Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2019, 9(2), 203-214
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2019.92023

Three-Way Decisions Approach to Multiple Attribute Group Decision Making with Probabilistic Linguistic Information

Qing Zheng, Xiaoyue Liu

School of Information Technology and Management, University of International Business and Economics, Beijing
Email: 2498095459@qq.com, sxy880530@163.com

Received: May 10th, 2019; accepted: May 23rd, 2019; published: May 30th, 2019

Abstract

Compared with linguistic term set, the probabilistic linguistic term set (PLTS) allows the decision makers (DMs) to give the weight of each linguistic term as a probability, which is useful to DMs to provide their preference more completely and accurately. The aim of this paper is to propose a three-way decisions method for multiple attribute group decision making in which the DMs' preference over alternatives with respect to the given attribute is expressed by PLTSs. Firstly, a liner programming model aiming to minimize inconsistency index of all DMs is constructed to derive the weights of attributes and positive/negative ideal solution (PIS/NIS). Then, based on the obtained weights of attributes, PIS and NIS, the method to determine the collective loss matrix is proposed. Furthermore, the relative closeness degrees are calculated to estimate the conditional probabilities of each alternative under different states, while the ranking of alternatives is obtained. Finally, the expected loss values of each alternative adopting different actions are calculated, and thus according to the decision rule, the best action for each alternative is determined.

Keywords

Multiple Attribute Decision Making, Probabilistic Linguistic Term Set, Three-Way Decision

基于概率语言术语集的多属性环境下三支决策方法研究

郑　晴，刘小月

对外经济贸易大学，信息学院，北京
Email: 2498095459@qq.com, sxy880530@163.com

文章引用: 郑晴, 刘小月. 基于概率语言术语集的多属性环境下三支决策方法研究[J]. 运筹与模糊学, 2019, 9(2): 203-214. DOI: 10.12677/orf.2019.92023

收稿日期：2019年5月10日；录用日期：2019年5月23日；发布日期：2019年5月30日

摘　要

相对于语言术语集，概率语言术语集要求决策者利用语言术语评价方案的同时，给出其对各语言术语的偏好，为后续的决策分析提供更多的判断信息。针对属性值为概率语言术语集的多属性决策问题，本文提出了基于三支决策的多属性群决策方法，在求得方案排序的同时给出每个方案应采取的行动策略。首先，为了确定属性权重及正、负理想解，构建了以决策者评价非一致度最小化为目标的优化模型；然后，基于求得的属性权重和正、负理想解，通过计算每个属性下各方案在不同状态下采取不同行动时的损失值，构建综合损失矩阵；最后，利用TOPSIS思想在根据相对贴近度对方案进行排序的同时确定各方案属于不同状态的条件概率，求得各方案采取不同行动的期望损失值，并以此为基础利用三支决策规则确定各方案应采取的行动策略。

关键词

多属性决策，概率语言术语集，三支决策

1. 引言

多属性决策也称为有限方案多目标决策，在社会、经济、管理及工程系统等各个领域有广泛的实际应用背景，例如投资决策、项目评估、方案优选和经济评价等，所以，一直是决策分析的一个重要研究内容。决策粗糙集[1]是通过贝叶斯决策过程对 Pawlak 经典粗糙集理论[2]的拓展，而三支决策则是建立在实际处理问题的情景下，对决策粗糙集的语义解释。不同于二支决策，三支决策在信息获取不充分时采取非承诺措施，这种措施或能将决策损失降到最低。三支决策是一种基于人类认知的决策模式，它认为：人们在实际决策过程中，对于具有充分把握接受或拒绝的事物能够立即做出快速的判断；对于那些不能立即做出决策的事物，人们往往会推迟对事件的判断，即：延迟决策。造成延迟决策的原因很多，比如：所掌握的信息不够充分、对风险的评估不够全面、对事件的认知不够彻底等。当人们对信息、风险、认知的掌握程度达到一定的水平，会做出接受或拒绝的最终判断，从这个角度说，三支决策是最终实现二支决策的一个中间步骤。基于不同类型的评价值，关于三支决策的研究各有不同侧重点：刘久兵和张里博等提出直觉模糊信息系统下的三支决策模型[3] [4]；结合决策过程中的风险考量，张里博等建立评估决策者的合理风险偏好模型，将其引入到三支决策损失矩阵评估过程[4]；Liang Decui 等提出对偶犹豫模糊信息系统下的三支决策模型[5]；基于决策者给出的各方案的属性值，Fan Jia 等提出了一个更加客观地建立三支决策损失矩阵的模型[6]；Liang Decui 等在计算三支决策中表示不同状态的条件概率时，创造性地利用 TOPSIS 思想，用各方案与正理想解之间的相对贴进度表示条件概率[7]。从以上研究现状可知，三支决策在不确定决策领域引起学者的广泛关注。

在评价方案时，由于环境的复杂性和人类知识的局限性，对于决策问题，决策者更愿意用自然语言来评价。但是在实际应用中，由于问题的复杂性以及不确定性，决策者很难用一个语言术语表示评价结

果，会在多个可能的语言术语间犹豫不决。于是，有学者提出了犹豫模糊语言术语集[8]。犹豫模糊语言术语集虽然可以帮助决策者更容易地评价方案，但是在实际分析过程中给每个语言术语相同的重要程度，分析结果并没能完全体现决策者的意志。Pang 等(2016)首次提出了概率语言术语集，并提出了概率语言术语集的标准化方法[9]。相对于语言术语集，所有的语言术语有相同权重而言，概率语言术语集中每个语言术语都有一个概率，即权重，用于表达决策者在评价时更倾向于哪个术语，即保留他们在评价方案时语言术语集内的偏好信息。例如，决策者在属性 c_1 下评价 A_1 方案时，在“好”和“很好”中犹豫徘徊，觉得都可评价 A_1 方案，但更倾向于“很好”，那么就可以用概率语言术语集{“很好”(0.7)，“好”(0.3)}来评价，不仅反映了决策者对各方案在每个属性下多个可能的语言术语评价值，并且反映了决策者对这些语言术语的偏好信息。基于 Pang 的成果，Gou 和 Xu (2016)重新定义了概率语言术语集之间的运算规则，保证了结果的合理性[10]；Bai 等(2017)在新的运算规则的基础上，提出一个可能度公式对概率语言术语集进行排序[11]；Liao 等应用线性规划思想，定义基于正理想解的一致度和非一致度，解决概率语言术语环境下的多属性群决策问题[12]。

但是，在以往关于三支决策的研究中，损失函数矩阵和权重基本由专家主观给定，且目前的三支决策方法无法处理评价值是由概率语言术语集表达的问题；正、负理想解取决策者评价值在各属性下的最大值和最小值，未在模型中解决这些问题，可信度有待考量。此外，在三支决策模型中，只给出了各方案的行动策略，没有给出方案之间的比较，确定方案排序。故此提出基于概率语言术语集的三支决策方法研究，以最大程度地在模型中还原决策者的评价信息，在求得所有备选方案排序的同时确定各方案应采取的行动策略。

2. 预备知识

2.1. 语言术语集

语言术语集是由一系列具有评价功能的语言术语组成的集合，如“差”“中”“好”等，决策者可使用这些术语表达其对方案的评价，语言术语集一般由奇数个术语组成，其定义如下：

定义 1：[13] [14]：$S=\{s_t \mid t=0,1,\cdots,\tau\}$（$\tau$ 是正整数)是一个由奇数个语言术语组成的有限组合，对于任意两个语言术语 $s_\alpha, s_\beta \in S$，给定 $\lambda_1,\lambda_2 \in [0,1]$，存在以下运算定律：

1) $S_\alpha \oplus S_\beta = S_{\alpha+\beta}$；
2) $\lambda S_\alpha = S_{\lambda\alpha}$；
3) $\lambda\left(S_\alpha + S_\beta\right) = \lambda S_\alpha + \lambda S_\beta$；
4) $\lambda_1 S_\alpha + \lambda_2 S_\beta = S_{\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta}$。

2.2. 概率语言术语集

为了帮助决策者更加准确地评价方案，Pang 等提出了概率语言术语集，要求决策者在利用语言术语评价方案同时，需给出其对每个语言术语的偏好。概率语言术语集相关定义如下：

定义 2 [9]：$S=\{s_t \mid t=0,1,\cdots,\tau\}$（$\tau$ 是正整数)是一个语言术语集，相应的概率语言术语集可被定义为：

$$L(p)=\left\{L^{(k)}\left(p^{(k)}\right) \mid L^k \in S, p^{(k)} \geq 0, k=1,2,\cdots,\#L(p), \sum_{k=1}^{\#L(p)} p^{(k)} \leq 1\right\}$$

其中，$L^{(k)}\left(p^{(k)}\right)$ 中 $L^{(k)}$ 是一个语言术语，$p^{(k)}$ 是它的概率；$\#L(p)$ 是这个语言术语集中语言术语的个数，即 $L^{(k)}$ 的个数。

定义 3 [9]：对于一个给定的概率语言术语集 $L(p)$ 且 $\sum_{k=1}^{\#L(p)} p^{(k)} < 1$，其对应的标准化概率语言术语集为：$\bar{L}(p) = \left\{L^{(k)}\bar{p}^{(k)} \mid k = 1,2,\cdots,\#L(p)\right\}$，其中，$\bar{p}^{(k)} = \dfrac{p^{(k)}}{\sum_{k=1}^{\#L(p)} p^{(k)}}$。

对两个或两个以上概率语言术语集进行标准化操作时，在概率语言术语集中语言术语个数不同时，根据其中最多语言术语的个数，需补充其他概率语言术语集，规则是：添加概率语言术语集中下标最小的语言术语，并规定其概率为零，使所有的概率语言术语集中语言术语个数相同。下文中概率语言术语集假设已经过标准化处理。

例 1：假设 $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$，两个概率语言术语集分别为 $L_1(p) = \{s_1(0.4), s_2(0.2), s_3(0.2)\}$ 和 $L_2(p) = \{s_0(0.6), s_2(0.4)\}$，根据定义 3，$\bar{L}_1(p) = \{s_1(0.5), s_2(0.25), s_3(0.25)\}$，因为 $\#L_1(p) > \#L_2(p)$，则在 $L_2(p)$ 补充其中下标最小的语言术语 s_0，使 $L_1(p)$ 和 $L_2(p)$ 中语言术语个数相同，即 $\bar{L}_2(p) = \{s_0(0.6), s_2(0.4), s_0(0)\}$。

定义 4 [9] [10] [15]：对于任意给定的三个标准化概率语言术语集 $L(p) = \left\{L^k\left(p^{(k)}\right) \mid k = 1,2,\cdots,\#L(p)\right\}$，$L_1(p) = \left\{L_1^{(k_1)}\left(p_1^{(k_1)}\right) \mid k_1 = 1,2,\cdots,\#L_1(p)\right\}$，$L_2(p) = \left\{L_2^{(k_2)}\left(p_2^{(k_2)}\right) \mid k_2 = 1,2,\cdots,\#L_2(p)\right\}$，$\gamma \in [0,1]$，$\lambda$ 是正实数，$\eta^{(k)} \in g(L(p))$，$\eta_1^{(k_1)} \in g(L_1(p))$，$\eta_2^{(k_2)} \in g(L_2(p))$，且 $k = 1,2,\cdots,\#L(p)$，$k_1 = 1,2,\cdots,\#L_1(p)$，$k_2 = 1,2,\cdots,\#L_2(p)$，其中等价转换函数 g 的定义如下：

$$g:[0,\tau] \to [0,1], g(L(p)) = \left\{\frac{r^{(k)}}{\tau}\left(p^{(k)}\right)\right\} = L_\gamma(p), \gamma \in [0,1]$$

$$g^{-1}:[0,1] \to [0,\tau], g^{-1}\left(L_\gamma(p)\right) = \left\{s_{\gamma\tau}\left(p^{(\gamma)}\right) \mid \gamma \in [0,1]\right\} = L(p)$$

其中，$\eta^{(k)} = \dfrac{r^{(k)}}{\tau}$，$r^{(k)}$ 是语言术语 $L^{(k)}$ 的下标。

1) $\lambda L(p) = g^{-1}\left(\bigcup_{\eta^{(k)} \in g(L)} \left\{\left(1 - \left(1 - \eta^{(k)}\right)^\lambda\right)\left(p^{(k)}\right)\right\}\right)$；

2) $L^\lambda(p) = g^{-1}\left(\bigcup_{\eta^{(k)} \in g(L)} \left\{\left(\eta^{(k)}\right)^\lambda\left(p^{(k)}\right)\right\}\right)$；

3) $L_1(p) \oplus L_2(p) = g^{-1}\left(\bigcup_{\eta_1^{(k_1)} \in g(L_1(p)), \eta_2^{(k_2)} \in g(L_2(p))} \left\{\left(\eta_1^{(k_1)} + \eta_2^{(k_2)} - \eta_1^{(k_1)}\eta_2^{(k_2)}\right)\left(p_1^{(k_1)}p_2^{(k_2)}\right)\right\}\right)$；

4) $L_1(p) \ominus L_2(p) = g^{-1}\left(\bigcup_{\eta_1^{(k_1)} \in g(L_1(p)), \eta_2^{(k_2)} \in g(L_2(p))} \left\{\Pi\left(p_1^{(k_1)}p_2^{(k_2)}\right)\right\}\right)$；

其中，$\Pi = \begin{cases} \dfrac{\eta_1^{(k_1)} - \eta_2^{(k_2)}}{1 - \eta_2^{(k_2)}}, \left(\eta_1^{(k_1)} \ge \eta_2^{(k_2)} \text{且} \eta_2^{(k_2)} \ne 1\right) \\ 0 \end{cases}$。

定义 5 [9]：给定概率语言术语集 $L(p) = \left\{L^k\left(p^{(k)}\right) \mid k = 1,2,\cdots,\#L(p)\right\}$，$r^{(k)}$ 是语言术语 $L^{(k)}$ 的下标，则 $L(p)$ 的得分函数定义为：

$$E(L(p)) = S_{\bar{\alpha}}$$

其中，$\bar{\alpha} = \sum_{k=1}^{\#L(p)} r^{(k)} p^{(k)} \Big/ \sum_{k=1}^{\#L(p)} p^{(k)}$。

根据 $E(L(p)) = S_{\bar{\alpha}}$ 对两个概率语言术语集 $L_1(p), L_2(p)$ 进行大小比较，如果 $E(L_1(p)) > E(L_2(p))$，则称 $L_1(p)$ 优于 $L_2(p)$，记作 $L_1(p) \succ L_2(p)$；如果 $E(L_1(p)) < E(L_2(p))$，则称 $L_2(p)$ 优于 $L_1(p)$，记作 $L_1(p) \prec L_2(p)$。

定义 6 [12]：两个标准化的概率语言术语集 $L_1(p),L_2(p)$ 间的距离定义为：

$$d\left(L_1(p),L_2(p)\right)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\#L_1(p)}\left(p_1^{(k)}r_1^{(k)}-p_2^{(k)}r_2^{(k)}\right)^2/\#L_1(p)}$$

其中 $r_1^{(k)}$ 和 $r_2^{(k)}$ 分别是 $L_1(p),L_2(p)$ 的下脚标。

基于直觉模糊集和犹豫模糊集集结算子的思想，结合概率语言术语集的运算法则，下面给出概率语言术语集的集结算子。

定义 7 [16]：设 $L_j(p)=\left\{L_j^{(k)}\left(p_j^{(k)}\right)\mid k=1,2,\cdots,\#L_j(p)\right\}$，$j=1,2,\cdots,n$ 为一组概率语言术语集，集结算子 PLWA：$L^n\to L$ 定义如下：

$$\begin{aligned}&\mathrm{PLWA}\left(L_1(p),\cdots,L_n(p)\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}w_jL_j(p)=g^{-1}\left(\bigcup_{\eta_j^{(k)}\in g(L_j(p))}\left\{\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\eta_j^{(k)}\right)^{w_j}\right)\left(\prod_{g=1}^{t}p_j^k\right)\right\}\right)\end{aligned}$$

其中，w_j 是 $L_j(p)$ 的加权向量，集结算子 PLWA 得到的仍然是一个概率语言术语集。

3. 基于概率语言术语集的三支决策模型

假设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是方案集，$A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是方案集中的第 i 个方案；$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 是属性集，$c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是属性集中的第 j 个属性。总共有 t 个决策者参与决策，第 $g(g=1,2,\cdots,t)$ 个决策者 E^g 对第 i 个方案在第 j 属性下的评价结果用概率语言术语集 $L_{ij}^g(p)$ 表示，$L_{ij}^g(p)=\left\{L_{ij}^{g(k)}\left(p_{ij}^{g(k)}\right)\mid L_{ij}^{g(k)}\in S,p^{g(k)}\geq 0,k=1,2,\cdots,\#L_{ij}^{g(k)},\sum_{k=1}^{\#L_{ij}^{g(k)}}p^{g(k)}\leq 1\right\}$，其中，$L_{ij}^{g(k)}$ 为 $L_{ij}^g(p)$ 的第 k 个语言术语集，$p_{ij}^{g(k)}$ 为 $L_{ij}^{g(k)}$ 的概率。E^g 给出的方案两两比较偏好关系集合用 Ω^g 表示，$\Omega^g=\left\{(A_i,A_l)\mid A_i\succcurlyeq A_l;i,l=1,2,\cdots,m\right\}$，其中，$A_i\succcurlyeq A_l$ 表示 A_i 不比 A_l 差，至少和 A_l 一样好。

3.1. 属性权重和正、负理想解的确定

笔者拓展了[17]中的方法确定属性权重和正、负理想解，该方法根据每个决策者对方案的偏好序和决策方阵获得属性权重，同时考虑方案与正、负理想解之间的关系，定义相应的一致度与非一致度，建立以最小化非一致度为目标的优化模型确定正、负理想解和属性权重。为使求出的理想解和属性权重更加精确，需要决策者给出尽可能多的方案两两比较关系，即偏序关系。

第 g 个决策者 E^g 给出的方案在各属性下的评价值可以用概率语言术语集表示，决策矩阵如表 1 所示：

Table 1. The probabilistic linguistic decision matrix of the decision maker E^g
表 1. 第 g 个决策者给出的概率语言决策矩阵

x_{ij}^g	c_1	c_2	$\cdots$	c_n
A_1	$L_{11}^g(p)$	$L_{12}^g(p)$	$\cdots$	$L_{1n}^g(p)$
A_2	$L_{21}^g(p)$	$L_{22}^g(p)$	$\cdots$	$L_{2n}^g(p)$
A_3	$L_{31}^g(p)$	$L_{32}^g(p)$	$\cdots$	$L_{3n}^g(p)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$L_{ij}^g(p)$	$\cdots$
A_m	$L_{m1}^g(p)$	$L_{m2}^g(p)$	$\cdots$	$L_{mn}^g(p)$

由此可见，$A_i^g=\left(L_{i1}^g(p),L_{i2}^g(p),\cdots,L_{ij}^g(p),\cdots,L_{in}^g(p)\right)$ 表示第 g 个决策 E^g 者对第 i 个方案 A_i 在各属性下的评价结果，其中，$L_{ij}^g(p)=\left\{L_{ij}^{g(k)}\left(p_{ij}^{g(k)}\right)\mid k=1,2,\cdots,\#L_{ij}^{g(k)}\right\}$ 是标准化的概率语言术语集。

首先，假设正、负理想解分别为 A^+、A^-，分别表示为 $A^+=\left(L_1(p)^+,L_2(p)^+,\cdots,L_j(p)^+,\cdots,L_n(p)^+\right)$，$A^-=\left(L_1(p)^-,L_2(p)^-,\cdots,L_j(p)^-,\cdots,L_n(p)^-\right)$。其中，$L_j(p)^+=\left\{L_j^{(k)+}\left(p_j^{(k)+}\right)\mid k=1,2,\cdots,\#L_j(p)^+\right\}$，$L_j(p)^-=\left\{L_j^{(k)-}\left(p_j^{(k)-}\right)\mid k=1,2,\cdots,\#L_j(p)^-\right\}$ 是标准化的概率语言术语集，假设下文中概率语言术语集都已经过标准化处理。

定义 8 [12]：第 g 个决策者 E^g 对第 i 个方案的评价 A_i^g、正理想解 A^+ 和负理想解 A^- 中是标准化的概率语言术语集，A_i^g 到 A^+ 的距离定义为：$D_i^g=d\left(A^+,A_i^g\right)=\sum_{j=1}^n w_j\frac{\sum_{k=1}^{\#L_j(p)^+}\left(p_{ij}^{g(k)}r_{ij}^{g(k)}-p_j^{(k)+}r_j^{(k)+}\right)^2}{\#L_j(p)^+}$，其中，$L_j(p)^+$ 代表正理想解 A^+ 中第 j 个属性下的评价值，是一个概率语言术语集，$\#L_j(p)^+$ 为该术语集中语言术语的个数，即 $L^{(k)+}$ 的个数，对 A_i^g、A^+ 和 A^- 进行标准化操作后，在各属性下对应的概率语言术语集中语言术语个数相同，即 $\#L_{ij}^{g(k)}=\#L_j(p)^+=\#L_j(p)^-$；$r_{ij}^{g(k)}$ 表示 $L_{ij}^{g(k)}$ 的下标；$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是属性的权重向量，$w_j\ge 0$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j=1$；

根据定义 8，决策者 E^g 对方案 A_i 的评价 A_i^g 到正理想解 A^+ 的距离 D_i^g 和决策者 E^g 对方案 A_l 的评价 A_l^g 到正理想解 A^+ 的距离 D_l^g 分别表示为：

$$D_i^g=d\left(A^+,A_i^g\right)=\sum_{j=1}^n w_j\frac{\sum_{k=1}^{\#L_j(p)^+}\left(p_{ij}^{g(k)}r_{ij}^{g(k)}-p_j^{(k)+}r_j^{(k)+}\right)^2}{\#L_j(p)^+} \tag{1}$$

$$D_l^g=d\left(A^+,A_l^g\right)=\sum_{j=1}^n w_j\frac{\sum_{k=1}^{\#L_j(p)^+}\left(p_{lj}^{g(k)}r_{lj}^{g(k)}-p_j^{(k)+}r_j^{(k)+}\right)^2}{\#L_j(p)^+} \tag{2}$$

然后，根据决策者 E^g 的偏好关系 $\Omega^g=\left\{(i,l)\mid A_i\succcurlyeq A_l;i,l=1,2,\cdots,m\right\}$，基于正理想解 A^+，构建决策者 E^g 的主观偏好与方案排序之间的非一致度 Φ_{il}^{g-}：

$$\Phi_{il}^{g-}=\left(D_i^g-D_l^g\right)^-=\begin{cases}0, & \left(D_i^g\le D_l^g\right)\\ D_i^g-D_l^g, & \left(D_i^g>D_l^g\right)\end{cases} \tag{3}$$

即简化为 $\Phi_{il}^{g-}=\max\left\{0,D_i^g-D_l^g\right\}$，决策者 E^g 的总体非一致度为 $B^g=\sum_{(A_i,A_l)\in\Omega^g}\Phi_{il}^{g-}$；则对于所有的决策者来说，群体非一致度表示如下：

$$B=\sum_{g=1}^t B^g=\sum_{g=1}^t\sum_{(A_i,A_l)\in\Omega^g}\Phi_{il}^{g-}=\sum_{g=1}^t\sum_{(A_i,A_l)\in\Omega^g}\max\left\{0,D_i^g-D_l^g\right\} \tag{4}$$

同理，基于正理想解 A^+ 的群体一致度表示如下：

$$G=\sum_{g=1}^t G^g=\sum_{g=1}^t\sum_{(A_i,A_l)\in\Omega^g}\Phi_{il}^{g+}=\sum_{g=1}^t\sum_{(A_i,A_l)\in\Omega^g}\max\left\{0,D_l^g-D_i^g\right\} \tag{5}$$

基于负理想解 A^- 的群体非一致度表示如下：

$$B'=\sum_{g=1}^t B^{g\prime}=\sum_{g=1}^t\sum_{(A_i,A_l)\in\Omega^g}\Phi_{il}^{g-\prime}=\sum_{g=1}^t\sum_{(A_i,A_l)\in\Omega^g}\max\left\{0,D_l^{g\prime}-D_i^{g\prime}\right\} \tag{6}$$

基于负理想解 A^- 的群体一致度表示如下：

$$G' = \sum_{g=1}^{t} G^{g'} = \sum_{g=1}^{t} \sum_{(A_i,A_l)\in\Omega^g} \Phi_{il}^{g+'} = \sum_{g=1}^{t} \sum_{(A_i,A_l)\in\Omega^g} \max\left\{0, D_i^{g'} - D_l^{g'}\right\} \tag{7}$$

同时考虑正、负理想解，建立以群体非一致度最小化为目标的规划模型，确定正、负理想解和属性权重：

$$\min\{B+B'\}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} G - B \ge h \\ G' - B' \ge h' \\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \\ 0 \le w_j \le 1, j = 1,2,\ldots,n \\ 0 \le p_{ij}^{g(k)} \le 1, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n; k = 1,2,\cdots,\#L_j(p)^+; g = 1,2,\cdots,t \\ 0 \le r_{ij}^{g(k)} \le \tau, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n; k = 1,2,\cdots,\#L_j(p)^+; g = 1,2,\cdots,t \\ r_{ij}^{g(k)} \in N, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n; k = 1,2,\cdots,\#L_j(p)^+; g = 1,2,\cdots,t \end{cases} \tag{8}$$

其中，$h > 0(h' > 0)$ 由决策者事先给出，为了确保总的一致度 $G(G')$ 大于非一致度 $B(B')$；$\#L_j(p)^+$ 表示正理想解中第 j 个属性 c_j 下的属性值，即概率语言术语集 $L_j(p)^+$ 中语言术语的个数，因经过标准化处理，决策方阵和正、负理想解中各概率语言术语集语言术语个数相同，即 $\#L_{ij}^{g(k)} = \#L_j(p)^+ = \#L_j(p)^-$；$r_{ij}^{g(k)} \in N$ 表示概率语言术语集中所有语言术语的下标为整数。该模型可通过 LINGO 和 MATLAB 软件计算求得正、负理想解和属性权重，该结果充分考虑决策者所给出的评价信息，更加客观。

3.2. 损失矩阵的构建

三支决策模型是基于贝叶斯决策过程的决策粗糙集，模型由两种状态和三个行动构成。状态集 $\Omega = \{C, \neg C\}$，分别指好方案和差方案；行动集 $A = \{a_P, a_B, a_N\}$，分别指接受方案、延迟决策和拒绝方案三种行动，则三支决策的损失矩阵如表 2 所示：

Table 2. The loss function matrix
表 2. 三支决策损失矩阵

A_i	C	$\neg C$
a_P	λ_{PP}	λ_{PN}
a_B	λ_{BP}	λ_{BN}
a_N	λ_{NP}	λ_{NN}

其中，$\lambda_{PP} \le \lambda_{BP} \le \lambda_{NP}$；$\lambda_{NN} \le \lambda_{BN} \le \lambda_{PN}$。

假设每个决策者的权重相等，即 $\omega_g = 1/t$，$g = 1,2,\cdots,t$，则根据定义 7 中 PLWA 集结算子，对所有决策者对方案 A_i 在属性 c_j 下的评价值 $L_{ij}^g(p)$ 进行集结，求得群体评价值 $L_{ij}(p)$：

$$L_{ij}(p) = \sum_{g=1}^{t} w_g L_{ij}^g(p) = g^{-1}\left(\bigcup_{\eta_{ij}^{g(k)} \in g\left(L_{ij}^g(p)\right)} \left\{\left(1 - \prod_{g=1}^{t}\left(1 - \eta_{ij}^{g(k)}\right)^{1/t}\right)\left(\prod_{g=1}^{t} p_{ij}^{g(k)}\right)\right\}\right) \tag{9}$$

本节主要采用新方法[6]给出决策损失矩阵，先根据群体决策矩阵正负理想值给出每个方案在各属性下的损失矩阵，如表 3 所示：

其中，$\lambda_{PP}=0$、$\lambda_{NN}=0$，表示在第 j 个属性下状态分属好坏时对第 i 个方案做出正确的决策，损失为 0；当 A_i 在属性 c_j 下为好方案时，接受 A_i 方案的损失是 0，拒绝 A_i 方案的损失表示为 $L_{ij}(p)\ominus L_j(p)^-$，$L_j(p)^-$ 表示负理想值在第 j 个属性下的值，$\lambda_{NP}=L_{ij}(p)\ominus L_j(p)^-$ 表示群体评价值 $L_{ij}(p)$ 越大，拒绝 A_i 方案的损失越大；当 A_i 在属性 c_j 下为坏方案时，拒绝 A_i 方案的损失是 0，接受 A_i 方案的损失表示为 $L_j(p)^+\ominus L_{ij}(p)$，$L_j(p)^+$ 表示正理想值在第 j 个属性下的值，$\lambda_{BN}=L_j(p)^+\ominus L_{ij}(p)$ 表示群体评价值 $L_{ij}(p)$ 越大，接受 A_i 方案的损失越小；σ 是 H.X. Li 等[18]提出的一个系数，可表示风险规避指数，由决策者决定，$\sigma\in[0,1]$，$\lambda_{BP}=\sigma\left(L_{ij}(p)\ominus L_j(p)^-\right)$，$\lambda_{BN}=\sigma\left(L_j(p)^+\ominus L_{ij}(p)\right)$，表示延迟决策时的损失依赖于 λ_{NP} 和 λ_{PN} 给出。

Table 3. The loss function matrix of A_i with c_j

表 3. 第 i 个方案在第 j 个属性下的损失矩阵

A_i	C_j	$\neg C_j$
a_P	0	$L_j(p)^+\ominus L_{ij}(p)$
a_B	$\sigma\left(L_{ij}(p)\ominus L_j(p)^-\right)$	$\sigma\left(L_j(p)^+\ominus L_{ij}(p)\right)$
a_N	$L_{ij}(p)\ominus L_j(p)^-$	0

考虑到属性权重的问题，各方案的综合损失矩阵如表 4 所示：

Table 4. The loss function matrix of A_i

表 4. 第 i 个方案综合损失矩阵

A_i	C	$\neg C$
a_P	0	$\sum_{j=1}^{n} w_j\left(L_j(p)^+\ominus L_{ij}(p)\right)$
a_B	$\sum_{j=1}^{n}\sigma_j w_j\left(L_{ij}(p)\ominus L_j(p)^-\right)$	$\sum_{j=1}^{n}\sigma_j w_j\left(L_j(p)^+\ominus L_{ij}(p)\right)$
a_N	$\sum_{j=1}^{n} w_j\left(L_{ij}(p)\ominus L_j(p)^-\right)$	0

其中 σ_j 表示对于第 j 个属性的风险规避系数，$\sigma_j\in[0,0.5]$；由决策者给出，若属性的风险规避系数不能确定，那么，$\lambda_{BP}=\sigma\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\left(L_{ij}(p)\ominus L_j(p)^-\right)\right)$；$\lambda_{BN}=\sigma\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\left(L_j(p)^+\ominus L_{ij}(p)\right)\right)$，$\sigma$ 表示总体的风险规避系数，由决策者讨论给出。

3.3. 条件概率的确定

Hwang 和 Yoon 于 1981 年提出了 TOPSIS 方法[19]，并且被广泛地研究与应用，在 TOPSIS 方法中，目标是寻找距离正理想解最近、距离负理想解最远的方案。3.2 中指出，三支决策模型存在两种状态，在计算各方案的三种行动措施的期望损失值时，这两种状态就涉及到条件概率的问题，即方案更倾向于在哪种状态下得分更高。以往是由决策者或者专家给出，但 Decui Liang 等基于 TOPSIS 思想提出了一个新的解决方案来间接确定条件概率[7]，即考虑到正、负理想解与状态 C 和状态 $\neg C$，方案属于状态 C 的条件概率为该方案与正理想解之间的相对贴近度。

首先，利用求得的属性权重 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$、正理想解(A^+)和负理想解(A^-)，计算各方案到正、负理想解的距离表示如下：

$$D\left(A_i,A^+\right)=\sum_{j=1}^n w_j d\left(L_{ij}\left(p\right),L_j\left(p\right)^+\right) \tag{10}$$

$$D\left(A_i,A^-\right)=\sum_{j=1}^n w_j d\left(L_{ij}\left(p\right),L_j\left(p\right)^-\right) \tag{11}$$

其中，w_j 代表第 j 个属性的权重，$L_j\left(p\right)^+$ 代表正理想解(A^+)在第 j 个属性下的值，$L_j\left(p\right)^-$ 代表负理想解(A^-)在第 j 个属性下的值。

然后，计算各方案与正理想解之间的相对贴近度：$RC\left(A_i\right)=\dfrac{D\left(A_i,A^-\right)}{D\left(A_i,A^-\right)+D\left(A_i,A^+\right)}$；表示方案属于状态 C 的可能性，可用来间接表示方案属于状态 C 的条件概率，即 $Pr\left(C\mid A_i\right)=RC\left(A_i\right)$。

最后，根据各方案到正、负理想解的距离，确定方案排序。现有文献的 TOPSIS 方法中一般采用传统的贴进度函数对方案排序，然而有学者指出，传统贴进度值最大的方案有时并不能同时满足与正理想解最近和与负理想解的距离最远。曾守桢等(2019)提出了一种新的计算方案 A_i 的贴进度函数 $\zeta\left(A_i\right)$ [20]，表示如下：

$$\zeta\left(A_i\right)=\frac{D\left(A_i,A^-\right)}{D_{\max}\left(A_i,A^-\right)}-\frac{D\left(A_i,A^+\right)}{D_{\min}\left(A_i,A^+\right)} \tag{12}$$

其中，$D_{\max}\left(A_i,A^-\right)=\max\limits_{1\le i\le m}\left\{D\left(A_i,A^-\right)\right\}$，是方案到负理想解的最大距离，$D_{\min}\left(A_i,A^+\right)=\min\limits_{1\le i\le m}\left\{D\left(A_i,A^+\right)\right\}$，是方案到正理想解的最小距离。公式(13)中 $\zeta\left(A_i\right)$ 主要是用来度量与正理想解 A^+ 最近的方案 A_i 和与负理想解 A^- 最远的程度，$\zeta\left(A_i\right)$ 越大，相应的方案 A_i 越优。计算得到每个方案的贴进度后，择优排序，即 $\zeta\left(A_i\right)$ 越大，方案 A_i 排序越靠前。

3.4. 决策规则

对于任意一个方案 A_i，在不同决策行动下的期望损失 $R\left(a_\blacksquare\mid A_i\right)$ 表示如下，($\blacksquare=P,B,N$)：

$$R\left(a_P\mid A_i\right)=Pr\left(C\mid A_i\right)E\left(\lambda_{PP}\right)\oplus Pr\left(\neg C\mid A_i\right)E\left(\lambda_{PN}\right) \tag{13}$$

$$R\left(a_B\mid A_i\right)=Pr\left(C\mid A_i\right)E\left(\lambda_{BP}\right)\oplus Pr\left(\neg C\mid A_i\right)E\left(\lambda_{BN}\right) \tag{14}$$

$$R\left(a_N\mid A_i\right)=Pr\left(C\mid A_i\right)E\left(\lambda_{NP}\right)\oplus Pr\left(\neg C\mid A_i\right)E\left(\lambda_{NN}\right) \tag{15}$$

其中，$Pr\left(C\mid A_i\right)$ 表示方案 A_i 属于状态 C 的条件概率，$Pr\left(\neg C\mid A_i\right)$ 表示方案 A_i 不属于状态 C 的条件概率，$Pr\left(C\mid A_i\right)+Pr\left(\neg C\mid A_i\right)=1$，$\lambda_{PP}$ 等是用概率语言术语集表示，根据定义 5 得分函数计算其得分 $E\left(\lambda_{PP}\right)$ 等。

根据定义 3 和定义 4，规定决策规则如下：

如果 $E\left(R\left(a_P\mid A_i\right)\right)\le E\left(R\left(a_B\mid A_i\right)\right)$，并且 $E\left(R\left(a_P\mid A_i\right)\right)\le E\left(R\left(a_N\mid A_i\right)\right)$，那么接受方案 A_i；如果 $E\left(R\left(a_B\mid A_i\right)\right)\le E\left(R\left(a_P\mid A_i\right)\right)$，并且 $E\left(R\left(a_B\mid A_i\right)\right)\le E\left(R\left(a_N\mid A_i\right)\right)$，那么延迟决策方案 A_i；如果 $E\left(R\left(a_N\mid A_i\right)\right)\le E\left(R\left(a_P\mid A_i\right)\right)$，并且 $E\left(R\left(a_N\mid A_i\right)\right)\le E\left(R\left(a_B\mid A_i\right)\right)$，那么拒绝方案 A_i。

3.5. 具体实施步骤

基于以上几个小节的介绍，给出基于概率语言术语集多属性三支群决策方法步骤：

Step 1：t 个决策者分别给出各方案在每个属性下的评价值 $L_{ij}^g\left(p\right)$，表示决策者 E^g 对第 i 个方案在第 j 属性下的评价值，从而构成决策者 E^g 的个体决策矩阵；此外，决策者 E^g 还需给出方案的偏好关系 Ω^g。

Step 2：利用公式(8)建立以群体非一致度最小化为目标的规划模型求解得出属性权重 $w=\left(w_1,w_2,\cdots,w_n\right)$、正理想解(A^+)和负理想解(A^-)。

Step 3：利用公式(9)对所有决策者给出的方案 A_i 在属性 c_j 下的评价值 $L_{ij}^g\left(p\right)$ 进行集结，求得群体决

策矩阵，并基于该矩阵，利用求得的正理想解和负理想解，根据表 3 构建各方案在每个属性下的三支决策损失矩阵。

Step 4：基于求得的属性权重，根据表 4 对每个属性下各方案的三支决策损失矩阵进行集结，求得各方案的综合三支决策损失矩阵。

Step 5：根据公式(10)和(11)，计算各方案与正理想解之间的相对贴近度，并选取此贴进度作为方案属于状态 C 的条件概率 $Pr(C \mid A_i)$，并利用公式(12)计算各方案基于正、负理想解的优劣程度，对方案进行排序。

Step 6：利用公式(13)，(14)和(15)，计算各方案采取不同行动策略的期望损失值。

Step 7：根据求得的各方案采取不同行动策略的期望损失值，利用三支决策规则，判断各方案应采取的最佳行动策略。

4. 实例分析

为说明本文方法的有效性，采用 Huchang Liao [12]的实例进行分析。病人在就医时需要考虑哪个医院更适合自己，对医院进行评估。在评估过程中，存在四个备选方案：成都军区总医院(A_1)，成都市第三人民医院(A_2)，成都市第四人民医院(A_3)，华西医院(A_4)；为了评价的合理性，考虑四个属性，即决策属性：医疗设备(c_1)、医护人员(c_2)、医疗环境(c_3)和医疗费用(c_4)。邀请三个病人即决策者 $E^g\left(g=1,2,3\right)$ 基于语言术语集 $S=\{s_0,s_1,s_2,s_3,s_4\}$ 利用概率语言术语集给出各方案在每个属性下的评价值，其中 s_0 = “非常差”、s_1 = “差”、s_2 = “中等”、s_3 = “好”、s_4 = “非常好”，决策者 $E^g\left(g=1,2,3\right)$ 的个体概率语言决策矩阵如表 5~7 所示：

决策者 $E^g\left(g=1,2,3\right)$ 给出的方案两两比较偏序关系为：$\Omega^1=\{(A_1,A_2)\}$，$\Omega^2=\{(A_1,A_3),(A_2,A_3)\}$，$\Omega^3=\{(A_2,A_3),(A_3,A_4)\}$。

Step 1：在决策者给出决策矩阵后，根据定义 3 对用概率语言术语集表示的评价值进行标准化处理，此时，每个概率语言术语集中语言术语个数为 3，即 $\#L_{ij}^{g(k)}=3$。

Step 2：根据 3.1 小节中公式(8)，建立以最小化群体非一致度为目标的线性规划模型，利用 LINGO 软件求得属性权重和正、负理想解，如下所示：

Table 5. The probabilistic linguistic decision matrix of the decision maker E^1

表 5. 决策者 E^1 给出的概率语言决策矩阵

x_{ij}^1	c_1	c_2	c_2	c_n
A_1	$\{s_0(0.2),s_1(0.3)\}$	$\{s_0(0.6)\}$	$\{s_2(0.8)\}$	$\{s_3(0.3),s_4(0.4)\}$
A_2	$\{s_1(0.4),s_2(0.2)\}$	$\{s_0(0.2),s_1(0.3)\}$	$\{s_2(0.4),s_3(0.2)\}$	$\{s_3(0.5),s_4(0.1)\}$
A_3	$\{s_4(0.3)\}$	$\{s_0(0.2),s_1(0.4)\}$	$\{s_1(0.1),s_2(0.2)\}$	$\{s_0(0.4)\}$
A_m	$\{s_3(0.1),s_4(0.4)\}$	$\{s_0(0.2),s_1(0.4)\}$	$\{s_1(0.3),s_2(0.1)\}$	$\{s_1(0.6)\}$

Table 6. The probabilistic linguistic decision matrix of the decision maker E^2

表 6. 决策者 E^2 给出的概率语言决策矩阵

x_{ij}^2	c_1	c_2	c_2	c_n
A_1	$\{s_1(0.2),s_2(0.4)\}$	$\{s_4(0.7)\}$	$\{s_3(0.3),s_4(0.2)\}$	$\{s_0(0.2),s_1(0.4)\}$
A_2	$\{s_1(0.2),s_2(0.4)\}$	$\{s_0(0.2),s_1(0.3),s_3(0.1)\}$	$\{s_1(0.3),s_2(0.1)\}$	$\{s_2(0.2),s_3(0.3),s_4(0.3)\}$
A_3	$\{s_0(0.2),s_1(0.3)\}$	$\{s_0(0.3),s_1(0.7)\}$	$\{s_1(0.4),s_2(0.3)\}$	$\{s_2(0.2),s_3(0.6)\}$
A_m	$\{s_1(0.3),s_2(0.2)\}$	$\{s_2(0.3),s_3(0.6)\}$	$\{s_2(0.7)\}$	$\{s_3(0.7),s_4(0.2)\}$

Table 7. The probabilistic linguistic decision matrix of the decision maker E^3
表 7. 决策者 E^3 给出的概率语言决策矩阵

x_{ij}^3	c_1	c_2	c_2	c_n
A_1	$\{s_2(0.4), s_3(0.5)\}$	$\{s_0(0.7)\}$	$\{s_1(0.3), s_2(0.7)\}$	$\{s_0(0.2), s_1(0.7)\}$
A_2	$\{s_2(0.2), s_3(0.2), s_4(0.3)\}$	$\{s_2(0.2), s_3(0.7)\}$	$\{s_0(0.2), s_1(0.7)\}$	$\{s_2(0.7), s_3(0.1)\}$
A_3	$\{s_2(0.3), s_3(0.2)\}$	$\{s_4(0.7)\}$	$\{s_0(0.3), s_1(0.4)\}$	$\{s_2(0.4)\}$
A_m	$\{s_1(0.2), s_1(0.3), s_2(0.1)\}$	$\{s_4(0.1)\}$	$\{s_1(0.7), s_2(0.1)\}$	$\{s_2(0.1), s_3(0.5)\}$

$$w = (0.3849, 0.1640, 0.1328, 0.3183)$$

$$\begin{aligned} A^+ = \{ & \{s_4(0.1790), s_3(0.2531), s_0(0.5679)\}; \{s_4(0.2470), s_1(0.2461), s_0(0.5069)\}; \\ & \{s_4(0.7492), s_1(0.2003), s_0(0.0505)\}; \{s_3(0.1863), s_1(0.4638), s_0(0.3499)\} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^- = \{ & \{s_3(0.1078), s_1(0.2030), s_0(0.6892)\}; \{s_4(0.3798), s_1(0.2467), s_0(0.3735)\}; \\ & \{s_4(0.2277), s_1(0.2540), s_0(0.5182)\}; \{s_3(0.1161), s_1(0.3238), s_0(0.5601)\} \} \end{aligned}$$

Step 3：利用公式(9)对所有决策者给出的各方案在每个属性下的评价值进行集结，求得群体决策矩阵，并基于该矩阵，利用求得的正理想解和负理想解，根据表 3 构建各方案在每个属性下的三支决策损失矩阵。

Step 4：基于求得的属性权重向量 w，根据表 4 对每个属性下各方案的三支决策损失矩阵进行集结，求得各方案的综合三支决策损失矩阵。

Step 5：根据公式(10)和(11)，求得各方案属于状态 C 的的条件概率：$Pr(C|A_1) = RC(A_1) = 0.5172$、$Pr(C|A_2) = RC(A_2) = 0.5298$、$Pr(C|A_3) = RC(A_3) = 0.4907$、$Pr(C|A_4) = RC(A_4) = 0.5307$，并根据公式(12)，计算各方案基于正、负理想解的优略程度，求得方案的排序为 $A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$。

Step 6：假设总体的风险规避系数 $\sigma = 0.5$，利用公式(13)，(14)和(15)，计算得出各方案采取三种行动策略时的期望损失值，根据三支决策规则，接受 A_1、A_2、A_4，拒绝 A_3。

综合考虑 Step 5 和 Step 6 的结果，选择 A_2 最好，即在该实例中选择成都市第三人民医院。

5. 总结

本文给出了一个基于概率语言术语集的多属性三支群决策方法：首先，构建了以决策者群体非一致度最小化为目标的优化模型，确定属性权重及正、负理想解；然后，基于求得的属性权重和正、负理想解，通过计算每个属性下各方案在不同状态下采取不同行动时的损失值，构建综合损失矩阵；最后，利用 TOPSIS 思想在根据相对贴近度对方案进行排序的同时确定各方案属于不同状态的条件概率，求得各方案采取不同行动的期望损失值，并以此为基础利用三支决策规则确定各方案应采取的行动策略。在本文中，三支决策损失矩阵不是由决策者主观给定，而是通过计算决策者给出的决策矩阵得到的，更加客观合理；在该模型中，三支决策中的条件概率是由各方案与正理想解之间的相对贴进度决定的，具体规则是，方案到正理想解的距离与方案到正、负理想解距离之和的比值；此外，该模型的正、负理想解和属性权重是通过线性规划求解得出，相对于专家直接界定，该方法更加客观有效。最后，通过一个实例证明了该方法的可行性和有效性。在以后的工作中，关于决策者评价值的表达方式方面，可将纯语言信息纳入模型构建，以便决策者在评价方案时更加准确清晰地表达其评价信息。

参考文献

[1] Yao, Y.Y. and Wong, S.K. (1992) A Decision Theoretic Framework for Approximating Concepts. *International Journal of Man-Machine Studies*, **37**, 793-809. https://doi.org/10.1016/0020-7373(92)90069-W

[2] Pawlak, Z. (1982) Rough Set. *International Journal of Computer and Information Sciences*, **11**, 341-356. https://doi.org/10.1007/BF01001956

[3] 刘久兵, 顾萍萍, 周献中, 黄兵, 李华雄. 基于优化模型的直觉模糊三支群决策方法[J]. 南京大学学报(自然科学), 2018, 54(5): 944-957.

[4] 刘久兵, 张里博, 周献中, 黄兵, 李华雄. 直觉模糊信息系统下的三支决策模型[J]. 小型微型计算机系统, 2018, 39(6): 163-167.

[5] Liang, D., Xu, Z. and Liu, D. (2017) Three-Way Decisions Based-Theoretic Rough Sets with Dual Hesitant Fuzzy Information. *Information Sciences*, **396**, 127-143. https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.02.038

[6] Jia, F. and Liu, P. (2019) A Novel Three-Way Decision Model under Multiple-Criteria Environment.

[7] Liang, D., Xu, Z., Liu, D. and Wu, Y. (2018) Method for Three-Way Decisions Using Ideal TOPSIS Solutions at Pythagorean Fuzzy Information. *Information Sciences*, **435**, 282-295. https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.01.015

[8] Rdriguez, R.M., Martinez, L. and Herrera, F. (2012) Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **20**, 109-119. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2011.2170076

[9] Pang, Q., Wang, H. and Xu, Z. (2016) Probabilistic Linguistic Term Sets in Multi-Attribute Group Decision Making. *Information Sciences*, **369**, 128-143. https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.06.021

[10] Gou, X. and Xu, Z. (2016) Novel Basic Operational Laws for Linguistic Terms, Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets and Probabilistic Linguistic Term Sets. Elsevier Science Inc., New York. https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.08.034

[11] Bai, C., Zhang, R., Qian, L., *et al*. (2017) Comparisons of Probabilistic Linguistic Term Sets for Multi-Criteria Decision Making. *Knowledge-Based Systems*, **119**, 284-291. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2016.12.020

[12] Liao, H., Jiang, L., Xu, Z., Xu, J. and Herrera, F. (2017) A Linear Programming Method for Multiple Criteria Decision-Making with Probabilistic Linguistic Information. *Information Sciences*, **415-416**, 341-355. https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.06.035

[13] Xu, Z. (2005) Deviation Measures of Linguistic Preference Relations in Group Decision Making. *Omega*, **33**, 249-254. https://doi.org/10.1016/j.omega.2004.04.008

[14] Zadeh, L.A. (1975) The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning I. *Information Sciences*, **8**, 199-249. https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90036-5

[15] Bai, C.Z., Zhang, R., Shen, S., Huang, C.F. and Fan, X. (2018) Interval-Valued Probabilistic Linguistic Term Sets in Multi-Criteria Group Decision Making. *International Journal of Intelligent Systems*, **33**, No. 6.

[16] Xia, M. and Xu, Z. (2011) Hesitant Fuzzy Information Aggregation in Decision Making. *International Journal of Approximate Reasoning*, **52**, 395-407. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2010.09.002

[17] Srinivasan, V. and Shocker, A.D. (1973) Linear Programming Techniques for Multidimensional Analysis of Preferences. *Psychometrika*, **38**, 337-342. https://doi.org/10.1007/BF02291658

[18] Li, H.X. and Zhou, X.Z. (2011) Risk Decision Making Based on Decision-Theoretic Rough Set: A Three-Way View Decision Model. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **4**, 1-11. https://doi.org/10.1080/18756891.2011.9727759

[19] Hwang, C.L. and Yoon, K. (1981) Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. 375, 1-531. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48318-9

[20] 曾守桢, 穆志民. 基于混合加权距离的毕达哥拉斯模糊 TOPSIS 多属性决策方法研究[J]. 中国管理科学, 2019, 27(3): 198-205.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2163-1476，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：orf@hanspub.org