 如 Merton [2]和 Kou [3]等学者在标的资产的动态模型中引入跳跃风险, 建立的跳扩散模型(Jump-Diffusion, 简记 JD 模型), 并给出了类似 B-S 模型的期权定价公式; 另外, Heston [4]、Hull 和 White [5]以及 Stein 和 Stein [6]等学者设定资产的波动率是随机变化的, 以资产波动率的随机变化过程来刻画波动的聚集性和微笑现象, 建立了随机波动率模型(Stochastic Volatility, 简记 SV 模型)。随后, Chen 和 Scott [7]、Bates [8]、邓国和和杨向群[9]等学者发现把跳跃因素和波动率随机化结合起来能更好地刻画金融市场波动的聚集性和微笑现象。

障碍期权(Barrier option)是一种路径依赖型期权(Path-dependent options), 它的最终收益不仅依赖于标的资产到期日的价格, 还依赖于标的资产变动的路径, 当标的资产价格触及规定的障碍时, 期权合约生效或失效。障碍期权合约可以降低投资者投资的风险, 其价格比标准欧式期权价格便宜, 因此受到市场的青睐, 被广泛地应用于风险管理。障碍期权可以分为两大类: 敲出期权(knock-out option)和敲入期权(knock-in options)。敲出期权是指当标的资产价格触及规定的障碍值时, 合约失效; 敲入期权是指当标的资产价格触及规定的障碍值时, 合约生效。根据在期权有效期内标的资产价格是否大于障碍值, 又可以将敲出期权分为下降敲出期权(down-and-out options)和上升敲出期权(up-and-out options); 同样也可以将敲入期权分为下降敲入期权(down-and-in options)和上升敲入期权(up-and-in options)。我们知道, 在实际的金融市场中, 金融衍生品的交易往往是离散情形。所以, 在期权定价问题上, 我们考虑离散时间情形观测到的标的资产价格会更贴近实际的金融交易。故, 本文选择研究离散时间情形的障碍期权定价问题。研究离散障碍期权定价问题的文献并不多, 1997年 Broadie 和 Kou [10]在标的资产价格满足 B-S 模型下给出了欧式离散障碍期权价格的近似显示式; 2007年 Fusai 和 Recchioni [11]在 Kou 研究的基础上进一步研究了离散时间的障碍期权的定价方法; 2011年 Wystue 和 Griebisch [12]在标的资产服从 Heston 随机波动率模型下给出离散时间欧式障碍期权价格的定价公式; 2018年薛广明和邓国和[13]在 Wystue 研究的基础上进一步研究了基于 Bates 模型的欧式离散障碍期权的定价问题。受到上述文献的启发, 本文在前人研究的基础上, 结合 Heston 随机波动率模型和基于资产价的离散几何平均, 进行亚式离散障碍期权定价的研究探讨。

2. 市场模型与预备知识

考虑一个无套利无摩擦的金融市场。假设投资者将其财富仅投资于市场中的两种资产，其投资时期为 $[0, T]$ ，其中一种资产 B 是无风险资产(如债券或存款)，其收益按无风险利率 $r \geq 0$ (常数)连续复利计算。另一种是风险资产 S (如股票)。假定完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ 具有满足通常条件的 σ -代数流 \mathcal{F}_t ， \mathcal{F}_t 由 W_t 和 B_t 联合生成，根据 Duffie [14] 选取特定等价鞅测度的思想，本文假设概率测度 P 为风险中性测度，且条件数学期望 $E^P[\cdot]$ 是基于概率测度 P 下计算。在此概率测度下，股票价格 S_t 满足下列微分方程：

$$\begin{cases} dS_t = S_t r dt + S_t \sqrt{V_t} \left(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t \right), \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\sigma, \kappa, \theta, \rho$ 均为常数， $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ 。此模型称为 Heston 随机波动率模型。

注 1 令 $\rho=1, \sigma=\kappa=\theta=0$ ，则 V_t 为常数，模型(2.1)变成经典的 B-S [1] 模型。

令 $X_t = \ln S_t$ ，由 Itô 公式，方程(2.1)变为

$$\begin{cases} dX_t = \left(r - \frac{1}{2} V_t \right) dt + \sqrt{V_t} \left(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t \right), X_0 = x_0, \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t, V_0 = v_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

引理 2.1 [12]: 设 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ 为 $[0, T]$ 中的 m 个时间点， $m \in \mathbb{N}^+$ ，且 $m \geq 1$ 。记 $X_T = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})^T$ 是 m 维向量， $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ 是 m 维实数向量，则 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})$ 基于 t_0 时刻的联合特征函数为

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^m i u_k h(t_k) - \sum_{k=1}^m q(u_k) j(t_k) + \sum_k B_k + A_m v_0 \right\}, \quad (2.3)$$

其中 i 为虚数单位， $B_k = B \left(t_{m-k+1} - t_{m-k}, q(u_{n-k+1}) + A_{k-1}, p \left(\sum_{j=m-k+1}^m u_j \right) \right)$,

$A_k = A \left(t_{m-k+1} - t_{m-k}, q(u_{n-k+1}) + A_{k-1}, p \left(\sum_{j=m-k+1}^m u_j \right) \right)$ ，且 $A_0 = 0$ ，

$h(t) = x_0 + rt$ ， $j(t) = v_0 + \kappa\theta t$ ， $p(u) = \left(\frac{1}{2} - \kappa \frac{\rho}{\sigma} - \frac{1}{2} i u (1 - \rho^2) \right) i u$ ， $q(u) = i u \frac{\rho}{\sigma}$ 。

$$A(\tau, a, b) = \frac{da(1 + e^{-d\tau}) - (1 - e^{-d\tau})(2b + \kappa a)}{d(1 + e^{-d\tau}) - (1 - e^{-d\tau})(\kappa - \sigma^2 a)}, \quad (2.4)$$

$$B(\tau, a, b) = \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left((\kappa - d)\tau + 2 \ln \frac{2d}{d(1 + e^{-d\tau}) - (1 - e^{-d\tau})(\kappa - \sigma^2 a)} \right), \quad (2.5)$$

其中 $d = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2 b}$ 。

推论 2.1 [4]: 若股价满足 Heston 模型，则执行价格为 K ，到期日为 T 的标准欧式看涨期权在 0 时刻的价格为

$$\begin{aligned} & C_e(t, x_0, v_0, K, T) \\ &= S_0 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln K} \varphi_1(u)}{iu} \right] du \right\} - K e^{-rT} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln K} \varphi(u)}{iu} \right] du \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中 $\Re(z)$ 表示 $z \in \mathbb{C}$ 的实部, $\varphi_1(u) = \frac{e^{-rT}}{S_t} \varphi(u-i)$ 。

3. 主要结果

本节在股价满足 Heston 模型条件下, 应用多维特征函数, Girsanov 测度变换和 Fourier 变换方法, 推导出基于资产价的离散几何平均亚式离散障碍期权的定价公式。

障碍期权定价

考虑离散情形下欧式下降敲出看涨期权, 假设 $S_0 > L > K$, 其中 L 是障碍值为常数, K 为执行价格, 其它情形的障碍期权可类似讨论。则具有 m 个离散时间点 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ 的欧式下降敲出看涨障碍期权在 0 时刻的价格为

$$V_{DOC}^{(m)} = E^P \left[e^{-rT} (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{(S_{t_1} > L, \dots, S_T > L)} \right], \tag{3.1}$$

把资产价格用资产价的离散几何平均代替, 则具有 m 个离散时间点 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ 的亚式下降敲出看涨障碍期权在 0 时刻的价格为

$$V_{DOC}^{(m)} = E^P \left[e^{-rT} (J_T - K)^+ \mathbf{1}_{(J_{t_1} > L, \dots, J_T > L)} \right]. \tag{3.2}$$

其中 $J_T = \left(\prod_{i=0}^m S_{t_i} \right)^{\frac{1}{m+1}}$ 为资产价的离散几何平均。

定理 3.1 在 Heston 模型下, 具有 m 个离散时间点 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ 的基于资产价的离散几何平均亚式离散障碍期权在 0 时刻的价格为:

$$\begin{aligned} V_{DOC}^{(m)} = S_0 & \left\{ \frac{1}{2^m} \left(1 - mt^{R_1} (\ln L) + \frac{m(m-1)}{2} t^{R_1} (\ln L, \ln L) - t^{R_1} (\ln L, \ln L, \ln L) + \dots \right. \right. \\ & \left. \left. + (-1)^m t^{R_1} (\ln L, \dots, \ln L) \right) \right\} - Ke^{-rT} \left\{ \frac{1}{2^m} \left(1 - mt^P (\ln L) + \frac{m(m-1)}{2} t^P (\ln L, \ln L) \right. \right. \\ & \left. \left. - t^P (\ln L, \ln L, \ln L) + \dots + (-1)^m t^P (\ln L, \dots, \ln L) \right) \right\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned} t^{R_1} (\ln L, \dots, \ln L) &= \frac{(-2)^m}{(2\pi)^m} \int \dots \int_{\mathbb{R}_+^m} \Delta_{u_1} \left[\dots \Delta_{u_m} \left[\frac{\varphi_1(u_1, \dots, u_m) e^{-i(u_1 + \dots + u_m) \ln L}}{\prod_{k=1}^m iu_k} \right] \right] du_1 \dots du_m, \\ t^P (\ln L, \dots, \ln L) &= \frac{(-2)^m}{(2\pi)^m} \int \dots \int_{\mathbb{R}_+^m} \Delta_{u_1} \left[\dots \Delta_{u_m} \left[\frac{\varphi_0(u_1, \dots, u_m) e^{-i(u_1 + \dots + u_m) \ln L}}{\prod_{k=1}^m iu_k} \right] \right] du_1 \dots du_m, \\ \Delta_{u_1} \left[\dots \Delta_{u_m} \left[\frac{\varphi(u_1, \dots, u_m) e^{-i(u_1 + \dots + u_m) \ln L}}{\prod_{k=1}^m iu_k} \right] \right] &= 2\Delta_{u_2} \dots \Delta_{u_m} \Re \left[\frac{\varphi(u_1, \dots, u_m) e^{-i(u_1 + \dots + u_m) \ln L}}{\prod_{k=1}^m iu_k} \right], \end{aligned}$$

$$\Delta_a [f(a)] = f(a) + f(-a),$$

$$\varphi_0(u_1, \dots, u_m) = e^{\left(\frac{iu_1}{2} + \frac{iu_2}{3} + \dots + \frac{iu_m}{m+1}\right)x_0} \varphi\left(\frac{u_1}{2}\right) \varphi\left(\frac{u_2}{3}, \frac{u_2}{3}\right) \cdots \varphi\left(\frac{u_m}{m+1}, \dots, \frac{u_m}{m+1}\right),$$

$$\varphi_1(u_1, \dots, u_m) = e^{-rT + \left(\frac{iu_1}{2} + \frac{iu_2}{3} + \dots + \frac{iu_m}{m+1}\right)x_0} \varphi\left(\frac{u_1}{2}\right) \varphi\left(\frac{u_2}{3}, \frac{u_2}{3}\right) \cdots \varphi\left(\frac{u_m - i}{m+1}, \dots, \frac{u_m - i}{m+1}\right).$$

证明: $m=1$ 时, 根据风险中性定价原理得

$$\begin{aligned} V_{DOC}^{(1)} &= E^P \left\{ e^{-rT} (J_T - K)^+ 1_{(J_1 > L)} \right\} \\ &= E^P \left\{ e^{-rT} J_T 1_{(J_1 > L)} \right\} - E^P \left\{ e^{-rT} K 1_{(J_1 > L)} \right\} \\ &= I_1 - I_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

计算 I_2 ,

$$I_2 = Ke^{-rT} P(J_1 > L) = Ke^{-rT} P(\ln J_1 > \ln L), \quad (3.5)$$

再利用分布函数与特征函数的唯一性及 Fourier 反变换, 即应用公式

$$F(x) = P(X \geq x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-ix} f(u)}{iu} \right] du, \quad (3.6)$$

其中 $f(u)$ 是随机变量 X 的特征函数, 则

$$I_2 = Ke^{-rT} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln L} \varphi_0(u_1)}{iu_1} \right] du_1 \right\}, \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_0(u_1) &= E^P \left[\exp\{iu_1 \ln J_1\} \mid \mathcal{F}_t \right] = E^P \left[\exp\left\{ \frac{iu_1}{2} (\ln S_0 + \ln S_t) \right\} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{\frac{iu_1}{2} x_0} E^P \left[\exp\left\{ \frac{iu_1}{2} X_t \right\} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{\frac{iu_1}{2} x_0} \varphi\left(\frac{u_1}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

计算 I_1 , 应用 Girsanov 测度变换, 定义一个新的概率测度 P_1 如下:

$$\frac{dP_1}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{e^{-rT} J_T}{S_0}.$$

显然, 上述 Radon-Nikodym 导数存在且 $E \left[\frac{e^{-rT} J_T}{S_0} \right] = 1$, 由 Girsanov 定理可知, 概率测度 P_1 等价于 P ,

则

$$I_1 = S_0 P_1(J_1 > L) = S_0 P_1(\ln J_1 > \ln L) = S_0 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln L} \varphi_1(u_1)}{iu_1} \right] du_1 \right\}, \quad (3.9)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_1(u_1) &= E^{P_1} \left[\exp\{iu_1 \ln J_1\} \mid \mathcal{F}_t \right] = E^P \left[\frac{e^{-rT} J_T}{S_0} e^{iu_1 \ln J_1} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-rT - x_0} E^P \left[\exp\{(iu_1 + 1) \ln J_1\} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{-rT + \frac{iu_1 - 1}{2} x_0} \varphi\left(\frac{u_1 - i}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

可见, $m=1$ 时, 结论成立。

$m=2$ 时, 具有 2 个离散时间点 $0=t_0 < t_1 < t_2 = T$, 根据风险中性定价原理得:

$$\begin{aligned} V_{DOC}^{(2)} &= E^P \left\{ e^{-rt} (J_T - K)^+ 1_{(J_{t_1} > L, J_T > L)} \right\} \\ &= E^P \left\{ e^{-rT} J_T 1_{(J_{t_1} > L, J_T > L)} \right\} - E^P \left\{ e^{-rT} K 1_{(J_{t_1} > L, J_T > L)} \right\} \\ &= I_1 - I_2, \end{aligned} \tag{3.11}$$

计算 I_1 和 I_2 , 由引理 2.1 及 Shephard [15] 定理 5, 得

$$\begin{aligned} I_2 &= Ke^{-rT} P(\ln J_{t_1} > \ln L, \ln J_{t_2} > \ln L) \\ &= Ke^{-rT} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu_1 \ln L} \varphi_0(u_1, 0)}{iu_1} \right] du_1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu_2 \ln L} \varphi_0(0, u_2)}{iu_2} \right] du_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi^2} \iint_{R_+^2} \Re \left[\frac{e^{-i(u_1+u_2) \ln L} \varphi_0(u_1, u_2)}{u_1 u_2} - \frac{e^{-i(u_1-u_2) \ln L} \varphi_0(u_1, -u_2)}{u_1 u_2} \right] du_1 du_2 \right\}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_0(u_1, u_2) &= E^P \left[\exp \{ iu_1 \ln J_{t_1} + iu_2 \ln J_T \} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^P \left[\exp \left\{ \frac{iu_1}{2} (\ln S_0 + \ln S_{t_1}) + \frac{iu_2}{3} (\ln S_0 + \ln S_{t_1} + \ln S_{t_2}) \right\} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{\left(\frac{iu_1 + iu_2}{2 + \frac{2}{3}}\right)x_0} E^P \left[\exp \left\{ \frac{iu_1}{2} X_{t_1} + \frac{iu_2}{3} (X_{t_1} + X_{t_2}) \right\} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{\left(\frac{iu_1 + iu_2}{2 + \frac{2}{3}}\right)x_0} \varphi \left(\frac{u_1}{2} \right) \varphi \left(\frac{u_2}{3}, \frac{u_2}{3} \right), \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= S_0 P_1(\ln J_{t_1} > \ln L, \ln J_T > \ln L) \\ &= S_0 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu_1 \ln L} \varphi_1(u_1, 0)}{iu_1} \right] du_1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu_2 \ln L} \varphi_1(0, u_2)}{iu_2} \right] du_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi^2} \iint_{R_+^2} \Re \left[\frac{e^{-i(u_1+u_2) \ln L} \varphi_1(u_1, u_2)}{u_1 u_2} - \frac{e^{-i(u_1-u_2) \ln L} \varphi_1(u_1, -u_2)}{u_1 u_2} \right] du_1 du_2 \right\}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_1(u_1, u_2) &= E^{P_1} \left[\exp \{ iu_1 \ln J_{t_1} + iu_2 \ln J_T \} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^P \left[\frac{e^{-rT} J_T}{S_0} \exp \{ iu_1 \ln J_{t_1} + iu_2 \ln J_T \} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^P \left[\exp \{ -rT + iu_1 \ln J_{t_1} + (iu_2 + 1) \ln J_T \} \mid \mathcal{F}_t \right] / S_0 \\ &= e^{-rT + \left(\frac{iu_1 + iu_2 - 2}{2 + \frac{2}{3}}\right)x_0} \varphi \left(\frac{u_1}{2} \right) \varphi \left(\frac{u_2 - i}{3}, \frac{u_2 - i}{3} \right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

可见, $m=2$ 时, 结论也成立。用同样的方法也可证得 $m=3$ 时结论成立, 进一步由数学归纳法可得 (3.3) 式, 证毕。

推论 3.1 [12]: 在 Heston 模型下, 具有 m 个离散时间点 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ 的欧式下降敲出看涨期权(9)式在 0 时刻的价格为:

$$\begin{aligned}
 V_{DOC}^{(m)} = S_0 & \left\{ \frac{1}{2^m} \left(1 - mt^{P_1}(\ln L) + \frac{m(m-1)}{2} t^{P_1}(\ln L, \ln L) - t^{P_1}(\ln L, \ln L, \ln L) + \dots \right. \right. \\
 & \left. \left. + (-1)^m t^{P_1}(\ln L, \dots, \ln L) \right) \right\} - Ke^{-rT} \left\{ \frac{1}{2^m} (1 - mt^P(\ln L) \right. \\
 & \left. + \frac{m(m-1)}{2} t^P(\ln L, \ln L) - t^P(\ln L, \ln L, \ln L) + \dots \right. \\
 & \left. \left. + (-1)^m t^P(\ln L, \dots, \ln L) \right) \right\}, \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 t^{P_1}(\ln L, \dots, \ln L) &= \frac{(-2)^m}{(2\pi)^m} \int \dots \int_{\mathbb{R}_+^m} \Delta_{u_1} \left[\dots \Delta_{u_m} \left[\frac{\varphi_1(u_1, \dots, u_m) e^{-i(u_1 + \dots + u_m) \ln L}}{\prod_{k=1}^m i u_k} \right] \right] du_1 \dots du_m, \\
 t^P(\ln L, \dots, \ln L) &= \frac{(-2)^m}{(2\pi)^m} \int \dots \int_{\mathbb{R}_+^m} \Delta_{u_1} \left[\dots \Delta_{u_m} \left[\frac{\varphi(u_1, \dots, u_m) e^{-i(u_1 + \dots + u_m) \ln L}}{\prod_{k=1}^m i u_k} \right] \right] du_1 \dots du_m, \\
 \Delta_{u_1} \left[\dots \Delta_{u_m} \left[\frac{\varphi(u_1, \dots, u_m) e^{-i(u_1 + \dots + u_m) \ln L}}{\prod_{k=1}^m i u_k} \right] \right] &= 2 \Delta_{u_2} \dots \Delta_{u_m} \Re \left[\frac{\varphi(u_1, \dots, u_m) e^{-i(u_1 + \dots + u_m) \ln L}}{\prod_{k=1}^m i u_k} \right], \\
 \Delta_a[f(a)] &= f(a) + f(-a), \quad \varphi_1(u_1, \dots, u_m) = \frac{e^{-rT}}{S_0} \varphi(u_1, \dots, u_m - i).
 \end{aligned}$$

4. 数值结果与分析

本节主要以下降敲出离散障碍看涨期权为例, 运用 Matlab2016b 和 Mathematical11.0 软件编程计算, 分析比较了 Heston 模型下亚式离散障碍期权和欧式离散障碍期权价格的变化情况, 并分析了 Heston 模型的主要参数对亚式离散障碍期权价格的影响。模型的主要参数选取如下

$$K = 35, L = 40, t_0 = 0, T = 1, t_i = \left\{ \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1 \right\}, \theta = 0.1444, r = 0.03, \kappa = 6, v_0 = 0.15, \sigma = 0.5, \rho = -0.7$$

首先, 在 Heston 随机波动率模型下, 比较亚式离散障碍期权与欧式离散障碍期权价格随股价变化和离散点改变而变化的情况。由表 1, 我们可以看到, 两种期权的价格都是随着股价的增加而增大, 随着 m 值的增大而减少。而且, 亚式离散障碍期权的价格比欧式离散障碍期权的价格低, 即基于资产价的离散几何平均情形的亚式离散障碍期权比一般的离散障碍期权价格低, 这是因为亚式期权在到期日时的收益依赖于标的资产某一段时间内的平均价格, 这样它通常比标准化的欧式期权的价格便宜, 且该期权不易被操控。

Table 1. Comparison of the prices of Asian discrete obstacle options and European discrete obstacle options under the Heston model

表 1. Heston 模型下亚式离散障碍期权与欧式离散障碍期权价格比较

S_0	亚式离散障碍期权			欧式离散障碍期权		
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
55	20.0781	19.2959	18.5355	21.8135	21.3125	21.0284
60	25.0259	24.4659	23.9716	26.5549	26.2211	26.0344
65	29.9648	29.4727	29.1185	31.3868	31.1660	31.0405
70	34.8953	34.4086	34.1209	36.2762	36.1302	36.0434
75	39.8207	39.3155	39.0545	41.2025	41.1054	41.0439
80	44.7432	44.2107	43.9558	46.1528	46.0878	46.0432
85	49.6643	49.1011	48.8418	51.1187	51.0749	51.0419
90	54.5846	53.9894	53.7206	56.0952	56.0653	56.0406

最后考察模型的主要参数对期权价格的影响，图 1 是以股价 $S_0 = 80$ 以及各参数取值不同为例研究期权价格的变化情况。由图 1(a)可知， $m=1$ 和 $m=2$ 时，期权价格都是参数 σ 的增函数，而 $m=3$ 时期权价格随着 σ 的增大而减小；图 1(b)可以看到， $m=1$ 和 $m=2$ 时，期权价格随着的 κ 增大而减小，而 $m=3$ 时期权价格是 κ 的增函数；由图 1(c)可知，期权价格随着 θ 的增大而减小，且随着 m 的增大减小的幅度越大。

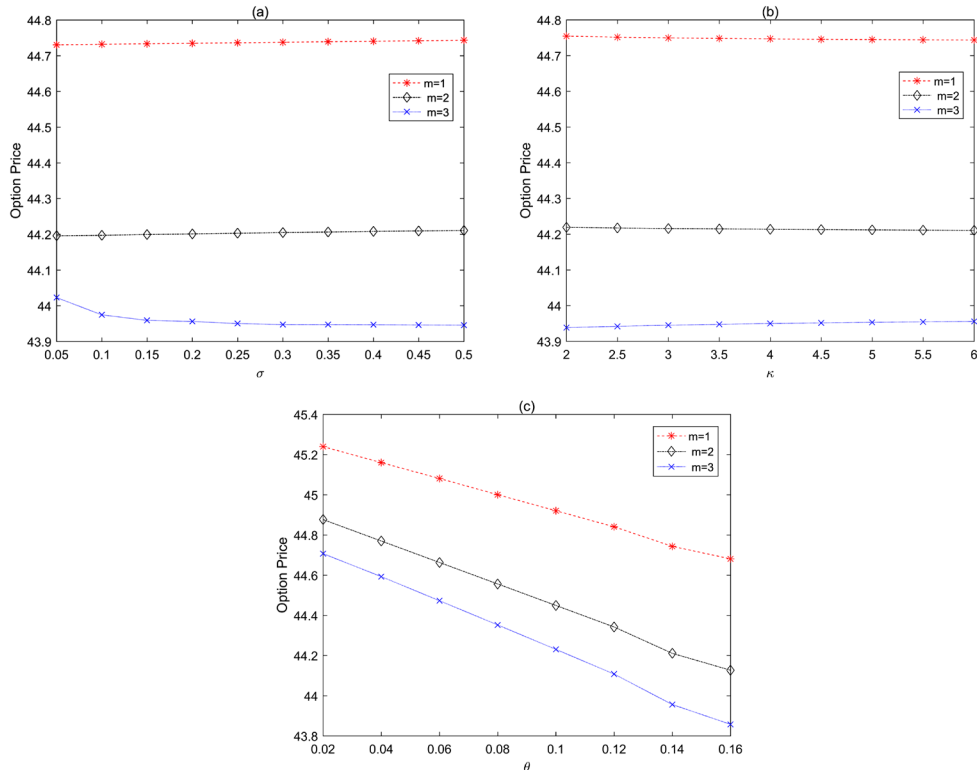


Figure 1. Influence of parameters on option price
图 1. 参数对期权价格的影响

5. 结论

本文在 Heston 随机波动率模型下应用 Fourier 变换方法和特征函数技术获得了基于资产价的离散几何平均情形的亚式离散障碍期权价格的显示解，并通过数值实例，比较了亚式和欧式离散障碍期权价格随着股价和离散点变化的情况，分析了模型参数对期权价格的影响，数值计算结果表明，模型中的参数对期权价格的影响具有不同的显著作用。本文的研究结果对进一步研究其他路径依赖型期权或美式期权有很好的借鉴作用。

参考文献

- [1] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **83**, 637-654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [2] Merton, R.C. (1976) Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, **3**, 125-144. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(76\)90022-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2)
- [3] Kou, S. (2002) A Jump Diffusion Model for Option Pricing. *Management Science*, **48**, 1086-1101. <https://doi.org/10.1287/mnsc.48.8.1086.166>
- [4] Heston, S.L. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343. <https://doi.org/10.1093/rfs/6.2.327>
- [5] Hull, J.C. and White, A. (1987) The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, **42**, 281-300. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1987.tb02568.x>
- [6] Stein, E.M. and Stein, J.C. (1991) Stocks Price Distribution with Stochastic Volatility: An Analytic Application. *Review of Financial Studies*, **4**, 281-300. <https://doi.org/10.1093/rfs/4.4.727>
- [7] Chen, R. and Scott, L.O. (1992) Pricing Interest Rate Options in a Two-Factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure. *Review of Financial Studies*, **5**, 613-636. <https://doi.org/10.1093/rfs/5.4.613>
- [8] Bates, D.S. (1996) Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. *Review of Financial Studies*, **9**, 69-107. <https://doi.org/10.1093/rfs/9.1.69>
- [9] 邓国和, 杨向群. 随机波动率与双指数跳扩散组合模型的美式期权定价[J]. 应用数学学报, 2009, 32(2): 236-255.
- [10] Broadie, M., Glasserman, P. and Kou, S. (1997) A Continuity Correction for Discrete Barrier Options. *Mathematical Finance*, **7**, 325-349. <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00035>
- [11] Fusai, G. and Recchioni, M.C. (2007) Analysis of Quadrature Methods for Pricing Discrete Barrier Options. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **31**, 826-860. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2006.03.002>
- [12] Griebisch, S. and Wystup, U. (2011) On the Valuation of Fader and Discrete Barrier Options in Heston's Stochastic Volatility Model. *Quantitative Finance*, **11**, 693-709. <https://doi.org/10.1080/14697688.2010.503375>
- [13] 薛广明, 邓国和. 基于 Bates 模型的欧式离散障碍期权定价[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版, 2018, 52(2): 164-171.
- [14] Duffie, D., Kan, R. and Singeton, K. (2000) Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusion. *Econometrica*, **68**, 1343-1376. <https://doi.org/10.1111/1468-0262.00164>
- [15] Shephard, N.G. (1991) From Characteristic Function to Distribution Function: A Simple Framework for the Theory. *Econometric Theory*, **7**, 519. <https://doi.org/10.1017/S0266466600004746>