Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2015, 5, 1-5
Published Online February 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2015.51001

A Projection Algorithm for Compressive Sensing

Lichao Yu*, Biao Qu

School of Management, Qufu Normal University, Rizhao Shandong
Email: *1002218442@qq.com

Received: Jan. 23rd, 2015; accepted: Feb. 4th, 2015; published: Feb. 11th, 2015

Abstract

In the paper, we first transform the optimization problem of compressed sensing into a convex feasibility problem. Then, a projection method is presented to solve it.

Keywords

Convex Feasibility Problem, Compressed Sensing, Projection Method

求解压缩传感问题的一种投影算法

于丽超*，屈　彪

曲阜师范大学管理学院，山东　日照
Email: *1002218442@qq.com

收稿日期：2015年1月23日；录用日期：2015年2月4日；发布日期：2015年2月11日

摘　要

本文在将压缩传感的最优化问题转化为凸可行问题的基础上，设计了一种投影算法来求解凸可行问题，进而来求解压缩传感问题。

*通讯作者。

关键词

凸可行问题，压缩传感，投影算法

1. 引言

近年来，Donoho、Candes 及 Tao 等人[1] [2]提出了一种新的信息获取指导理论——压缩传感(Compressive Sensing or Compressed Sensing，简称为 CS)。该理论表明：如果原始信号具有稀疏先验性，通过选取适当的优化算法，在获取少量测量值的基础上，对原始信号进行恢复重建。区别于传统的奈奎斯特采样定理，这种新颖的信号处理方式可以认为是一种全局采样，它将采样与压缩同时进行，用极少的观测值拾取足够多的原始信号的信息，有效地减少采样的数据复杂度，同时也节约了信号采样所需花费的时间，在实际应用当中可以降低采集系统的成本，选择适当的重构算法还可以加快图像的重建速度，提升图像的重建质量[3]。

压缩传感理论的提出，为信号采样领域注入了新鲜血液，引起信号处理领域的研究热潮，具有广阔的应用前景。目前，压缩传感理论被应用于许多领域，例如：压缩成像、生物传感、医学成像、模数信息转换以及地球地理数据分析等[4]。

从信号重构的角度出发，利用具备某种分布特性的测量矩阵 $H \in \Re^{m\times n}$，对原始信号 $x \in \Re^{n}$ 进行测量，在该测量矩阵的线性测量值为 $y \in \Re^{m}$，其表达式为：

$$y = Hx$$

在上式中，测量值 y 也可以认为是原始信号 x 在 H 上的线性投影，我们需要求解一个逆问题，通过测量值 y 对 x 进行重构。理论证明[2]，在 y 与 H 满足一定条件的前提下，我们可以通过求解最优 l_0 范数达到精确重构原始信号的目的：

$$\begin{aligned}&\min_{x}\|x\|_0\\&s.t.\ y = Hx\end{aligned}$$

其中，$\|x\|_0$ 表示向量 x 的 l_0 范数，即 x 中非零分量的个数。

但是，对于 l_0 范数的最优化问题而言，其本质是 NP 问题，很难在多项式时间内求解，甚至对于解的可靠性都无法给出证明。所以，通常我们都将 l_0 最优化问题转换成 l_1 最优化问题来求解。即考虑如下问题：

$$\begin{aligned}&\min_{x}\|x\|_1\\&s.t.\ y = Hx\end{aligned} \tag{1}$$

其中，$\|x\|_1$ 表示向量 x 的 l_1 范数。

我们在本文中，我们通过求解如下问题来求解问题(1)：

$$\text{求}x^* \in \Re^n,\text{使得}y = Hx^*\text{且}\|x\|_1 \le \varepsilon, \tag{2}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是可任意选择的。

受文献[5]的启发，我们将问题(2)转化为一个凸可行问题，通过设计投影算法来求解该凸可行问题，从而得到问题(1)的最优解。

本文组织如下：在第二部分提出了问题的转化过程，第三部分提出了投影算法求解凸可行问题，并给出算法的收敛性分析。

2. 问题的转化形式

定义：

$$Q_j = \left\{ x \in \Re^n \middle| y_j = \left\langle h^j, x \right\rangle \right\}, \quad j = 1, \cdots, m, \tag{3}$$

$$Q_{m+1} = \left\{ x \in \Re^n \middle| \|x\|_1 - \varepsilon \le 0 \right\}, \tag{4}$$

其中$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示内积，$h^j$是矩阵$H^{\mathrm{T}}$的第$j$列，$y_j$表示$y$的第$j$个分量。

则问题(2)可等价地转化为如下凸可行问题：

$$\text{找} x^* \in \left(\bigcap_{j=1}^{m} Q_j \right) \bigcap Q_{m+1}. \tag{5}$$

注：由定义可知，$Q_1, Q_2, \cdots, Q_m \subseteq \Re^n$均为超平面，从而为闭凸集，$Q_{m+1}$为闭凸集。

3. 算法及收敛性分析

设$\Omega \subseteq \Re^n$为非空闭凸集，对任意$x \in \Re^n$，定义：

$$P_\Omega(x) = \arg\min\left\{ \|x - y\| \middle| y \in \Omega \right\},$$

并称其为x到Ω上的投影。$P_\Omega(\cdot)$称为从$\Re^n$到Ω上的投影算子。

当Ω是某些特殊的闭凸集时，求x在Ω上的投影是很好求的，能够用显式表达出来。如，当Ω是$\Re^n$中的超平面$\left\{ x \middle| p^{\mathrm{T}} x = \alpha \right\}$(其中$p \in \Re^n$为非零向量，$\alpha \in \Re$)时，我们有如下结果：

引理 3.1 [6]令$\Omega = \left\{ x \middle| p^{\mathrm{T}} x = \alpha \right\}$(其中$p \in \Re^n$为非零向量，$\alpha \in \Re$)，则对任意的$x^0 \in \Re^n$，$x^0$到$\Omega$上的投影$P_\Omega\left(x^0\right)$为：

$$P_\Omega\left(x^0\right) = x^0 + \frac{\alpha - p^{\mathrm{T}} x^0}{\|p\|^2} p.$$

关于投影算子，有如下性质：

引理 3.2 [7]令$\Omega \subseteq \Re^n$是非空闭凸集，则对$\forall x, y \in \Re^n$，$z \in \Omega$，有：

1) $\left\langle P_\Omega(x) - x, z - P_\Omega(x) \right\rangle \ge 0$；

2) $\left\| P_\Omega(x) - P_\Omega(y) \right\| \le \|x - y\|$；

3) $\left\| P_\Omega(x) - z \right\|^2 \le \|x - z\|^2 - \left\| P_\Omega(x) - x \right\|^2$；

4) $\left\| P_\Omega(x) - P_\Omega(y) \right\|^2 \le \|x - y\|^2 - \left\| P_\Omega(x) - x + y - P_\Omega(y) \right\|^2$.

下面，我们给出我们的投影算法：

算法 3.1：

任取$x^0 \in \Re^n, 0 < \underline{w} \le w_k \le \overline{w} < 2$, 对$k = 1, 2, \cdots$,

计算：$\bar{d}_j^k = P_{Q_j}\left(x^k\right) - x^k$，$j = 1, 2, \cdots, m$.

令：$d_k = \sum_{j=1}^{m} \bar{d}_j^k$；$r_k = \dfrac{\sum_{j=1}^{m} \left\| \bar{d}_j^k \right\|^2}{\|d_k\|^2}$.

计算：$x^{k+1} = P_{Q_{m+1}}\left(x^k + w_k r_k d_k\right)$.

其中：$Q_j\left(j=1,2,\cdots,m\right)$和$Q_{m+1}$分别由(3)、(4)定义。

注：由引理 3.1 知，x^k 到$Q_j\left(j=1,2,\cdots,m\right)$上的投影$P_{Q_j}\left(x^k\right)$是好求的。

我们分析算法 3.1 的收敛性：

引理 3.3 令x^*是问题(2)的一个解，$\left\{x^k\right\}$是由算法 3.1 产生的点列，则

$$\left\|x^{k+1}-x^*\right\|^2 \le \left\|x^k-x^*\right\|^2-2w_k r_k\sum_{j=1}^m\left\|\bar{d}_j^k\right\|^2+w_k^2 r_k^2\left\|d_k\right\|^2 .$$

证明： 因为x^*是问题(2)的一个解，所以x^*也满足问题(5)，即$x^*\in Q_{m+1}$且$x^*\in\bigcap_{j=1}^m Q_j$，结合引理 3.2，有：

$$\begin{aligned}\left\langle x^*-x^k,d_k\right\rangle &= \sum_{j=1}^m\left\langle x^*-x^k,\bar{d}_j^k\right\rangle=\sum_{j=1}^m\left\langle x^*+P_{Q_j}\left(x^k\right)-P_{Q_j}\left(x^k\right)-x^k,\bar{d}_j^k\right\rangle\\ &=\sum_{j=1}^m\left\|\bar{d}_j^k\right\|^2+\sum_{j=1}^m\left\langle x^*-P_{Q_j}\left(x^k\right),P_{Q_j}\left(x^k\right)-x^k\right\rangle\ge\sum_{j=1}^m\left\|\bar{d}_j^k\right\|^2.\end{aligned}$$

从而可得：

$$\begin{aligned}\left\|x^{k+1}-x^*\right\|^2&=\left\|P_{Q_{m+1}}\left(x^k+w_k r_k d_k\right)-x^*\right\|^2\le\left\|x^k+w_k r_k d_k-x^*\right\|^2\\&=\left\|x^k-x^*\right\|^2-2\left\langle x^*-x^k,w_k r_k d_k\right\rangle+w_k^2r_k^2\left\|d_k\right\|^2\\&\le\left\|x^k-x^*\right\|^2-2w_k r_k\sum_{j=1}^m\left\|\bar{d}_j^k\right\|^2+w_k^2r_k^2\left\|d_k\right\|^2.\end{aligned}$$

定理 3.1 若$\left\{x^k\right\}$是由算法 3.1 产生的点列，则它收敛到问题(2)的一个解。

证明： 令x^*是问题(2)的一个解，则x^*也满足问题(5)。因为$0<\underline{w}\le w_k\le\overline{w}<2,\ k=1,2,\cdots$，故:

$$\underline{w}r_k^2\left\|d_k\right\|^2\left(2-\overline{w}\right)\ge 0,$$

由引理 3.3 得：

$$\left\|x^{k+1}-x^*\right\|^2\le\left\|x^k-x^*\right\|^2-\underline{w}r_k^2\left\|d_k\right\|^2\left(2-\overline{w}\right),$$

由此知$\left\{\left\|x^k-x^*\right\|\right\}$是单调递减的，从而$\left\{\left\|x^k-x^*\right\|\right\}$是收敛的，且$\left\{x^k\right\}$，$\left\{d_k\right\}$均是有界的。且由此可得：$\lim_{k\to\infty}r_k^2\left\|d_k\right\|^2=0$，从而有：

$$\lim_{k\to\infty}r_k^2\left\|d_k\right\|^4=0. \tag{6}$$

又因为$r_k=\dfrac{\sum_{j=1}^m\left\|\bar{d}_j^k\right\|^2}{\left\|d_k\right\|^2}$和$\bar{d}_j^k=P_{Q_j}\left(x^k\right)-x^k$，由(6)可得，

$$\lim_{k\to\infty}\left(P_{Q_j}\left(x^k\right)-x^k\right)=0,\quad j=1,2,\cdots,m. \tag{7}$$

假设$\bar{x}$是$\left\{x^k\right\}$的一个聚点，则存在$\left\{x^k\right\}$的一个子列$\left\{x^{k_l}\right\}$收敛到$\bar{x}$，下证$\bar{x}$是问题(5)的一个解。

首先证明：$\bar{x}\in\bigcap_{j=1}^m Q_j$。

事实上，由(7)得

$$\lim_{k_l\to\infty}\left(P_{Q_j}\left(x^{k_l}\right)-x^{k_l}\right)=0,\quad j=1,2,\cdots,m.$$

从而得，$P_{Q_j}\left(\overline{x}\right)=\overline{x}, j=1,\cdots,m$。则 $\overline{x}\in\bigcap_{j=1}^{m}Q_j$。

其次证明：$\overline{x}\in Q_{m+1}$.

因为 $x^{k+1}=P_{Q_{m+1}}\left(x^k+w_k r_k d_k\right)$，故

$$x^{k_l+1}=P_{Q_{m+1}}\left(x^{k_l}+w_{k_l}r_{k_l}d_{k_l}\right) \tag{8}$$

先证 $\left\{x^{k_l+1}\right\}$ 收敛。事实上，因为 $\left\{x^k\right\}$ 是有界的，所以 $\left\{x^{k_l+1}\right\}$ 也是有界的，故存在收敛子列。假设 $\left\{x^{k_{l_i}+1}\right\}$ 为 $\left\{x^{k_l+1}\right\}$ 的任意一个收敛子列且 $\lim_{k_{l_i}\to\infty}x^{k_{l_i}+1}=\overline{\overline{x}}$，又因为 $\left\{\left\|x^k-x^*\right\|\right\}$ 收敛，故 $\left\{\left\|x^{k_{l_i}+1}-x^*\right\|\right\}$ 收敛，从而有

$$\left\|\overline{x}-x^*\right\|=\left\|\overline{\overline{x}}-x^*\right\|. \tag{9}$$

由(8)，有 $\overline{\overline{x}}=P_{Q_{m+1}}\left(\overline{x}\right)$，由引理 3.2 得：

$$\left\|\overline{\overline{x}}-x^*\right\|^2\le\left\|\overline{x}-x^*\right\|^2-\left\|\overline{\overline{x}}-\overline{x}\right\|^2,$$

又由(9)，得 $\overline{\overline{x}}=\overline{x}$。综上可知，$\left\{x^{k_l+1}\right\}$ 收敛且收敛到 $\overline{x}$，由于 Q_{m+1} 为闭凸集，故有 $\overline{x}\in Q_{m+1}$。

这样，$\overline{x}$ 为问题(5)的一个解，从而 $\overline{x}$ 也是问题(2)的一个解。用 $\overline{x}$ 代替上述证明中的 x^*，则得 $\left\{\left\|x^k-\overline{x}\right\|\right\}$ 是收敛的。而 $\left\{\left\|x^{k_l}-\overline{x}\right\|\right\}$ 收敛到 0，故整个点列 $\left\{\left\|x^k-\overline{x}\right\|\right\}$ 是收敛到 0 的，即 $\left\{x^k\right\}$ 收敛到 $\overline{x}$。

基金项目

本文为国家自然科学基金(11271226)和山东省优秀中青年科学家科研奖励基金(BS2012SF027)资助项目。

参考文献 (References)

[1] Donoho, D.L. (2006) Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 1289-1306.

[2] Candes, E., Romberg, J. and Tao, T. (2006) Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 489-509.

[3] 杨凡 (2010) 压缩传感图像重建的研究. 硕士论文, 江西科技师范学院, 南昌.

[4] Gamper, U., Boesiger, P. and Kozerke, S. (2008) Compressed sensing in dynamic MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, **59**, 365-373.

[5] Carmi, A., Censor, Y. and Gurfil, P. (2012) Convex feasibility modeling and projection methods for sparse signal recovery. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **236**, 4318-4335.

[6] Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2009) Convex optimization. Cambridge University Press, New York.

[7] Zarantonello, E.H. (1971) Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory. In: Zarantonello, E.H., Ed., *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, Academic Press, New York, 237-424.

汉斯出版社为全球科研工作者搭建开放的网络学术中文交流平台。自2011年创办以来，汉斯一直保持着稳健快速发展。随着国内外知名高校学者的陆续加入，汉斯电子期刊已被450多所大中华地区高校图书馆的电子资源采用，并被中国知网全文收录，被学术界广为认同。

汉斯出版社是国内开源（Open Access）电子期刊模式的先行者，其创办的所有期刊全部开放阅读，即读者可以通过互联网免费获取期刊内容，在非商业性使用的前提下，读者不支付任何费用就可引用、复制、传播期刊的部分或全部内容。