Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2016, 6(2), 51-59
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2016.62007

Hans汉斯

A Projection and Contraction Algorithm for Quasi-Variational Inequality Problem

Wenwei Zhang[1], Shanmei Zhang[2], Biao Qu[1]

[1]School of Management, Qufu Normal University, Rizhao Shandong
[2]Library of Qufu Normal University, Rizhao Shandong
Email: zhangwenwei1991@126.com

Received: May 2nd, 2016; accepted: May 20th, 2016; published: May 24th, 2016

Abstract

In this paper, we present a projection and contraction algorithm for solving the quasi-variational inequality problem. The algorithm includes prediction step and correction step. The calculation of the correction step does not need to do the projection. Our method is proven to be globally convergent under certain assumptions.

Keywords

Quasi-Variational Inequality, Projection, Hyperplane

拟变分不等式问题的一种投影收缩算法

张文伟[1]，张善美[2]，屈　彪[1]

[1]曲阜师范大学管理学院，山东　日照
[2]曲阜师范大学日照校区图书馆，山东　日照
Email: zhangwenwei1991@126.com

收稿日期：2016年5月2日；录用日期：2016年5月20日；发布日期：2016年5月24日

摘　要

本文给出了求解拟变分不等式问题的一种投影收缩算法，算法包括预测步和修正步，修正步的计算不需

文章引用：张文伟，张善美，屈彪．拟变分不等式问题的一种投影收缩算法[J]．运筹与模糊学, 2016, 6(2): 51-59.
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2016.62007

要做投影，在适当的假设条件下，证明了算法的全局收敛性。

关键词

拟变分不等式，投影，超平面

1. 引言

给定一个向量值函数 $F: R^n \to R^n$，X 是 R^n 上的非空闭凸集，$K: X \to 2^X$ 是一个集值映射且其值为非空闭凸集，拟变分不等式问题[1] (Quasi-variational inequality problem，简记 QVIP)就是求一个向量 $x \in X$，使得 $x \in K(x)$，且满足

$$\langle F(x), y-x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K(x) \tag{1.1}$$

其中 2^X 表示 X 中所有子集所形成的集合，$\langle \cdot,\cdot \rangle$ 表示 R^n 中的内积。

拟变分不等式问题在经济平衡理论、最优控制论、对策论、交通模型以及社会和经济模型等许多方面都有着广泛的应用。经济问题中的广义 Nash 均衡问题可以等价地转化为一个拟变分不等式问题[2]。研究拟变分不等式问题的有效数值解法有着重要的理论意义和实用价值。

当 $K(x) \equiv K \subset X$ 时，拟变分不等式问题就退化为了变分不等式问题，对于变分不等式问题有很多经典的算法，在文献[3]-[5]中都提出了两步投影法，两步投影法不仅迭代更快，而且对函数的要求也更低，而后文献[6]将两步投影法引入到了拟变分不等式问题的算法中，算法在每次迭代时需要计算预测步和修正步；文献[7]在假设算子具有协强制性条件下，对[6]中的算法做了改进，并给出了收敛性分析。文献[1]也给出了一种基于新的下降方向的投影类算法。在上述已有的二次投影类算法中，在计算预测步和修正步都需要做投影，当往可行集上的投影不易计算时会影响算法的计算效率。文献[8]在设计变分不等式的算法时引入了超平面，利用当前迭代点向所构造的该超平面与可行集的交做投影来产生新的迭代点，这样会使投影计算相对容易。受文献[8]的启发，我们将超平面引入到了拟变分不等式的算法中，设计了求解拟变分不等式问题的一种投影算法，而且算法在计算修正步时不需要做投影，最后的数值实验结果可以说明这样改进的算法是可行有效的。

2. 预备知识

本节中，我们将给出算法及证明中所用到的定义、引理、假设条件等。

对于给定的非空闭凸集 $C \subseteq R^n$，从点 $x \in R^n$ 到 C 的正交投影(以下我们简称投影)定义为：

$$P_C(x) = \arg\min\{\|x-y\| \mid y \in C\}$$

它有如下性质：

引理 2.1 [9]：设集合 $C \subseteq R^n$ 为非空闭凸集，则对 $\forall x, y \in R^n, z \in C$,有下列不等式成立：

(1) $\langle P_C(x) - P_C(y), x-y \rangle \geq \|P_C(x) - P_C(y)\|^2$；

(2) $\langle P_C(x) - x, z - P_C(x) \rangle \geq 0$；

(3) $\|P_C(x) - z\|^2 \leq \|x-z\|^2 - \|P_C(x) - x\|^2$。

由引理 2.1 之(1)知，投影算子 P_C 具有非扩张性，即：对任意的 $x, y \in R^n$，有

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x-y\|$$

引理 2.2 [8]：设集合 $C \subseteq R^n$ 为非空闭凸集，$h(x)$ 是 C 上的 Lipschitz 连续实函数，$K = \{x \in C \,|\, h(x) \le 0\}$。若 Lipschitz 连续系数 $\theta > 0$，则对任意 $x \in C$，有：

$$dist(x, K) \ge \theta^{-1} \max\{h(x), 0\}$$

令 F 为 $R^n \to R^n$ 的映射，对任意的 $x \in R^n$ 和 $\alpha > 0$，定义：

$$x(a) = P_C(x - \alpha F(x)),\ \ e(x, \alpha) = x - x(\alpha)$$

引理 2.3 [1]：对任意给定的向量 x 和映射 $F(x)$ 有：

(a) 当 $\alpha > 0$ 时，$\|x - x(\alpha)\|$ 关于 α 是单调增函数；

(b) 当 $\alpha > 0$ 时，$\dfrac{\|x - x(\alpha)\|}{\alpha}$ 关于 α 是单调减函数。

引理 2.4：F 为 $R^n \to R^n$ 的连续映射，对任意的 $x \in R^n$ 和 $\alpha > 0$，我们有：

$$\min\{1, \alpha\}\|e(x,1)\| \le \|e(x,\alpha)\| \le \max\{1,\alpha\}\|e(x,1)\|$$

引理 2.5：若 $\omega = P_C(x)$，则对任意的 $z \in C$，有

$$\|z - x\|^2 \ge \|z - \omega\|^2 + \|\omega - x\|^2$$

证：

$$\|z - x\|^2 = \|z - \omega\|^2 + \|\omega - x\|^2 + 2\langle z - \omega, \omega - x\rangle \ge \|z - \omega\|^2 + \|\omega - x\|^2$$

定义 2.1 [1]：令 $\bar{x} \in C$, 则映射 $K(\cdot)$ 称

(1) 在 $\bar{x}$ 处上半连续，若

$$\left.\begin{array}{l} x^k \in C, x^k \to \bar{x}(k \to \infty) \\ y^k \in K(x^k) \\ y^k \to \bar{y}(k \to \infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{y} \in K(\bar{x});$$

(2) 在 $\bar{x}$ 处下半连续，若对任意满足 $x^k \to \bar{x}$ 的点列，$\{x^k\} \subseteq C$，及满足 $\bar{y} \in K(\bar{x})$，均存在一点列 $\{y^k\}$，使得 $y^k \to \bar{y}$，且 $y^k \in K(x^k)$ 成立；

(3) 在 $\bar{x}$ 处连续，若在 $\bar{x}$ 处既上半连续，又下半连续；

(4) 在集合 C 上连续，当且仅当在 C 上的每一点都连续。

定义 2.2：称映射 F 在 C 上是伪单调的，若对任意的 $x, y \in C$ 有：

$$\langle F(y), x - y\rangle \ge 0 \Rightarrow \langle F(x), x - y\rangle \ge 0$$

定义 2.3：$x \in C$，称映射 F 在 x 处是严格单调的，若对任意的 $y \in C$ 且 $y \ne x$ 有：

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle > 0$$

定义 2.4 [7]：映射 $F: C \to R^n$ 称为在 C 上是 *Lipschitz* 连续的，如果存在常数 $L > 0$，使得：

$$\|F(x) - F(y)\| \le L\|x - y\|,\ \ \forall x, y \in C$$

在本文中我们做如下假设：

假设(H)

(a) $S^* \neq \varnothing$。这里 $S^* = \left\{x \in S \middle| \left\langle F(x), y - x \right\rangle \geq 0, \forall y \in \overline{S}\right\}$，其中 $S = \bigcap_{x \in X} K(x)$，$\overline{S} = \bigcup_{x \in X} K(x)$.

(b) $K(\cdot)$ 在 R^n 上连续；

(c) 函数 $F : R^n \to R^n$ 是伪单调的。

注：尽管假设(a)比拟变分不等式解集非空的假设更强，而且不容易验证它是否成立，但它保证了 QVIP 的解集是非空的。此假设首次出现在文献[6]，而后在文献[1] [7]中也多次使用。

3. 算法及其收敛性分析

算法 3.1

步骤 0：给定常数 $0 < \varepsilon$，选取参数 $r > 0$，$0 < l < 1$，$0 < \mu < 1$，置 $x^{-1} \in X$，选定任意的初始点 $x^0 \in K\left(x^{-1}\right)$, 令 $k = 0$。

步骤 1：根据当前迭代点 x_k，计算

$$P_{K(x_k)}\left(x_k - F(x_k)\right)$$

如果 $x_k = P_{K(x_k)}\left(x_k - F(x_k)\right)$，停止。否则，转到步骤 2。

步骤 2：求 m_k，m_k 为使得下面不等式成立的最小非负整数 m，

$$\alpha_k \left\langle F(x_k) - F(\overline{x}_k), x_k - \overline{x}_k \right\rangle \leq \mu \left\| x_k - \overline{x}_k \right\|^2,$$

其中 $\alpha_k := rl^{m_k}$，$\overline{x}_k := P_{K(x_k)}\left(x_k - \alpha_k F(x_k)\right)$。

步骤 3：计算

$$y_k = x_k - \frac{\left\langle d_k, x_k - \overline{x}_k \right\rangle}{\left\| d_k \right\|^2} d_k$$

其中：

$$d_k = x_k - \overline{x}_k - \alpha_k \left(F(x_k) - F(\overline{x}_k)\right)$$

令：

$$x_{k+1} = \begin{cases} y_k & \text{如果 } y_k \in X, \\ \overline{x}_k & \text{否则.} \end{cases}$$

步骤 4：让 $k = k + 1$，回到步骤 1。

注：在第 3 步中 x_{k+1} 这样定义是由于在算法中，x_{k+1} 是通过将 x_k 向集合 $X \cap H_k$ 投影得到的，即：

$$x_{k+1} = P_{X \cap H_k}\left(x_k\right)$$

当令 $H_k := \left\{v : h_k(v) \leq 0\right\}$，$h_k(v) = \left\langle d_k, v - \overline{x}_k \right\rangle$ 时，如果 x_k 向 H_k 的投影 y_k 在集合 X 中，此时 y_k 为 x_k 向集合 $X \cap H_k$ 的投影，否则 x_k 向集合 $X \cap H_k$ 的投影点为两集合交集中的点 $\overline{x}_k$。

在算法中选用的超平面是 $\left\{v \in R^n \middle| \left\langle d_k, v - \overline{x}_k \right\rangle = 0\right\}$。

下面说明该算法的合理性：

引理 3.1：对任意的向量 $x \in X$，定义 $x_{K(x)}(\alpha) = P_{K(x)}\left(x - \alpha F(x)\right)$。则对任意的 $\mu \in (0,1)$，当 α 是一个充分小的正数时，我们有：

$$\alpha \left\langle F(x) - F\left(x_{K(x)}(\alpha)\right), x - x_{K(x)}(\alpha) \right\rangle \leq \mu \left\| x - x_{K(x)}(\alpha) \right\|^2 \tag{3.1}$$

证明：我们知道 $x_{K(x)}(\alpha)=P_{K(x)}(x-\alpha F(x))\to P_{K(x)}(x)$ 当 $\alpha\to 0$ 时.

如果存在一个 $\tilde{\alpha}>0$ 使得 $x=x_{K(x)}(\tilde{\alpha})$，由引理 2.1(2) 我们可以得到 $x=x_{K(x)}(\alpha)$ 对任意的 $\alpha>0$ 都成立，此时(3.1)对任意的 $\alpha>0$ 都成立。

如果 $x\neq x_{K(x)}(\alpha)$ 对所有的 $\alpha>0$ 都成立，现假设(3.1)不成立，即存在一个正实数序列 $\{\alpha_i\}(i=1,2,\cdots)$ 趋于 0，使得对任意的 α_i 有：

$$\alpha_i\left\langle F(x)-F\left(x_{K(x)}(\alpha_i)\right),x-x_{K(x)}(\alpha_i)\right\rangle>\mu\left\|x-x_{K(x)}(\alpha_i)\right\|^2$$

利用 Cauchy-Schwartz 不等式可得到：

$$\alpha_i\left\|F(x)-F\left(x_{K(x)}(\alpha_i)\right)\right\|>\mu\left\|x-x_{K(x)}(\alpha_i)\right\| \tag{3.2}$$

下面考虑两种情况：

(1)：$x\notin K(x)$,则当 $\alpha_i\to 0$ 时 $\alpha_i\left\|F(x)-F\left(x_{K(x)}(\alpha_i)\right)\right\|$ 会趋于 0，而 $\mu\left\|x-x_{K(x)}(\alpha_i)\right\|$ 会趋于一个正数，这与(3.2)矛盾。

(2)：$x\in K(x)$，这时有 $x=P_{K(x)}(x)$，因为 F 是连续的并且当 $\alpha_i\to 0$ 时，$x_{K(x)}(\alpha_i)\to P_{K(x)}(x)=x$，$\left\|F(x)-F\left(x_{K(x)}(\alpha_i)\right)\right\|$ 会趋于 0，而利用引理 2.3(b)，当 $\alpha_i\to 0$ 时 $\dfrac{\left\|x-x_{K(x)}(\alpha_i)\right\|}{\alpha_i}$ 不会小于正数 $\left\|x-x_{K(x)}(1)\right\|$，这与(3.2)矛盾。

引理 3.2: 设 F 在 R^n 上连续且在 X 上伪单调，$\{x_k\}$ 是算法 3.1 生成的无穷数列，则对任意的 $x^*\in S^*$，有 $h_k(x^*)\le 0$，$h_k(x_k)\ge(1-\mu)\|x_k-\bar{x}_k\|^2>0$。

证明：由 $\bar{x}_k=P_{K(x_k)}(x_k-\alpha_k F(x_k))$ 和 S^* 的定义可知 $\left\langle F(x^*),\bar{x}_k-x^*\right\rangle\ge 0$. 利用 F 的伪单调性有：

$$\left\langle F(\bar{x}_k),\bar{x}_k-x^*\right\rangle\ge 0.$$

进而有如下不等式：

$$\begin{aligned}h_k(x^*)&=\left\langle x_k-\bar{x}_k-\alpha_k\left(F(x_k)-F(\bar{x}_k)\right),x^*-\bar{x}_k\right\rangle\\&=\left\langle x_k-\alpha_k F(x_k)-\bar{x}_k,x^*-\bar{x}_k\right\rangle+\alpha_k\left\langle F(\bar{x}_k),x^*-\bar{x}_k\right\rangle\\&\le\alpha_k\left\langle F(\bar{x}_k),x^*-\bar{x}_k\right\rangle\le 0\end{aligned}$$

其中第一个不等式由 $x^*\in K(x_k)$ 及引理 2.1(2)可得。

$$\begin{aligned}h_k(x^k)&=\left\langle x_k-\bar{x}_k-\alpha_k\left(F(x_k)-F(\bar{x}_k)\right),x_k-\bar{x}_k\right\rangle\\&=\|x_k-\bar{x}_k\|^2-\alpha_k\left\langle F(x_k)-F(\bar{x}_k),x_k-\bar{x}_k\right\rangle\\&\ge(1-\mu)\|x_k-\bar{x}_k\|^2>0\end{aligned}$$

注： 由引理 3.2 知，H_k 能够严格分离当前迭代点和集合 S^*。

在下面的收敛性证明中，为了方便论述，我们使用 x_{k+1} 的第二种表示方法即：$x_{k+1}=P_{X\cap H_k}(x_k)$，同时令：$X_k:=X\cap H_k$。

定理 3.1： 设 F 在 R^n 上连续且假设 H 成立，$\{x_k\}$ 是算法 3.1 生成的无穷数列，则 $\{x_k\}$ 的任何聚点是 QVIP(1.1)的一个解。

证明 取 $x^* \in S^*$，根据引理 2.5 我们得到：

$$\begin{aligned}\left\|x_{k+1}-x^*\right\|^2 &= \left\|P_{X\cap H_k}\left(x_k\right)-x^*\right\|^2 \\ &\le \left\|x_k-x^*\right\|^2-\left\|x_k-x_{k+1}\right\|^2 \\ &= \left\|x_k-x^*\right\|^2-dist^2\left(x_k,X_k\right).\end{aligned}$$

有引理 3.2 知 $h_k\left(x_k\right)>0$，所以 $x_k \notin X_k$，进而 $dist\left(x_k,X_k\right)>0$。由此可知数列 $\left\{\left\|x_k-x^*\right\|\right\}$ 是严格单调递减且有下界的数列，从而是收敛数列。由此可知 $\left\{x_k\right\}$ 是有界序列，且：

$$\left\|x_k-x^*\right\|^2-\left\|x_{k+1}-x^*\right\|^2 \to 0, k\to\infty. \tag{3.3}$$

再由 $F\left(x\right)$ 是 R^n 上的连续映射，所以序列 $\left\{F\left(x_k\right)\right\}$ 是有界的，由投影算子的非扩张性易知 $\left\{\overline{x}_k\right\}$ 也是有界的。因此存在 $M>0$ 使得

$$\left\|x_k-\overline{x}_k-\alpha_k\left(F\left(x_k\right)-F\left(\overline{x}_k\right)\right)\right\| \le M,\ \forall k.$$

这就意味着对任意的 k，函数 $h_k\left(v\right)$ 都是 M-Lipschitz 连续的。注意到 $x_k \notin X_k$，由引理 2.2 可得

$$dist\left(x_k,X_k\right) \ge M^{-1}h_k\left(x_k\right),\ \forall k.$$

则结合引理 3.2 有：

$$\left\|x_k-x^*\right\|^2-\left\|x_{k+1}-x^*\right\|^2 \ge dist^2\left(x_k,X_k\right) \ge M^{-2}h_k^2\left(x_k\right) \gtrsim M^{-2}\left(\ -\mu\right)^2\left\|x_k-\overline{x}_k\right\|^4$$

因此式(3.3)意味着：

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x_k-\overline{x}_k\right\|=0 \tag{3.4}$$

假设 $\overline{x}$ 是 $\left\{x_k\right\}$ 的一个聚点，则必存在收敛子列 $\left\{x_k\right\}_{k\in N^1}$，使得：

$$\lim_{k\in N^1,k\to\infty} x_k=\overline{x},$$

这里 $N^1 \subseteq \left\{0,1,\cdots\right\}$。下面我们来证明 $\overline{x}$ 是 $QVIP$ (1.1)的一个解。

首先证明 $\overline{x} \in K\left(\overline{x}\right)$。由(3.4)式得：

$$\lim_{k\in N^1,k\to\infty} \overline{x}_k=\overline{x}$$

再由 $\overline{x}_k \in K\left(x_k\right)$ 及 $K\left(\cdot\right)$ 的上半连续性，即得：$\overline{x} \in K\left(\overline{x}\right)$。

下面我们来证明：$\left\langle F\left(\overline{x}\right),y-\overline{x}\right\rangle \ge 0,\forall y\in K\left(\overline{x}\right)$。为此我们先证存在 $\left\{\left\|e_k\left(x_k,1\right)\right\|\right\}$ 的一个子列 $\left\{\left\|e_k\left(x_k,1\right)\right\|\right\}_{k\in N^2}$ 其中 $N^2 \subseteq N^1$，使得

$$\lim_{k\in N^2,k\to\infty}\left\|e_k\left(x_k,1\right)\right\|=0$$

其中 $e_k\left(x_k,\alpha\right)=x_k-P_{K\left(x_k\right)}\left(x_k-\alpha F\left(x_k\right)\right)$。

下面考虑两种情况：

(1)：$\inf\limits_{k\in N^1}\left\{\alpha_k\right\}=\alpha_{\min}>0$，由引理 2.4，我们有：

$$\left\|e_k\left(x_k,1\right)\right\| \le \frac{\left\|x_k-\overline{x}_k\right\|}{\min\left\{1,\alpha_k\right\}}$$

结合式(3.4)有：

$$\lim_{k\in N^1,k\to\infty}\left\|e_k\left(x_k,1\right)\right\|\le\lim_{k\in N^1,k\to\infty}\frac{\left\|x_k-\bar{x}_k\right\|}{\min\left\{1,\alpha_{\min}\right\}}=0.$$

(2)：$\inf\limits_{k\in N^1}\left\{\alpha_k\right\}=\alpha_{\min}=0$，因为 $\alpha_{\min}=0$，所以存在子列 $\left\{\alpha_k\right\}_{k\in N^2}$，使得 $\lim\limits_{k\in N^2,k\to\infty}\alpha_k=0$，因此对充分小的 α_k，$\dfrac{\alpha_k}{l}$ 一定违背了步骤 2 中的约束规则，即：

$$\frac{\alpha_k}{l}\left\langle F\left(x_k\right)-F\left(x_k\left(\frac{\alpha_k}{l}\right)\right),x_k-x_k\left(\frac{\alpha_k}{l}\right)\right\rangle>\mu\left\|x_k-x_k\left(\frac{\alpha_k}{l}\right)\right\|^2$$

利用 Cauchy-Schwartz 不等式和引理 2.4，我们有：

$$\mu\left\|e_k\left(x_k,1\right)\right\|\le\mu\frac{\left\|x_k-x_k\left(\frac{\alpha_k}{l}\right)\right\|}{\frac{\alpha_k}{l}}<\left\|F\left(x_k\right)-F\left(x_k\left(\frac{\alpha_k}{l}\right)\right)\right\|$$

即：

$$\left\|e_k\left(x_k,1\right)\right\|\le\frac{1}{\mu}\left\|F\left(x_k\right)-F\left(x_k\left(\frac{\alpha_k}{l}\right)\right)\right\|$$

而且：

$$\begin{aligned}\left\|x_k-x_k\left(\left(\frac{\alpha_k}{l}\right)\right)\right\|&=\left\|x_k-\bar{x}_k+\bar{x}_k-P_{K\left(x_k\right)}\left(x_k-\frac{\alpha_k}{l}F\left(x_k\right)\right)\right\|\\&\le\left\|x_k-\bar{x}_k\right\|+\left\|\frac{\alpha_k}{l}F\left(x_k\right)-\alpha_kF\left(x_k\right)\right\|\\&=\left\|x_k-\bar{x}_k\right\|+\left(\frac{\alpha_k}{l}-\alpha_k\right)\left\|F\left(x_k\right)-F\left(x_k\right)\right\|\\&\to0\ \left(k\in N^2,k\to\infty\right)\end{aligned}$$

所以有：

$$\lim_{k\in N^2,k\to\infty}\left\|F\left(x_k\right)-F\left(x_k\left(\frac{\alpha_k}{l}\right)\right)\right\|=0.$$

因此，我们有：

$$\lim_{k\in N^2,k\to\infty}\left\|e_k\left(x_k,1\right)\right\|=0$$

由于 $K(\cdot)$ 是下半连续的，那么，对 $\forall y\in K\left(\bar{x}\right)$，存在一个序列 $\left\{y_k\right\}$，$y_k\in K\left(x_k\right)$，使得 $\lim\limits_{k\in N^2,k\to\infty}y_k=y$。由 $x_k-e_k\left(x_k,1\right)=P_{K\left(x_k\right)}\left(x_k-F\left(x_k\right)\right)$ 可得：

$$\left\langle F\left(x_k\right)-e_k\left(x_k,1\right),y_k-x_k+e_k\left(x_k,1\right)\right\rangle\ge0\tag{3.5}$$

可得：

$$\left\langle F\left(x_k\right), y_k - x_k\right\rangle + \left\langle F\left(x_k\right), e_k\left(x_k,1\right)\right\rangle - \left\langle e_k\left(x_k,1\right), y_k - x_k\right\rangle - \left\|e_k\left(x_k,1\right)\right\|^2 \geq 0$$

当 $k \to \infty \left(k \in N^2\right)$ 两边取极限，由于 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 的有界性，我们得到

$$\left\langle F\left(\bar{x}\right), y - \bar{x}\right\rangle \geq 0$$

由 y 的任意性，得到了我们所要证明的结论。

4. 数值实验

为了验证算法的可行性和有效性，我们通过 MATLAB 用算法 3.1 解决了一个由广义纳什均衡问题转化成的拟变分不等式问题。在计算过程中，参数选取为：$r = 0.5$，$l = 0.5$，$\varepsilon = 10^{-6}$，$\mu = 0.99$。在下面的数值结果中，近似解指最后一个迭代点，最大迭代步数限定为 1000 步。

例 1：此例是一个广义纳什均衡问题，首次被 Harker 和 Outrata [10]在 1991 年提出，该问题是一个两人对策，每个人选取 0 到 10 之间的一个数 x^i，并且它们的和不能超过 15。费用函数和映射 K^i 定义如下：

$$\mu^1\left(x^1, x^2\right) = \left(x^1\right)^2 + \frac{8}{3}x^1x^2 - 34x^1$$

$$\mu^2\left(x^1, x^2\right) = \left(x^2\right)^2 + \frac{5}{4}x^1x^2 - 24.25x^2$$

$$K^1\left(\bar{x}^2\right) = \left\{0 \leq x^1 \leq 10, x^1 \leq 15 - \bar{x}^2\right\}$$

$$K^2\left(\bar{x}^1\right) = \left\{0 \leq x^2 \leq 10, x^2 \leq 15 - \bar{x}^1\right\}$$

现在考虑此问题的 QVI 形式，函数 F 定义为：

$$F^1\left(x\right) = 2x^1 + \frac{8}{3}x^2 - 34,\quad F^2\left(x\right) = 2x^2 + \frac{5}{4}x^1 - 24.25$$

它的解组成如下：点 $(5,9)^T$ 及线段 $\left[(9,6)^T, (10,5)^T\right]$。从不同的初始点出发，用算法 3.1 得到的数值结果如表 1 所示。

例 2：此例是在例 1 的基础上，将集值映射 $K^2\left(\bar{x}^1\right) = \left\{0 \leq x^2 \leq 10, x^2 \leq 15 - \bar{x}^1\right\}$ 替换为：$K^2\left(\bar{x}^1\right) = \left\{2 \leq x^2 \leq 10\right\}$。

得到的数值结果如表 2 所示。

Table 1. The numerical results of example 1

表 1. 例 1 的数值结果

起始点	运行时间（秒）	迭代次数	近似解
$(0, 0)^T$	0.040131	8	$(5, 9)^T$
$(10, 0)^T$	0.045700	67	$(5, 9)^T$
$(10, 10)^T$	0.029586	25	$(5, 9)^T$
$(0, 10)^T$	0.029232	19	$(5, 9)^T$
$(5, 5)^T$	0.031335	24	$(5, 9)^T$
$rand(2, 1)$	0.042018	9	$(5, 9)^T$

Table 2. The numerical results of example 2
表 2. 例 2 的数值结果

起始点	运行时间（秒）	迭代次数	近似解
$(0, 0)^T$	0.027065	8	$(5, 9)^T$
$(10, 0)^T$	0.032125	141	$(5, 9)^T$
$(10, 10)^T$	0.028522	23	$(5, 9)^T$
$(0, 10)^T$	0.027401	46	$(5, 9)^T$
$(5, 5)^T$	0.028808	24	$(5, 9)^T$
$(5, 0)^T$	0.032973	26	$(5, 9)^T$
rand(2, 1)	0.027809	8	$(5, 9)^T$

从表 1 可以看出，从不同的初始点出发，用算法 3.1 都能得到原问题的解。

从表 2 可以看出，算法 3.1 在例 2 中从不同的初始点出发都能正确的给出拟变分不等式解。

基金项目

本文为国家自然科学基金（11271226）和山东省优秀中青年科学家科研奖励基金(BS2012SF027)资助项目。

参考文献 (References)

[1] Harker, P. (1991) Generalized Nash Games and Quasi-Variational Inequalities. *European Journal of Operational Research*, **54**, 81-94. http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(91)90325-P

[2] Pang, J.S. and Fukushima, M. (2005) Quasi-Variational Inequalities, Generalized Nash Equilibria and Multileader-Follower Game. *Computational Management Science*, **1**, 21-56. http://dx.doi.org/10.1007/s10287-004-0010-0

[3] Zhang, J.Z., Qu, B. and Xiu, N.H. (2010) Some Projection-Like Methods for the Generalized Nash Equilibria. *Computational Optimization and Applications*, **45**, 89-109. http://dx.doi.org/10.1007/s10589-008-9173-x

[4] Han, D., Zhang, H., Qian, G. and Xu, L. (2012) An Improved Two-Step Method for Solving Generalized Nash Equilibrium Problems. *European Journal of Operational Research*, **216**, 613–623. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2011.08.008

[5] Zarantonello, E.H. (1971) Projections on Convex Sets in Hilbert Space and Spectral Theory. In: Zarantonello, E.H., Ed., *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, Academic, New York.

[6] Gafni, E.M. and Bertsekas, D.P. (1984) Two-Metric Projection Problems and Descent Methods for Asymmetric Variational Inequality Problems. *Math Program*, **53**, 99-110.

[7] 屈彪, 张善美. 求解拟变分不等式问题的一种投影算法. 应用数学学报, 2008(5): 922-928.

[8] Censor, Y., Gibali, A. and Reich, S. (2011) The Subgradient Extragradient Method for Solving Variational Inequlities in Hilbert Space. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **148**, 318-335. http://dx.doi.org/10.1007/s10957-010-9757-3

[9] Outrata, J. and Zowe, J. (1995) A Numerical Approach to Optimization Problems with Variational Inequality Constraints. *Mathematical Programming*, **68**, 105-130. http://dx.doi.org/10.1007/BF01585759

[10] He, Y.R. (2006) A New Double Projection Algorithm for Variational Inequalities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **185**, 166-173. http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2005.01.031