Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2017, 7(2), 37-44
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2017.72005

Int-Soft Filters and Their Congruences on Residuated Lattices

Chunxin Lin, Zhenming Ma

School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: 2269963842@qq.com, dmgywto@126.com

Received: Apr. 19th, 2017; accepted: May 7th, 2017; published: May 10th, 2017

Abstract

The aim of this paper is to study filters on residuated lattices associated with soft sets. By introducing the notion of tip-extended pair of soft sets, a bounded distributive lattice based on the sets of all int-soft filters is formed, a one-to-one correspondence between the set of all int-soft filters and the set of all int-soft congruences is established, and a quotient residuated lattice with respect to int-soft filter is induced.

Keywords

Residuated Lattice, Int-Soft Filter, Int-Soft Congruence, Distributive Lattice

剩余格上的交软滤子与交软同余

林春鑫，马振明

临沂大学，数学与统计学院，山东 临沂
Email: 2269963842@qq.com, dmgywto@126.com

收稿日期：2017年4月19日；录用日期：2017年5月7日；发布日期：2017年5月10日

摘 要

结合软集理论在剩余格上引入交软滤子概念，对其性质进行研究。特别地，通过定义交软集的扩张对，证明交软滤子的全体构成有界分配格；定义交软同余，在全体交软滤子和交软同余之间确立一一对应关系；证明剩余格相对于交软滤子构成商剩余格。

关键词

剩余格，交软滤子，交软同余，分配格

文章引用:林春鑫，马振明. 剩余格上的交软滤子与交软同余[J]. 运筹与模糊学, 2017, 7(2): 37-44.
https://doi.org/10.12677/orf.2017.72005

1. 引言

不确定性广泛存在于如工程、社会、管理和经济等许多实际问题中。相较于概率论、模糊集[1]、粗糙集[2]和直觉模糊集[3]等传统解决不确定性问题的数学工具，软集合理论[4]在处理不确定性问题方面具有得天独厚的优势。目前，许多学者致力于软集理论和应用方面的工作。理论方面工作主要集中在软运算[5] [6] [7]、软关系[8]、相等测度[9] [10] [11]，和软代数结构[12] [13] [14]等。在应用方面，软集广泛被应用到决策[15]和预测[16]等。

近来，有学者将软集应用到 R_0-代数的滤子理论研究上[17]。众所周知，目前大多数学者都接受剩余格[18]是一种宽泛的模糊逻辑代数，R_0-代数[19]等都可以看作是剩余格的特例。因此，本文将在剩余格上深入研究交软滤子的相关性质，如全体交软滤子的格结构，以及它们与全体交软同余之间的对应关系等。这些结论的获得不仅丰富了剩余格的滤子理论，而且扩大了软集的应用。

2. 预备知识

定义 2.1 [18]：代数 $L=(L,\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 如果满足条件

(1) $(L,\wedge,\vee,0,1)$ 是有界格；

(2) $(L,\otimes,1)$ 是交换幺半群；

(3) $(\otimes,\to)$ 构成伴随对，即 $z\le x\to y$ 当且仅当 $x\otimes z\le y$，则称 L 为剩余格。

为了方便，约定 $x\leftrightarrow y=(x\to y)\wedge(y\to x)$。

定理 2.1 [19]：设 L 为剩余格。则对任意 $x,y,z,w,x_1,x_2\in L$ 有

(1) $x\vee y\le(x\to y)\to y$；

(2) $x\otimes(x\to y)\le y$；

(3) 如果 $x_1\le x_2$，那么 $y\to x_1\le y\to x_2$ 且 $x_2\to y\le x_1\to y$；

(4) $(x\vee y)\to z=(x\to z)\wedge(y\to z)$；

(5) $x\to y\le(z\to x)\to(z\to y)$；

(6) $y\to x\le(x\to z)\to(y\to z)$；

(7) $(x\to y)\otimes(y\to z)\le x\to z$；

(8) $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)=(x\otimes y)\to z$；

(9) $x\to y\le(z\otimes x)\to(z\otimes y)$；

(10) $(x\leftrightarrow y)\otimes(z\leftrightarrow w)\le(x\Diamond z)\leftrightarrow(y\Diamond w)$，其中 $\Diamond\in\{\otimes,\vee,\wedge,\to\}$。

设 E 为论域 U 上的参数集，称偶对 (U,E) 为软论域。记 $P(U)$ 为 U 的幂集。

定义 2.2 [4]：设 (U,E) 为软论域，映射 $f_A:E\to P(U)$，如果对任意的 $x\notin A$，$A\subseteq E$，都有 $f_A(x)=\varnothing$，则称 f_A 为是 U 上的一个软集。

定义 2.3 [4]：设 f_A 和 f_B 分别为 U 上的软集。若 $\forall x\in E, f_A(x)\subseteq f_B(x)$，则称 f_A 是 f_B 的软子集。

定义 2.4 [4]：设 f_A 和 f_B 分别为 U 上的软集。f_A 和 f_B 的交集 $f_A\cap f_B$ 和并集 $f_A\cup f_B$ 分别定义为：

$f_{A\cap B}(x)=f_A(x)\cap f_B(x)$， $f_{A\cup B}(x)=f_A(x)\cup f_B(x)$。

3. 交软滤子及其格结构

本节引入剩余格上交软滤子的概念，验证所有交软滤子构成有界分配格。

以下假设 $S(U,L)$ 为软论域 (U,L) 上所有软集的集合，其中 L 为剩余格， U 为论域。

定义 3.1：设 $f_L\in S(U,L)$，如果

(1) $f_L(x)\subseteq f_L(1)$，$x\in L$；

(2) $f_L(x)\cap f_L(x\to y)\subseteq f_L(y), x,y\in L$，

则称 f_L 为剩余格 L 上的交软滤子。

例 3.1：设 $L=\{0,a,b,1\}$ 满足 $0<a<b<1$。定义 L 上运算 $\otimes$ 和 $\to$ 如下：

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	a	a
b	0	a	b	b
1	0	a	b	1

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	1	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

设 $U=\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$，定义 $f_L:L\to P(U)$ 满足 $f_L(0)=f_L(a)=\{\gamma_1,\gamma_2\}$ 且 $f_L(b)=f_L(1)=U$，则容易验证 f_L 为交软滤子。

文献[17]给出交软滤子如下刻画，结合剩余格性质，不难发现其证明都是基于剩余格的基本性质，因此可以类似的推广到剩余格。

定理 3.1：设 $f_L\in S(U,L)$，则 f_L 为交软滤子当且仅当以下条件成立：

(1) $x\le y$ 蕴含 $f_L(x)\subseteq f_L(y), x,y\in L$；

(2) $f_L(x)\cap f_L(y)\subseteq f_L(x\otimes y), x,y\in L$。

定理 3.2: 设 $f_L\in f(U,L)$，则 f_L 为交软滤子当且仅当 $x\otimes y\le z$ 蕴含 $f_L(x)\cap f_L(y)\subseteq f_L(z), x,y,z\in L$。

记软论域 (U,L) 上的所有交软滤子的集合为 $ISF(U,L)$。以下结果是显然的。

定理 3.3：设 f_L 为交软滤子，如果 $f_L(x\to y)=f_L(1)$，那么 $f_L(x)\subseteq f_L(y), x,y\in L$。

定义 3.2：设 $f_L\in S(U,L)$，称包含 f_L 的所有交软滤子的交为由 f_L 生成的交软滤子，记为 $\langle f_L\rangle$。

定理 3.4：设 $f_L\in S(U,L)$，定义 $g_L:L\to P(U)$，其中 $g_L(x)=\bigcup\limits_{\substack{a_1\otimes\cdots\otimes a_n\le x\\ a_i\in L,n\in N}}\left\{\bigcap\limits_{i=1}^{n}f_L(a_i)\right\}$，则 $g_L=\langle f_L\rangle$。

证明：设 $x,y\in L$ 满足 $x\le y$，由 g_L 定义有 $g_L(x)\subseteq g_L(y)$。对 $x,y\in L$，有如下包含关系：

$$\begin{aligned}
g_L(x)\cap g_L(y)&=\bigcup_{\substack{a_1\otimes\cdots\otimes a_n\le x\\ a_i\in L,n\in N}}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}f_L(a_i)\right\}\cap\bigcup_{\substack{b_1\otimes\cdots\otimes b_m\le y\\ b_i\in L,m\in N}}\left\{\bigcap_{i=1}^{m}f_L(b_i)\right\}\\
&=\bigcup_{\substack{a_1\otimes\cdots\otimes a_n\le x\\ a_i\in L,n\in N}}\ \bigcup_{\substack{b_1\otimes\cdots\otimes b_m\le y\\ b_i\in L,m\in N}}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}f_L(a_i)\cap\bigcap_{i=1}^{m}f_L(b_i)\right\}\\
&\subseteq\bigcup_{\substack{c_1\otimes\cdots\otimes c_k\le x\otimes y\\ c_i\in L,k\in N}}\left\{\bigcap_{i=1}^{k}f_L(c_i)\right\}\\
&=g_L(x\otimes y),
\end{aligned}$$

因此 g_L 为交软滤子。设 h_L 为交软滤子满足 $h_L\subseteq f_L$。由交软滤子定义有

$$g_L(x)=\bigcup_{\substack{a_1\otimes\cdots\otimes a_n\le x\\ a_i\in L,n\in N}}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}f_L(a_i)\right\}\subseteq\bigcup_{\substack{a_1\otimes\cdots\otimes a_n\le x\\ a_i\in L,n\in N}}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}h_L(a_i)\right\}\subseteq\bigcup_{\substack{a_1\otimes\cdots\otimes a_n\le x\\ a_i\in L,n\in N}}\left\{h_L(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)\right\}\subseteq h_L(x).$$

所以 $g_L=\langle f_L\rangle$。

例 3.2：从上述定理不难发现例 3.1 中 $\langle f_L\rangle=g_L$。

定理 3.5：设 f_L 为交软滤子且 $t\in P(U)$。定义 f_L^t 为

$$f_L^t(x)=\begin{cases}f_L(x),x\ne 1,\\ f_L(1)\cup t,x=1,\end{cases}$$

则 f_L^t 为交软滤子。

证明：设 $x\le y\ne 1$。如果 $x\le y=1$，那么 $f_L^t(x)\subseteq f_L^t(1)=f_L^t(y)$。由 $f_L^t(x)$ 的定义有

$$f_L^t(x)=f_L(x)\subseteq f_L(y)=f_L^t(y)$$

设 $x,y\in L$。考虑如下情形：

情形 1：$x\otimes y=1$。如果 x 和 y 之一等于 1，不妨设 $x=1$，那么 $y=1\otimes y=x\otimes y=1$。所以

$$f_L^t(x)\cap f_L^t(y)\subseteq f_L^t(x\otimes y)。$$

如果 $x=1,\ y\ne 1$ 或者 $x\ne 1,\ y=1$，矛盾。

如果 $x\ne 1,\ y\ne 1$，则有

$$f_L^t(x)\cap f_L^t(y)=f_L(x)\cap f_L(y)\subseteq f_L(x\otimes y)=f_L^t(x\otimes y)。$$

情形 2：$x\otimes y\ne 1$。显然，不可能有 $x=y=1$。

如果 $x=1,\ y\ne 1$ 或者 $x\ne 1,\ y=1$，明显地，$f_L^t(x)\cap f_L^t(y)\subseteq f_L^t(x\otimes y)$。

如果 $x\ne 1,\ y\ne 1$，则有

$$f_L^t(x)\cap f_L^t(y)=f_L(x)\cap f_L(y)\subseteq f_L(x\otimes y)=f_L^t(x\otimes y)。$$

总之，有 $f^t\cap f^t(y)\subseteq f^t(x\otimes y)$。所以 F_L^t 为交软滤子。

定义 3.3：设 f_L 和 g_L 为软集，定义 $f_L\tilde{\otimes}g_L$ 如下：

$$f_L\tilde{\otimes}g_L(x)=\bigcup_{y\otimes z\le x}\left\{f_L(y)\cap g_L(z)\right\}.$$

定理 3.6：设 f_L 和 g_L 为交软滤子。则有

$$f_L^{g_L}\tilde{\otimes}g_L^{f_L}=\langle f_L\cup g_L\rangle.$$

证明：首先证明 $f_L^{g_L}\tilde{\otimes}g_L^{f_L}$ 为交软滤子。

$$\begin{aligned}f_L^{g_L}\tilde{\otimes}g_L^{f_L}(x\otimes y)&=\bigcup_{u\otimes v\le x\otimes y}\left\{f_L^{g_L}(u)\cap g_L^{f_L}(v)\right\}\\&\supseteq\bigcup_{\substack{p\otimes q\le x\\ r\otimes s\le y}}\left\{f_L^{g_L}(p\otimes r)\cap g_L^{f_L}(q\otimes s)\right\}\\&\supseteq\bigcup_{\substack{p\otimes q\le x\\ r\otimes s\le y}}\left\{f_L^{g_L}(p)\cap f_L^{g_L}(r)\cap g_L^{f_L}(q)\cap g_L^{f_L}(s)\right\}\\&=\bigcup_{p\otimes q\le x}\left\{f_L^{g_L}(p)\cap g_L^{f_L}(q)\right\}\cap\bigcup_{r\otimes s\le y}\left\{f_L^{g_L}(r)\cap g_L^{f_L}(s)\right\}\\&=f_L^{g_L}\tilde{\otimes}g_L^{f_L}(x)\cap f_L^{g_L}\tilde{\otimes}g_L^{f_L}(y).\end{aligned}$$

显然，$f_L^{g_L} \tilde{\otimes} g_L^{f_L}$ 是保序的。所以 $f_L^{g_L} \tilde{\otimes} g_L^{f_L}$ 是交软滤子。

容易验证 $f_L^{g_L} \tilde{\otimes} g_L^{f_L}(x) \supseteq f_L(x), g_L(x)$，因此有 $f_L^{g_L} \tilde{\otimes} g_L^{f_L}(x) \supseteq f_L(x) \cup g_L(x)$。

最后，假设 h_L 是交软滤子，满足 $f_L \cup g_L \le h_L$ 如果 $x=1$，则有 $f_L^{g_L} \tilde{\otimes} g_L^{f_L}(1) = f_L(1) \cup g_L(1) \subseteq h_L(1)$；如果 $x<1$，则有

$$\begin{aligned}
f_L^{g_L} \tilde{\otimes} g_L^{f_L}(x) &= \bigcup_{y\otimes z\le x} \left\{ f_L^{g_L}(y) \cap g_L^{f_L}(z) \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{y\otimes z\le x\\ y\ne 1, z\ne 1}} \left\{ f_L^{g_L}(y) \cap g_L^{f_L}(z) \right\} \cup \bigcup_{y\le x} \{ f_L(y) \} \cup \bigcup_{z\le x} \{ g_L(z) \} \\
&= \bigcup_{\substack{y\otimes z\le x\\ y\ne 1, z\ne 1}} \left\{ f_L(y) \cap g_L(z) \right\} \cup \bigcup_{y\le x} \{ f_L(y) \} \cup \bigcup_{z\le x} \{ g_L(z) \} \\
&\subseteq \bigcup_{\substack{y\otimes z\le x\\ y\ne 1, z\ne 1}} \left\{ h_L(y) \cap h_L(z) \right\} \cup \bigcup_{y\le x} \{ h_L(y) \} \cup \bigcup_{z\le x} \{ h_L(z) \} \\
&= \bigcup_{y\otimes z\le x} \left\{ h_L(y) \cap h_L(z) \right\} \subseteq h_L(x).
\end{aligned}$$

所以 $f_L^{g_L} \tilde{\otimes} g_L^{f_L} = \langle f_L \cup g_L \rangle$。

设 f_L，g_L 为交软滤子，定义如下运算：

$$f_L \sqcap g_L = f_L \cap g_L, f_L \sqcup g_L = f_L^{g_L} \tilde{\otimes} g_L^{f_L},$$

则有如下结果：

定理 3.7： $(ISF(U,L), \sqcap, \sqcup, U_\varnothing, U_L)$ 是有界分配格。

证明： 只证分配性。

显然，$h_L \cap (f_L \cup g_L) \ge (h_L \cap f_L) \sqcup (h_L \cap g_L)$，下证 $h_L \cap (f_L \cup g_L) \le (h_L \cap f_L) \cup (h_L \cap g_L)$。设 $x \in L$。如果 $x=1$，那么

$$\begin{aligned}
h_L \cap (f_L \cup g_L)(1) &= h_L(1) \cap f_L^{g_L} \tilde{\otimes} g_L^{f_L}(1) = h_L(1) \cap (f_L(1) \cup g_L(1)) = (h_L \cap f_L)(1) \cup (h_L \cap g_L)(1) \\
&= (h_L \cap f_L)^{h_L \cap g_L} \tilde{\otimes} (h_L \cap g_L)^{h_L \cap f_L}(1) = (h_L \cap f_L) \cup (h_L \cap g_L)(1).
\end{aligned}$$

如果 $x \ne 1$，则有

$$\begin{aligned}
& h_L(x) \cap f_L^{g_L} \tilde{\otimes} g_L^{f_L}(x) \\
&= h_L(x) \cap \bigcup_{y\otimes z\le x} \left\{ f_L^{g_L}(y) \cap g_L^{f_L}(z) \right\} \\
&= \bigcup_{y\otimes z\le x} \left\{ h_L(x) \cap f_L^{g_L}(y) \cap g_L^{f_L}(z) \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{y\otimes z\le x\\ y\ne 1, z\ne 1}} \left\{ h_L(x) \cap f_L(y) \cap h_L(x) \cap g_L(z) \right\} \\
&\quad \cup \left\{ (h_L \cap f_L)^{h_L \cap g_L}(1) \cap \left[(h_L(x) \cap f_L(x)) \cup (h_L(x) \cap g_L(x)) \right] \right\} \\
&\subseteq \bigcup_{\substack{y\otimes z\le x\\ y\ne 1, z\ne 1}} \left\{ (h_L \cap f_L)^{h_L \cap g_L}(y \vee x) \cap (h_L \cap g_L)^{h_L \cap f_L}(z \vee x) \right\} \\
&\quad \cup \left[(h_L \cap f_L)^{h_L \cap g_L}(1) \cap (h_L \cap f_L)(y \vee x) \right] \\
&\quad \cup \left[(h_L \cap g_L)^{h_L \cap f_L}(1) \cap (h_L \cap g_L)(z \vee x) \right] \\
&= \bigcup_{y\otimes z\le x} \left\{ (h_L \cap f_L)^{h_L \cap g_L}(y \vee x) \cap (h_L \cap g_L)^{h_L \cap f_L}(z \vee x) \right\},
\end{aligned}$$

设 $y\vee x=y',z\vee x=z'$，容易验证 $y'\otimes z'\le x$，则上式可表示为

$$
\begin{aligned}
&=\bigcup_{y'\otimes z'\le x}\left\{\left(h_L\cap f_L\right)^{h_L\cap g_L}\left(y'\right)\cap\left(h_L\cap g_L\right)^{h_L\cap f_L}\left(z'\right)\right\}\\
&=\left(h_L\cap f_L\right)^{h_L\cap g_L}\tilde{\otimes}\left(h_L\cap g_L\right)^{h_L\cap f_L}(x)\\
&=\left(h_L\cap f_L\right)\cup\left(h_L\cap g_L\right)(x).
\end{aligned}
$$

所以 $h_L\cap\left(f_L\cup g_L\right)\le\left(h_L\cap f_L\right)\cup\left(h_L\cap g_L\right)$，即分配性成立。

4. 交软同余

本节引入交软同余概念，讨论其性质及其与交软滤子之间的关系。

定义 4.1：设 θ_L 为 $L\times L$ 上的软集，如果

(1) $\theta_L(x,x)=\theta_L(1,1),\ x\in L$；

(2) $\theta_L(x,y)=\theta_L(y,x),\ x,y\in L$；

(3) $\theta_L(x,y)\cap\theta_L(y,z)\subseteq\theta_L(x,z),\ x,y,z\in L$；

(4) $\theta_L(x,y)\cap\theta_L(z,w)\subseteq\theta_L(x\Diamond z,y\Diamond w),\ x,y,z,w\in L$，其中 $\Diamond\in\{\vee,\wedge,\otimes,\rightarrow\}$，

则称 θ_L 为 L 上的交软同余。

给定交软滤子 f_L，定义

$$\theta_{f_L}(x,y)=f_L(x\rightarrow y)\cap f_L(y\rightarrow x).$$

定理 4.1：设 f_L 是 L 的交软滤子，则 θ_{f_L} 是交软同余。

证明：由 θ_{f_L} 容易验证，故略。

设 θ_L 为 L 上交软同余且 $x\in L$。定义

$$\theta_L^x(y)=\theta_L(x,y),y\in L$$

称 θ_L^x 其为 x 的交软同余类。$L/\theta_L=\left\{\theta^x\middle|x\in L\right\}$ 称为由 θ_L 确定的商集。

定理 4.2：设 θ_L 为 L 上交软同余，则 θ_L^1 为 L 的交软滤子。

证明：由定义 4.1(3)有

$$\theta_L^1(x)=\theta_L^1(x)\cap\theta_L^1(x)=\theta_L(1,x)\cap\theta_L(x,1)\subseteq\theta_L(1,1)=\theta^1(1),$$

所以 $\theta^1(x)\subseteq\theta_L^1(1)$。由定义 4.1(3)和(4)有

$$\theta_L^1(x)\cap\theta_L^1(x\rightarrow y)=\theta_L(1,x)\cap\theta_L(1,x\rightarrow y)\subseteq\theta_L(1\rightarrow y,x\rightarrow y)\cap\theta_L(1,x\rightarrow y)\subseteq\theta_L(1,y)=\theta_L^1(y),$$

$\theta_L^1(x)\cap\theta_L^1(x\rightarrow y)\subseteq\theta_L^1(y)$。所以 θ_L^1 为交软滤子。

定理 4.3：设 θ_L 为 L 的交软同余，那么对任何 $x,y\in L$ 有 $\theta_L(x\leftrightarrow y,1)=\theta_L(x,y)$

证明：由定义 4.1(4)有

$$\theta_L(x,y)\subseteq\theta_L(x\leftrightarrow y,y\leftrightarrow y)=\theta_L(x\leftrightarrow y,1)$$

由定理 2.1(1)和(10)有

$$
\begin{aligned}
\theta_L(x\leftrightarrow y,1)&=\theta_L(x\leftrightarrow y,1)\cap\theta_L(x,x)\subseteq\theta_L\left((x\leftrightarrow y)\otimes x,1\otimes x\right)=\theta_L\left((x\leftrightarrow y)\otimes x,x\right)\cap\theta_L(y,y)\\
&\subseteq\theta_L\left(\left((x\leftrightarrow y)\otimes x\right)\vee y,x\vee y\right)=\theta_L(y,x\vee y),
\end{aligned}
$$

因此 $\theta_L(x\leftrightarrow y,1)\subseteq\theta_L(y,x\vee y)$。

类似地，$\theta_L(x\leftrightarrow y,1)\subseteq\theta_L(x,x\vee y)$。所以

$$\theta_L(x\leftrightarrow y,1)\subseteq\theta_L(y,x\vee y)\cap\theta_L(x,x\vee y)\subseteq\theta_L(x,y)$$

因此等式成立。

定理 4.4：设 θ_L 为 L 的交软同余，那么

$$(\theta_L)_{\theta_L^1}=\theta_L$$

证明：由定理 4.3 有

$$(\theta_L)_{\theta_L^1}(x,y)=\theta_L^1(x\leftrightarrow y)=\theta_L(1,x\leftrightarrow y)=\theta_L(x,y)$$

所以 $(\theta_L)_{\theta_L^1}=\theta_L$。

定理 4.5：设 f_L 为 L 的交软滤子，则 $\theta_{f_L}^1=f_L$。

证明：容易验证，故略。

由定理 4.4 和 4.5 不难验证如下结果：

定理 4.6：交软滤子的全体和交软同余之间存在一一对应。

定理 4.7：设 f_L 为 L 的交软滤子，那么 $\theta_{f_L}^x=\theta_{f_L}^y$ 当且仅当 $f_L(x\leftrightarrow y)=f_L(1),\ x,y\in L$。

证明：对任意 $z\in L$，假定 $\theta_{f_L}^x=\theta_{f_L}^y$，则有

$$f_L(x\leftrightarrow z)=f_L(y\leftrightarrow z)$$

特别地，令 $y=z$，有 $f_L(x\leftrightarrow y)=f_L(1)$。

反之，由定理 2.1(10)有

$$\begin{aligned}\theta_{f_L}^x(z)&=\theta_{f_L}^x(z)\cap f_L(1)\\&=f_L(x\leftrightarrow z)\cap f_L(x\leftrightarrow y)\\&\subseteq f_L((x\leftrightarrow z)\otimes(x\leftrightarrow y))\\&\subseteq f_L(z\leftrightarrow y)=\theta_{f_L}^y(z),\end{aligned}$$

所以 $\theta_{f_L}^x(z)\subseteq\theta_{f_L}^y(z)$。类似地，$\theta_{f_L}^y(z)\subseteq\theta_{f_L}^x(z)$。所以 $\theta_{f_L}^x(z)=\theta_{f_L}^y(z)$，即 $\theta_{f_L}^x=\theta_{f_L}^y$。

设 f_L 为 L 的交软滤子。对任意 $\theta_{f_L}^x,\theta_{f_L}^y\in L/\theta_{f_L}$ 定义如下运算：

$$\theta_{f_L}^x\cup\theta_{f_L}^y=\theta_{f_L}^{x\vee y},\theta_{f_L}^x\cap\theta_{f_L}^y=\theta_{f_L}^{x\wedge y},$$
$$\theta_{f_L}^x\otimes\theta_{f_L}^y=\theta_{f_L}^{x\otimes y},\theta_{f_L}^x\to\theta_{f_L}^y=\theta_{f_L}^{x\to y}.$$

定理 4.8：设 f_L 为 L 的交软滤子，则

$$L/\theta_{f_L}=\{L/\theta_{f_L},\cap,\cup,\otimes,\to,\theta_{f_L}^0,\theta_{f_L}^1\}$$

为剩余格，称为由交软滤子诱导出的商剩余格。

证明：容易验证，故略。

5. 结束语

本文引入了剩余格上的交软滤子，讨论了它们的一些性质。特别地，证明了所有交软滤子构成有界分配格；在交软滤子和交软同余之间存在一一对应；剩余格相对交软滤子诱导出商剩余格。

作为本文的进一步研究，我们将结合文献[20]引入剩余格上各种类型具体的交软滤子，将软集应用到决策和数据分析上。

基金项目

临沂大学大学生创新创业训练项目(No. 201510452106)；山东省自然科学基金(No. ZR2013FL006)。

参考文献 (References)

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353.

[2] Pawlak, Z. (1982) Rough Sets. *International Journal of Information and Computer Sciences*, **11**, 341-356. https://doi.org/10.1007/BF01001956

[3] Atanassov, K. (1994) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **64**, 159-174.

[4] Molodtsov, D. (1999) Soft Set Theory—First Results. *Computers and Mathematics with Applications*, **37**, 19-31.

[5] Ali, M.I., Feng, F. and Liu, X.Y. (2009) On Some New Operations in Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, **57**, 1547-1553.

[6] Maji, P.K., Biswas, R. and Roy, A.R. (2003) Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, **45**, 555-562.

[7] Sezgin, A. and Atagn, A.O. (2011) On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, **61**, 1457-1677.

[8] Som, T. (2008) On Soft Relation and Fuzzy Soft Relation. *Journal of Fuzzy Mathematics*, **16**, 677-687.

[9] Kharal, A. (2010) Distance and Similarity Measures for Soft Sets. *New Mathematics and Natural Computing*, **6**, 321-334. https://doi.org/10.1142/S1793005710001724

[10] Majumdar, P. and Samanta, S.K. (2008) Similarity Measure of Soft Sets. *New Mathematics and Natural Computing*, **4**, 1-12. https://doi.org/10.1142/S1793005708000908

[11] Qin, K. and Hong, Z. (2010) On Soft Equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **234**, 1347-1355.

[12] Jun, Y.B., Lee, K.J. and Zhan, J.M. (2009) Soft p-Ideals of Soft BCI-Algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, **58**, 2060-2068.

[13] Jun, Y.B. and Park, C.H. (2008) Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK/BCI-Algebras. *Information Sciences*, **178**, 2466-2475.

[14] Zhan, J.M. and Jun, Y.B. (2010) Soft BL-Algebras Based on Fuzzy Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, **59**, 2037-2046.

[15] Maji, P.K. and Roy, A.R. (2002) An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, **44**, 1077-1083.

[16] Xiao, Z., Gong, K. and Zou, Y. (2009) A Combined Forecasting Approach Based on Fuzzy Soft Sets. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **228**, 326-333.

[17] Jun, Y.B., Ahn, S.S. and Lee, K.J. (2013) Intersection-Soft Filters in R_0-Algebras. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2013**, Article ID: 950897.

[18] Ward, M. and Dilworth, P.R. (1939) Residuated Lattice. *Transactions of the American Mathematical Society*, **45**, 335-354. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1939-1501995-3

[19] Wang, G.J. (2000) Non-Classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning. Science Press, Beijing.

[20] Ma, Z.M. and Hu, B.Q. (2014) Characterizations and New Subclasses of *I*-Filters in Residuated Lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, **247**, 92-107.