

Traffic Equilibrium Model for Offline Transit Exclusive Roads

Wei Mao*, Jingjing Liang, Xiaoning Zhang

School of Economics and Management, Tongji University, Shanghai
Email: *ceucdavis@aliyun.com

Received: May 10th, 2016; accepted: May 24th, 2016; published: May 30th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

A novel traffic equilibrium model considering offline transit exclusive roads is proposed in the paper. Both transit vehicles and private cars exist in the network, and transit vehicles only operate in the exclusive links. Since travelers have inaccurate and uncertain estimation on the travel costs, discrete route choice model is used to describe the users' travel behavior. The user equilibrium equivalent variational inequality model is formulated, and the method of successive average (MSA) is proposed to solve the model. The numerical example illustrates that the model and the algorithm are effective.

Keywords

Transit Exclusive Road, Traffic Equilibrium, Variational Inequality, Method of Successive Average

分离式公交专用道的交通均衡模型

毛 伟*, 梁晶晶, 张小宁

同济大学经济与管理学院, 上海
Email: *ceucdavis@aliyun.com

收稿日期: 2016年5月10日; 录用日期: 2016年5月24日; 发布日期: 2016年5月30日

*通讯作者。

摘要

本文提出一种新的分离式公交专用道的交通均衡模型。交通网络上同时存在公交出行方式和私家车出行方式，并且公交车辆在指定的专用道上运行。由于出行者对不同交通方式出行成本的估计是不精确的、随机的，因此采用随机选择模型来描述交通方式选择过程。与交通均衡条件等价的变分不等式问题在文中列出，并给出了相应的连续平均法算法。算例表明模型和算法有效。

关键词

公交专用道，交通均衡，变分不等式，连续平均法

1. 引言

国外对公交专用道的研究起步较早，1959年1月在美国 Civil Engineering Report 中发表的一篇题为“国家首都地区的交通调查”的文章中，曾提出了在机动车道上中央分隔带规划设计公交专用道的研究方案[1]。1970年的“快速公交的潜能”研究报告中提出了在高速公路上修建公交专用道的思路，使公交专用道的应用突破了城市的界限。2001年Lloyd详细介绍了公交专用道设计的背景、目的、车道设置、停靠站设置、服务水平等[2]。国内学者也做了许多研究，杨晓光、史春华、黄晓强、叶欣等对公交专用道系统的设计在技术方面进行了探讨[3]-[6]。童文聪等以京通快速路为例，评估了公交专用道设置的综合效益[7]。杨丹研究了创新型城市中公共交通财政补贴的模式[8]。

国内外对于交通配流的研究主要针对单一网络，对于公交专用道与普通道路混合交通网络的配流模型，国内外学者研究较少。本文建立一种新的考虑公交专用道和普通车道混合运行条件下的交通均衡模型，这种模型对于混合交通流预测、公交专用道网络设计、公交专用道信号灯配时、以及混合交通网络的拥挤收费、通行权管理等具有重要的意义。

2. 简介及符号

交通网络上同时存在公交出行方式和私家车出行方式的交通分配问题，被称为联合方式划分/交通分配问题。假设路网中只有两种出行方式：公交出行和私家车出行，公交出行的服务水平与私家车流量无关，也与公共交通的乘客流量无关，并且公交车辆在指定的专用道上运行，因此公交路网无拥挤效应；私家车路网中，路段出行时间与路段流量成正相关，存在拥挤效应；两种交通方式互不影响。两种交通方式的流量用单位时间的人数来表示，由于对基本路网的分析是依据人流进行的，因此必须用车辆乘坐系数将公交车流和私家车流转化为人流。

交通路网由符号 $G=(N,A)$ 表示， N 代表结点集合，符号 R 表示路网上所有 OD 的起点集合，即 $r \in R$ ，符号 S 表示路网上所有 OD 的终点集合。路段出行时间采用 BPR 函数形式。路网中的路段、路径、出行时间关系如下：

$$t_a^1(x_a^1) = t_{0,a}^1 \left[1 + \alpha \left(\frac{x_a^1}{C_a^1} \right)^\beta \right], \forall a \in A_1, \quad (1)$$

$$t_a^2(x_a^2) = t_{0,a}^2 \left[1 + \alpha \left(\frac{x_a^2}{C_a^2} \right)^\beta \right], \forall a \in A_2, \quad (2)$$

$$c_{1,j}^{rs} = \sum_{a \in A_1} t_a^1(x_a^1, \tau_a) \delta_{1,aj}^{rs}, j \in K_1, r \in R, s \in S, \quad (3)$$

$$c_{2,j}^{rs} = \sum_{a \in A_1} t_a^2(x_a^2) \delta_{2,aj}^{rs}, j \in K_2, r \in R, s \in S, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in K_1} f_{1,j}^{rs} = \frac{q_{rs}^1}{m_1}, r \in R, s \in S, \quad (5)$$

$$\sum_{j \in K_2} f_{2,j}^{rs} = \frac{q_{rs}^2}{m_2}, r \in R, s \in S, \quad (6)$$

$$q_{rs}^1 + q_{rs}^2 = q_{rs}, r \in R, s \in S, \quad (7)$$

$$x_a^1 = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{j \in K_1} f_{1,j}^{rs} \delta_{1,aj}^{rs}, a \in A_1, \quad (8)$$

$$x_a^2 = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{j \in K_2} f_{2,j}^{rs} \delta_{2,aj}^{rs}, a \in A_2, \quad (9)$$

$$f_{1,j}^{rs} \geq 0, j \in K_1, r \in R, s \in S, \quad (10)$$

$$f_{2,j}^{rs} \geq 0, j \in K_2, r \in R, s \in S, \quad (11)$$

式中变量含义见表 1。

c_1^{rs}, c_2^{rs} 分别表示私家车、公交车路网中的实际最小出行时间，即

$$c_1^{rs} = \min \{c_{1,j}^{rs}\}, j \in K_1, r \in R, s \in S, \quad (12)$$

$$c_2^{rs} = \min \{c_{2,j}^{rs}\}, j \in K_2, r \in R, s \in S. \quad (13)$$

Table 1. Variable definition

表 1. 变量定义

符号	含义	符号	含义
A_1	私家车路网中的路段集合	A_2	公交车路网中的路段集合
t_a^1	路段 a 上私家车的行程时间	t_a^2	路段 a 上公交车的行程时间
t_j^1	路段 a 私家车自由流的行程时间	t_j^2	路段 a 公交车自由流的行程时间
x_a^1	路段 a 上私家车的交通量	x_a^2	路段 a 上公交车的交通量
C_a^1	路段 a 上私家车的初始通行能力	C_a^2	路段 a 上公交车的初始通行能力
K_1	私家车出行者的选择路径集合	K_2	公交车出行者的选择路径集合
$c_{1,j}^{rs}$	私家车选择路径 j 时的出行时间	$c_{2,j}^{rs}$	公交车选择路径 j 时的出行时间
$f_{1,j}^{rs}$	私家车选择路径 j 时的流量	$f_{2,j}^{rs}$	公交车选择路径 j 时的流量
q_{rs}^1	OD 对 rs 选择私家车出行的总人流量	q_{rs}^2	OD 对 rs 选择公交车出行的总人流量
m_1	私家车载客率	m_2	公交车载客率
$\delta_{1,aj}^{rs}$	私家车路网中的路径路段关系变量	$\delta_{2,aj}^{rs}$	公交车路网中的路径路段关系变量

3. 模型

由于出行者对不同交通方式出行成本的估计是不精确的、随机的，因此必须用随机选择模型来描述交通方式选择过程。令 $\pi_i^{rs}, i=1,2$ 表示出行者在 OD 对 rs 之间的第 i 种交通方式的理解出行成本，则

$$\pi_i^{rs} = c_i^{rs} - \frac{1}{\theta} \xi_i^{rs}, i=1,2, \quad (14)$$

式中假定 ξ_i^{rs} 是服从 Gumbel 分布相互独立的随机变量，式中参数 θ 与理解出行成本的方差成反比，它是出行者对交通方式出行成本的了解程度的一种测度。交通方式 i 被选中的概率即为交通方式的理解出行成本达到最小的概率：

$$P_i^{rs} = \text{Prob} \left[\pi_i^{rs} = \min_{j \in K_i} (\pi_j^{rs}) \right], i=1,2, \quad (15)$$

根据 Gumbel 分布的性质，交通方式选择概率可表达为如下形式：

$$P_i^{rs} = \frac{\exp(-\theta c_i^{rs})}{\sum_i \exp(-\theta c_i^{rs})}, i=1,2, r \in R, s \in S. \quad (16)$$

令 $\mathbf{c}^{rs} = (c_1^{rs}, c_2^{rs})$ 表示 OD 对 rs 之间的实际交通方式出行成本向量，则交通方式选择问题的满意函数 $\tilde{S}(\mathbf{c}^{rs})$ 可定义为：

$$\tilde{S}(\mathbf{c}^{rs}) = E \left[\max_i \{u_i^{rs}\} \right], i=1,2, \quad (17)$$

式中的 u_i^{rs} 定义为 $u_i^{rs} = -\theta \pi_i^{rs} = -\theta c_i^{rs} + \xi_i^{rs}$ ，令 $S(\mathbf{c}^{rs})$ 为不同交通方式的期望最小理解出行成本。则 $S(\mathbf{c}^{rs}) = E[\min \pi_i^{rs}] = \frac{1}{\theta} \tilde{S}(\mathbf{c}^{rs})$ 。并且由 $\frac{\partial S(\mathbf{c}^{rs})}{\partial c_i^{rs}} = P_i^{rs}(\mathbf{c}^{rs})$ ，有 $S(\mathbf{c}^{rs}) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(\sum_i \exp(-\theta c_i^{rs}) \right), i=1,2$ 。

用户均衡条件：

$$\sum_{rs} \sum_j (c_{1,j}^{rs}(f_{1,j}^{rs*}) - c_1^{rs}) f_{1,j}^{rs*} = 0, f_{1,j}^{rs*} \geq 0, \quad (18)$$

$$\sum_{rs} \sum_j (c_{2,j}^{rs}(f_{2,j}^{rs*}) - c_2^{rs}) f_{2,j}^{rs*} = 0, f_{2,j}^{rs*} \geq 0, \quad (19)$$

$$q_{rs}^1 = \frac{q_{rs}}{1 + e^{\theta(c_1^{rs} - c_2^{rs})}}, \quad (20)$$

$$q_{rs}^2 = \frac{q_{rs}}{1 + e^{\theta(c_2^{rs} - c_1^{rs})}}. \quad (21)$$

等价的变分不等式问题为：

$$\begin{aligned} & \sum_{rs} \sum_j (c_{1,j}^{rs}(f_{1,j}^{rs*}) - c_1^{rs})(f_{1,j}^{rs} - f_{1,j}^{rs*}) \cdot m_1 + \sum_{rs} \sum_j (c_{2,j}^{rs}(f_{2,j}^{rs*}) - c_2^{rs})(f_{2,j}^{rs} - f_{2,j}^{rs*}) \cdot m_2 \\ & + \left(c_1^{rs} + \frac{1}{\theta} \ln q_{rs}^{1*} - \frac{1}{\theta} \ln q_{rs} - S(c_1^{rs}) \right) (q_{rs}^1 - q_{rs}^{1*}) + \left(c_2^{rs} + \frac{1}{\theta} \ln q_{rs}^{2*} - \frac{1}{\theta} \ln q_{rs} - S(c_2^{rs}) \right) (q_{rs}^2 - q_{rs}^{2*}) \geq 0, \end{aligned} \quad (22)$$

其中：

$$\begin{aligned}
& \sum_{rs} \sum_j c_{1,j}^{rs} (f_{1,j}^{rs*}) (f_{1,j}^{rs} - f_{1,j}^{rs*}) \cdot m_1 + \sum_{rs} \sum_j c_{2,j}^{rs} (f_{2,j}^{rs*}) (f_{2,j}^{rs} - f_{2,j}^{rs*}) \cdot m_2 \\
&= \sum_{rs} \sum_j \left(\sum_{a \in A} t_a^1(x_a^{1*}) \delta_{a,j} \right) (f_{1,j}^{rs} - f_{1,j}^{rs*}) \cdot m_1 + \sum_{rs} \sum_j \left(\sum_{a \in A} t_a^2(x_a^{2*}) \delta_{a,j} \right) (f_{2,j}^{rs} - f_{2,j}^{rs*}) \cdot m_2, \quad (23) \\
&= \sum_{a \in A} t_a^1(x_a^{1*}) \sum_{rs} \sum_j \delta_{a,j} (f_{1,j}^{rs} - f_{1,j}^{rs*}) \cdot m_1 + \sum_{a \in A} t_a^2(x_a^{2*}) \sum_{rs} \sum_j \delta_{a,j} (f_{2,j}^{rs} - f_{2,j}^{rs*}) \cdot m_2 \\
&= m_1 \cdot \sum_{a \in A} t_a^1(x_a^{1*}) (x_a^1 - x_a^{1*}) + m_2 \cdot \sum_{a \in A} t_a^2(x_a^{2*}) (x_a^2 - x_a^{2*}) \\
&\quad \sum_{rs} \sum_j c_{1,j}^{rs} (f_{1,j}^{rs} - f_{1,j}^{rs*}) \cdot m_1 + \sum_{rs} \sum_j c_{2,j}^{rs} (f_{2,j}^{rs} - f_{2,j}^{rs*}) \cdot m_2 \\
&= c_1^{rs} \left(\frac{q_{rs}^1}{m_1} - \frac{q_{rs}^1}{m_1} \right) \cdot m_1 + c_2^{rs} \left(\frac{q_{rs}^2}{m_2} - \frac{q_{rs}^2}{m_2} \right) \cdot m_2 = 0
\end{aligned}$$

4. 算法

该模型采用 MSA 算法求解，步骤如下：

步骤 0：初始化。根据初始交通时间集合 $\{t_a^{1,0}\}, \{t_a^{2,0}\}$ 进行全有全无配流，得到路段流量集合 $\{x_a^{1,1}\}, \{x_a^{2,1}\}$ 。

令 $n = 0$ 。

步骤 1：更新交通时间。令 $t_a^{1,n} = t_a(x_a^{1,n}), t_a^{2,n} = t_a(x_a^{2,n}), \forall a$ 。

步骤 2：确定搜索方向。根据当前的路段交通时间集合 $\{t_a^{1,n}\}, \{t_a^{2,n}\}$ 进行全有全无配流，得到辅助路段交通流模式 $\{y_a^{1,n}\}, \{y_a^{2,n}\}$ 。

步骤 3：更新路段流量。令 $x_a^{1,n+1} = x_a^{1,n} + \frac{1}{n} (y_a^{1,n} - x_a^{1,n}), x_a^{2,n+1} = x_a^{2,n} + \frac{1}{n} (y_a^{2,n} - x_a^{2,n})$ ，求出新的交通流模式。

步骤 4：更新路网中的不同交通方式的交通需求量。根据 $\{x_a^{1,n+1}\}, \{x_a^{2,n+1}\}$ 计算相应的私家车路网和公交车路网的最小出行时间 $c_1^{rs,n+1}, c_2^{rs,n+1}$ ，然后根据 $q_{rs}^1 = \frac{q_{rs}}{1 + e^{\theta(c_1^{rs,n+1} - c_2^{rs,n+1})}}$ 和 $q_{rs}^2 = \frac{q_{rs}}{1 + e^{\theta(c_2^{rs,n+1} - c_1^{rs,n+1})}}$ 计算两路网中的出行需求量 q_{rs}^1 和 q_{rs}^2 。

步骤 5：收敛准则。如果算法已收敛，则终止，否则，令 $n = n + 1$ ，转向步骤 1。

5. 算例分析

我们用图 1 中的路网来说明需求固定时，两种交通方式下的停车收费和基于路段的拥挤收费设计问题。其中，路网中只有一个出行 OD 对 1 到 4，总出行流量按照人流量折算为 8000 人。实线段表示私家车路网，虚线表示公交路网，并且路网中流向确定。 $m_1 = 1$ 人/车， $m_2 = 20$ 人/车。

相应的参数见表 2。

交通分配采用用户均衡准则时，所有出行者均按照自身出行时间最小选择出行路线，即遵循 Wardrop 第一原则(UE)。得到均衡时的两种交通方式相应的路段流量 $\{x_a^1, x_a^2\}$ 、路径出行时间 $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ 、总出行量 $\{q^1, q^2\}$ 分别如表 3，表 4 所示。

路网上用户均衡时私家车出行量 $q^1 = 2998$ ，公交车出行量 $q^2 = 5002$ ，交通网络的总出行最小时间 $F_{\min}^1 = 380157$ 。

迭代过程见图 2 至图 6。图 2 是总出行时间随迭代次数的变化趋势，显然随着迭代次数的增大，总出行时间不断降低并趋于稳定，即路网达到了均衡状态；图 3 和图 4 分别是私家车和公交车路网中三条路径各自的出行时间随迭代次数的变化趋势，随着迭代次数增大，三条路径的出行时间逐步减小并趋于相等；图 5 和图 6 分别是选择私家车和公交车出行的出行量变化趋势，同样，在一定的迭代次数之后，二者都趋于稳定。这些图表从不同的角度表征了路网的均衡状态。

Table 2. Link parameters
表 2. 路段参数

路段	$t_{0,a}^1$ (min)	C_a^1 (veh/h)	$t_{0,a}^2$ (min)	C_a^2 (veh/h)
(1,2)	18	1500	22	700
(1,3)	26	1200	29	600
(2,3)	5	1000	7	450
(2,4)	21	1500	25	600
(3,4)	14	1200	18	650

Table 3. UE road traffic flow
表 3. UE 时的路段车流量

路段	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
私家车 x_a^1	1845	1153	348	1497	1501
公交车 x_a^2	138.6	111.5	24.5	114.1	136.0

Table 4. UE path travel time
表 4. UE 时的路径出行时间

路径	(1→2→4)	(1→3→4)	(1→2→3→4)
私家车 f^1	48.30	48.47	48.33
公交车 f^2	47.01	47.01	47.01

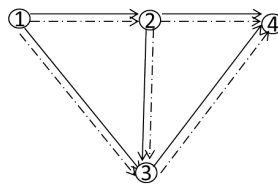


Figure 1. Road network
图 1. 路网图

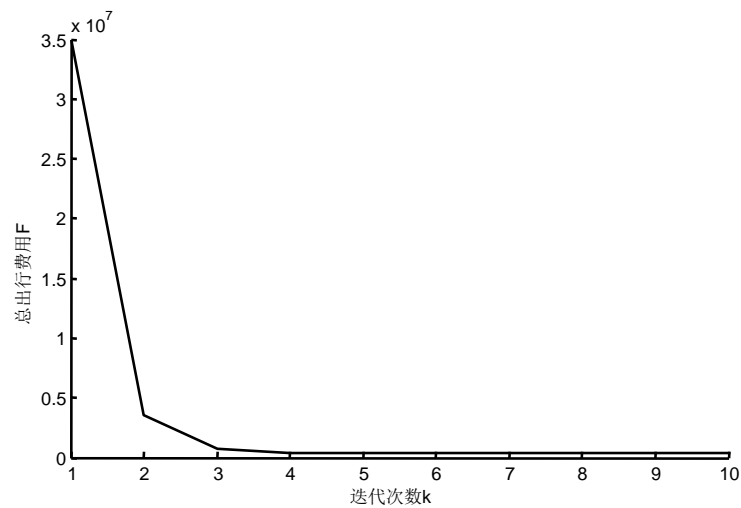


Figure 2. The change trend of total travel time with iteration number
图 2. 总出行时间随迭代次数的变化趋势

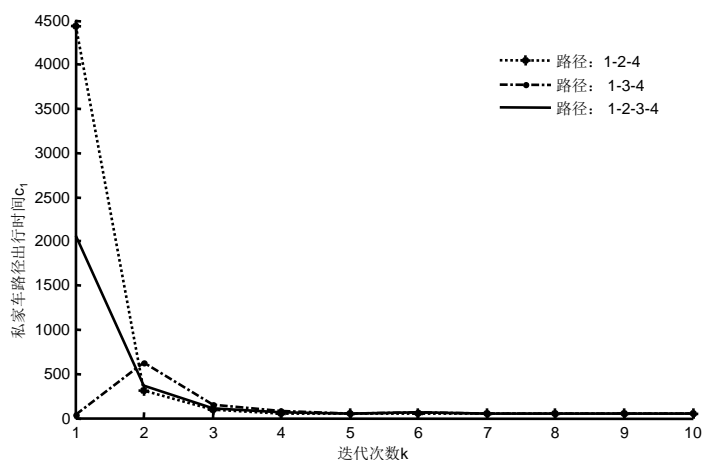


Figure 3. The change trend of the private car travel time with the number of iterations

图 3. 私家车出行时间随迭代次数的变化趋势

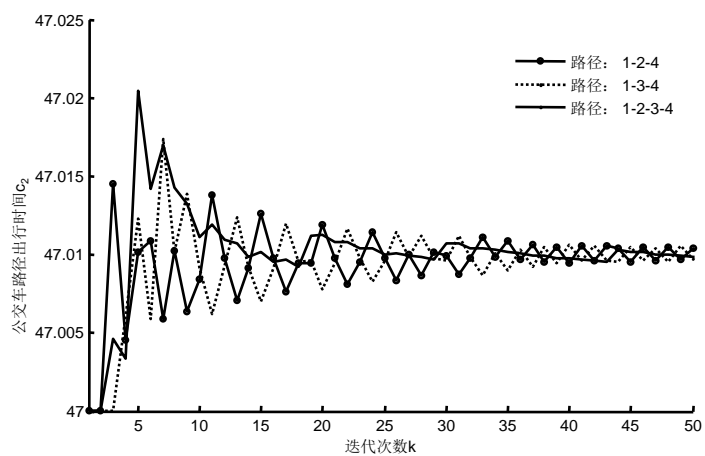


Figure 4. Change trend of bus travel time with iteration number

图 4. 公交车出行时间随迭代次数的变化趋势

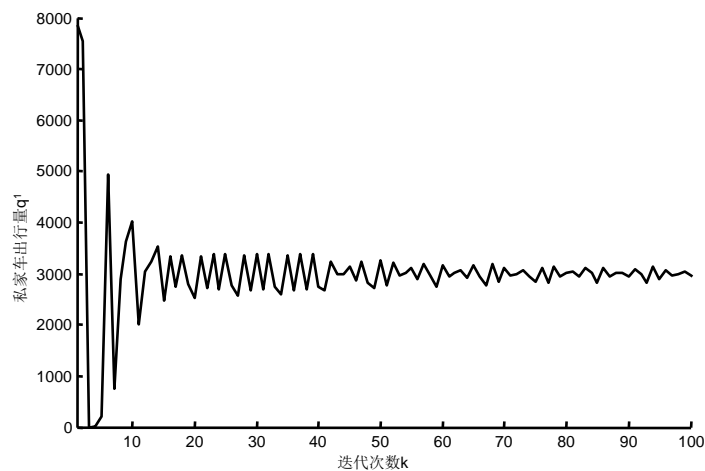


Figure 5. Trends in private car travel volume change

图 5. 私家车出行量变化趋势

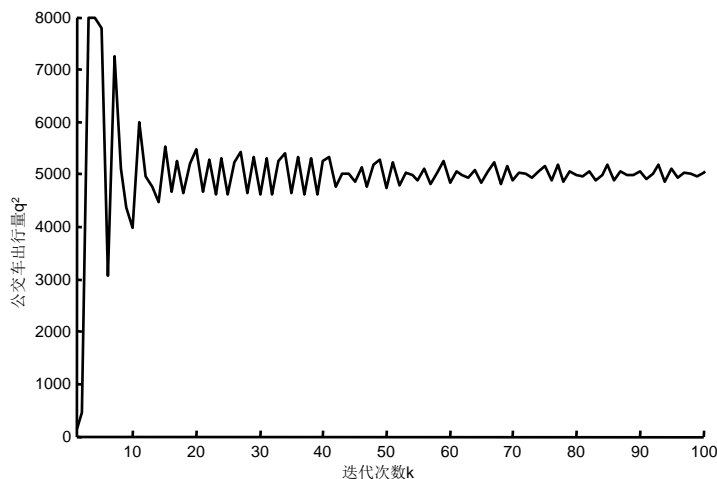


Figure 6. Bus travel trends
图 6. 公交车出行量变化趋势

6. 结论

本文提出一种新的含有分离式公交专用道的双模式交通网络用户均衡模型。在交通网络上，载客率高的公交和载客率低的私家车两种出行方式并存，并且公交车辆只能在指定的专用道上运行。由于每个出行者对不同交通方式出行成本的估计具有不确定性，因此本文采用随机选择模型来描述交通方式选择行为。经过严格的推导，与交通均衡条件等价的变分不等式问题在文中列出，并给出了相应的连续平均法算法。通过算例验证，表明本文提出的模型和算法计算速度很快，且很快就能收敛到均衡解，算法有效。本文的模型和算法为公交优先的管理研究打下了良好的基础。

致 谢

本文受国家自然科学基金资助，项目编号71361130014和71125004。

参考文献 (References)

- [1] 曾奕林. 城市公交专用道系统设计方法研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 长安大学, 2005.
- [2] Wright, L. (2001) Latin American Busways: Moving People Rather than Cars. *Natural Resources Forum*, **25**, 121-134. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1477-8947.2001.tb00754.x>
- [3] 杨晓光. 城市道路交通设计指南[M]. 北京: 人民交通出版社, 2003.
- [4] 史春华, 杨晓光. 城市公交专用道的设置与设计[J]. 城市轨道交通研究, 2000, 3(2): 49-52.
- [5] 黄晓强. 公交专用道系统在国内的设计研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 河海大学, 2007.
- [6] 叶欣. 城市公共交通专用道的设置研究——以南京市中新路公交专用道设计为例[J]. 交通标准化, 2010(19): 19-22.
- [7] 童文聪, 缪芳. 公交专用车道设置综合效益评估——以京通快速路为例[J]. 城市交通, 2014, 12(6): 63-69.
- [8] 杨丹. 创新城市公共交通财政补贴模式的对策与思路[J]. 经济研究参考, 2015(53): 41-43.