

An Improved Multi-Local-World Network Model

Lulu Zhang

Central University for Nationalities, Beijing
Email: 1435406462@qq.com

Received: Oct. 16th, 2019; accepted: Oct. 30th, 2019; published: Nov. 6th, 2019

Abstract

On the basis of Multi-Local-World network model, this paper introduces the inequality and competitiveness among local networks, constructs an improved Multi-Local-World model, and analyses the degree distribution of the model. The network degree distribution of the model obeys power-law distribution, and the network is scale-free network.

Keywords

Multi-Local-World Network Model, Inequality, Competitiveness

一种改进的多局域世界网络模型

张璐璐

中央民族大学, 北京
Email: 1435406462@qq.com

收稿日期: 2019年10月16日; 录用日期: 2019年10月30日; 发布日期: 2019年11月6日

摘要

本文在多局域世界网络模型的基础之上, 引入了局域网间的不等性, 竞争性, 构建了改进的多局域世界网络模型, 并对该模型的度分布进行分析。该模型网络度分布服从幂律分布, 网络为无标度网络。

关键词

多局域世界网络模型, 不等性, 竞争性



1. 引言

近年来, 复杂网络的研究受到学者的关注。复杂网络的理论与模型也得到了极大的丰富。大家结合自己的研究领域, 研究对象的特征, 对相关模型进行改进。Chen [1]为了研究 Internet 网中拓扑特性产生的机理, 建立了多局域世界演化模型, 在该模型中, 整个网络由多个独立的局域网组成, 网络的演化就如新节点的加入, 边的增加, 边的删减都在局域网中进行, 仅对该局域网中节点的度产生影响, 对其他局域网节点没有太大影响; 后来学者们又根据研究所需对该模型进行改进, 田思[2]根据现实网络的局域性及联系的强弱, 将权重引入到多局域世界模型之中, 构造了加权多局域世界演化模型; 李晓[3]将局域性与赋权性加入到全局无权网络, 构造了多局域加权 n 网络, 并进行仿真模拟, 研究模型的拓扑性质。

现实生活中的大多数网络虽然包含多个局域网, 但局域网却不像多局域世界网络模型[4]中的局域网那样均匀, 它们有着不同数量的节点, 不同数量的边, 甚至局域网之间还存在着竞争关系。如国际对外直接投资网络, 可以根据国家所处地区将整个投资网络分成不同的区域(局域网), 且每个区域中的国家数量不同, 各个区域中国家间投资关系联系的紧密程度不同, 即每个区域规模不同; 由于各个区域发展程度不同, 对外政策, 开放程度不同, 所以每个区域增加新投资关系的可能性也不同, 即区域之间存在竞争关系, 所以在运用多局域世界网络模型刻画投资网络时, 会发现存在很多局限。本文尝试在多局域世界网络模型的基础之上, 引入局域网间的不等性, 竞争性, 构造改进的多局域世界网络演化模型, 并对该模型的度分布进行研究。

2. 模型建立与分析

2.1. 改进的多局域世界模型(IMLW)

多局域世界网络的初始条件是有着 m 个拥有 m_0 个节点和 e_0 条边的局域网络, 且这 m 个局域网之间节点数, 边数都相同, 局域网间也不存在竞争关系。但对于现实生活中的许多网络而言, 它虽然也包括多个起始的网络, 但它们之间并不是均等的, 这些网络有着不同的节点数和边数, 对新节点有着不同的吸引力, 也就是说, 局域网络之间存在着竞争。那么, 为了使得模型更贴合现实生活中的网络, 需要对多局域世界网络进行改进, 使得改进的网络模型更加确切的解释真实网络的结构特征的产生机理。

初始条件: 起始为 m 个独立的局域网, 每个网络有 m_i 个节点和 e_i 条边 ($i = 1, 2, \dots, m$), (记 $M = \sum_{i=1}^m m_i$, 即初始网络中总共有 M 个节点), 且局域网之间存在着竞争, 赋予每个局域网 Ω_p 一个参数, 表明该局域网竞争系数 r_p ($p = 1, 2, \dots, m$), 接下来每一个时间步长内, 都进行如下的操作:

1) 以概率 p_1 增加一个新节点到一个选定的局域网中, 且与该局域网中的节点建立 n_1 条边。首先需要选定一个局域网 Ω_p , 其概率为 $\frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q}$ (2.11), 接下来新节点与该网络节点 i 连接的概率为按照度择优的原则

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} k_j} \quad (2.12)$$

2) 以概率 p_2 增加 n_2 条边到选定的局域网中。首先需要选首先按照 2.11 式选定一个局域网 Ω_p ，随机选择该网络中的一个节点，概率为 $\frac{1}{N_{\Omega_p}(t)}$ ，接下来按 2.12 式选定另一个节点，重复上述过程 n_2 次。

3) 以概率 p_3 在选定的局域网中去掉 n_3 条边。首先需要选定一个局域网 Ω_p ，根据反择优原则，那么一个局域网的竞争力越低被选择的概率就越大。选定局域网 Ω_p 的概率为 $1 - \frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q}$ ，接下来随机选择一个节点，概率为 $\frac{1}{N_{\Omega_p}(t)}$ ，然后反择优选择另一节点，其概率为

$$\Pi'(k_i) = \frac{1}{N_{\Omega_p}(t)-1} (1 - \Pi(k_i)) = \frac{1}{N_{\Omega_p}(t)-1} \left(1 - \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} k_j} \right)$$

4) 以概率 p_4 选定一个局域网，让其与其它局域网建立 n_4 条长程边。首先按照 2.11 选定一个局域网 Ω_p ，然后在网络中按照 2.12 式选定一个节点，再按 2.11 式选择一个局域网 Ω_p ，并在该局域网中按 2.12 式选择一个节点与之前节点相连，重复上述过程 n_4 次。

5) 终止条件，运行 N 步。

其中 $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ ，改进的多局域世界网络模型最终生成的网络为 m 个大小不均的局域网，每个局域网中的节点数，边数都不等。局域网间紧密程度，节点数，边数差距的取决于初始网络中各局域网的竞争力 r_p ($p=1,2,\dots,m$)，竞争系数越大的局域网，在整个演变过程中增加节点，边的几率越大，最终的局域网规模越大，节点间的联系越密切。若 r_p ($p=1,2,\dots,m$) 中存在某一个局域网的竞争系数远远大于其它局域网的竞争系数，那么最终的网络由一个规模较大的局域网和几个规模较小的局域网构成。

2.2. 度分布分析

接下来采用解析方法中的平均场理论来求解改进多局域世界网络模型的度分布，具体计算过程如下：

1) 增加一个带有 n_1 条边的节点到一个选定的局域网 Ω_p 中。

$$\left(\frac{\partial k_i}{\partial t} \right)_1 = \frac{n_1 p_1 r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} k_j} \quad (2.13)$$

2) 增加 n_2 条边到选定的局域网中。

$$\left(\frac{\partial k_i}{\partial t} \right)_2 = \frac{n_2 p_2 r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} \left[\frac{1}{N_{\Omega_p}(t)} + \left(1 - \frac{1}{N_{\Omega_p}(t)} \right) \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} k_j} \right] \quad (2.14)$$

3) 在选定的局域网中去掉 n_3 条边。

$$\left(\frac{\partial k_i}{\partial t} \right)_3 = -n_3 p_3 \left[1 - \frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} \right] \left[\frac{1}{N_{\Omega_p}(t)} + \left(1 - \frac{1}{N_{\Omega_p}(t)} \right) \frac{1}{N_{\Omega_p}(t)-1} \left(1 - \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} s_j} \right) \right] \quad (2.15)$$

4) 选定一个局域网，让其与其它局域网建立 n_4 条长程边。

$$\left(\frac{\partial k_i}{\partial t}\right)_4 = n_4 p_4 \left(\frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} k_j} + \frac{r_j}{\sum_{q=1}^m r_q} \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} k_j} \right) \tag{2.16}$$

经过 t 个时间步长后，整个网络中增加的节点数为 $\Delta(N(t)) = p_1 t$ ，局域网中增加的节点数与局域网的竞争系数成正比，局域网的竞争系数越大，增加的节点数就越多。局域网 Ω_p 增加的节点数为 $\frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} \Delta(N(t)) = \frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} p_1 t$ ，每个局域网中的节点数应当是初始时刻局域网所含的节点数加上增加的节点数，局域网 Ω_p 中的节点数目为

$$N_{\Omega_p}(t) = m_p + \frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} p_1 t \tag{2.17}$$

当时间 t 无限大时，可以忽略 m_p 的影响，则 $N_{\Omega_p}(t) = \frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} p_1 t$ (2.18)

经过 t 个时刻后，节点的总度增加了 $\Delta k = 2t(n_1 p_1 + n_2 p_2 - n_3 p_3 + n_4 p_4)$ ，令 $c = 2(n_1 p_1 + n_2 p_2 - n_3 p_3 + n_4 p_4)$ ，则 $\Delta k = ct$ ，局域网增加度与局域网的竞争系数成正比，局域网 Ω_p 增加度 $\Delta k_{\Omega_p} = ct \frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q}$ ，局域网 Ω_p 中的度等于初始时刻局域网中的度与 t 个时刻增加的度之和，故

$$k_{\Omega_p} = ct \frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} + 2e_p, \text{ 当时间 } t \text{ 无限大时, } k_{\Omega_p} = ct \frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} \tag{2.19}$$

则度对时间的变化率为

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_i}{\partial t} &= \left(\frac{\partial k_i}{\partial t}\right)_1 + \left(\frac{\partial k_i}{\partial t}\right)_2 + \left(\frac{\partial k_i}{\partial t}\right)_3 + \left(\frac{\partial k_i}{\partial t}\right)_4 \\ &= \frac{n_1 p_1 r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} k_j} + \frac{n_2 p_2 r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} \left[\frac{1}{N_{\Omega_p}(t)} + \left(1 - \frac{1}{N_{\Omega_p}(t)}\right) \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} k_j} \right] \\ &\quad - n_3 p_3 \left[1 - \frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} \right] \left[\frac{1}{N_{\Omega_p}(t)} + \left(1 - \frac{1}{N_{\Omega_p}(t)}\right) \frac{1}{N_{\Omega_p}(t) - 1} \left(1 - \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} k_j}\right) \right] \\ &\quad + n_4 p_4 \left[\frac{r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} k_j} + \frac{r_j}{\sum_{q=1}^m r_q} \frac{k_i}{\sum_{j \in \Omega_p} k_j} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n_1 p_1}{c} \cdot \frac{k_i}{t} + \frac{n_2 p_2}{p_1} \cdot \frac{1}{t} + \frac{n_2 p_2}{c} \cdot \frac{k_i}{t} - n_2 p_2 \cdot \frac{\sum_{q=1}^m r_q}{r_p c p_1} \cdot \frac{k_i}{t^2} + \frac{n_3 p_3}{p_1} \cdot \frac{1}{t} - n_3 p_3 \cdot \frac{\sum_{q=1}^m r_q}{r_p p_1} \cdot \frac{1}{t} \\
&+ n_3 p_3 \cdot \frac{\sum_{q=1}^m r_q - r_p}{\sum_{q=1}^m r_q} + n_3 p_3 \cdot \frac{\sum_{q=1}^m r_q - r_p}{c r_p} \cdot \frac{k_i}{t} + n_3 p_3 \cdot \frac{\left(\sum_{q=1}^m r_q - r_p\right) \cdot \sum_{q=1}^m r_q}{p_1 r_p t \left(p_1 r_p t - \sum_{q=1}^m r_q\right)} \\
&+ n_3 p_3 \cdot \frac{\left(\sum_{q=1}^m r_q - r_p\right) \cdot \left(\sum_{q=1}^m r_q\right)^2}{c p_1 r_p t \left(p_1 r_p t - \sum_{q=1}^m r_q\right)} \cdot \frac{k_i}{t} + \frac{2n_4 p_4}{c} \cdot \frac{k_i}{t} \tag{2.20} \\
&= \frac{n_1 p_1}{c} \cdot \frac{k_i}{t} + \frac{n_2 p_2}{c} \cdot \frac{k_i}{t} + n_3 p_3 \cdot \frac{\sum_{q=1}^m r_q - r_p}{c r_p} \cdot \frac{k_i}{t} + \frac{2n_4 p_4}{c} \cdot \frac{k_i}{t} \\
&+ \frac{n_2 p_2}{p_1} \cdot \frac{1}{t} + \frac{n_3 p_3}{p_1} \cdot \frac{1}{t} - n_3 p_3 \cdot \frac{\sum_{q=1}^m r_q}{r_p p_1} \cdot \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

$$\text{令 } a = \frac{n_1 p_1}{c} + \frac{n_2 p_2}{c} + \frac{\sum_{q=1}^m r_q - r_p}{c r_p} + \frac{2n_4 p_4}{c}, \quad b = \frac{n_2 p_2}{p_1} + \frac{n_3 p_3}{p_1} - n_3 p_3 \cdot \frac{\sum_{q=1}^m r_q}{r_p p_1}$$

将 a 和 b 代入(2.20)式, 并化简可以得到

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = a \cdot \frac{k_i}{t} + b \cdot \frac{1}{t}$$

由初始条件为 $k_i(t_i) = n_1$ 可得

$$k_i(t) = \int_{t_i}^t a \cdot \frac{k_i}{t} + b \cdot \frac{1}{t} dt = \left(n_1 + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{t}{t_i}\right)^a - \frac{a}{b}$$

由于 t_i 服从 $[0, M+t]$ 的均匀分布, 则 $P_i(t_i) = \frac{1}{M+t}$

$$\begin{aligned}
F(k) &= P(k_i(t) < k) \\
&= P\left(t_i > \left(k + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}} \left(n_1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}} t\right) \\
&= 1 - \frac{t}{M+t} \left(s + \frac{b}{a}\right)^{-\left(\frac{1}{a}+1\right)} \left(n_1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}
\end{aligned}$$

$$\text{则度的密度分布函数 } P(k) = \frac{\partial F(k)}{\partial k} = \frac{t}{a(M+t)} \left(n_1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}} \left(k + \frac{b}{a}\right)^{-\left(\frac{1}{a}+1\right)}$$

由此可知该网络模型的度服从幂律分布，为无标度网络，其中

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{n_1 p_1}{c} + \frac{n_2 p_2}{c} + \frac{\sum_{q=1}^m r_q - r_p}{c r_p} + \frac{2 n_4 p_4}{c}} = \frac{2(n_1 p_1 + n_2 p_2 - n_3 p_3 + 2 n_4 p_4) r_p}{n_1 p_1 r_p + n_2 p_2 r_p + \sum_{q=1}^m r_q - r_p + 2 n_4 p_4 r_p}, \quad r_p (p=1, 2, \dots, m)$$

影响着幂指数的值，当 $r_p (p=1, 2, \dots, m)$ 取值均相同时，幂指数的值介于 1~2 之间。

3. 仿真模拟

我们运用 MATLAB 进行仿真模拟，绘制出有着 $m=5$ 个独立局域网， $p_1=0.3, p_2=0.4, p_3=0.2, p_4=0.1, n_1=3, n_2=5, n_3=4, n_4=3, t=2000$ ，多局域世界网络模型中每个局域网中节点数边数相同为 $n_0=8, e_0=15$ 改进多局域世界网络模型中各局域网的节点数、边数、竞争系数定义为 $m_1=10, e_1=19, m_2=9, e_2=18, m_3=8, e_3=15, m_4=7, e_4=14, m_5=6, e_5=13, r_1=1, r_2=2, r_3=3, r_4=4, r_5=5$ ，绘制出两个模型的网络的度在对数坐标系中的分布情况，如图 1，图 2 所示，比较图 1，图 2 可以看出多局域世界网络模型的度分布比较均匀，网络中节点度的最大度仅为 10，最大度与最小度的差距较小，而在改进的多局域世界网络模型中，度分布比较分散，最大度接近 100。相比较而言，改进的多局域世界网络模型更加贴合现实生活中的网络。

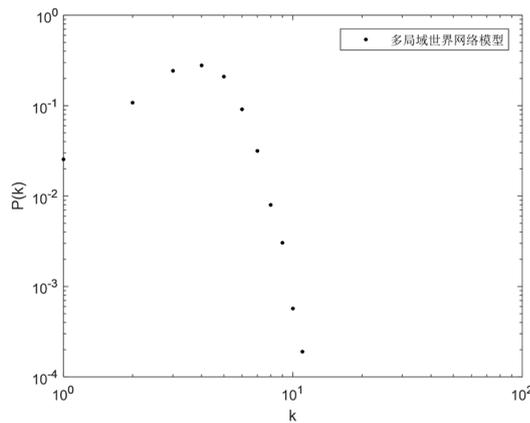


Figure 1. MLW degree distribution
图 1. 多局域世界网络模型度分布

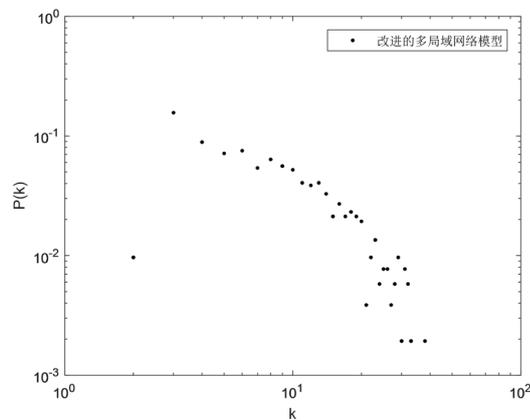


Figure 2. IMLW degree distribution
图 2. 改进多局域世界网络度分布

4. 小结

本文在多局域世界演化模型的基础之上，将局域网之间的不等性、竞争性引入到模型之中，建立了改进的多局域世界网络模型，并运用平均场理论对改进多局域世界网络模型的度分布进行求解，改进模型度服从幂律分布，幂指数的大小与每个局域网的竞争系数有很大关系。最后进行仿真模拟，改进模型网络度的分布与原模型度分布相比度的分布更不均匀，更加贴合现实生活中的网络，实用性更强。

参考文献

- [1] Chen, G., Fan, Z.P., Li, X. (2005) Modeling the complex Internet topology. In: Vattay, G. and Ocarev, L.K, Eds., *Complex Dynamics in Communication Network*, Springer-Verlag, Berlin.
- [2] 田思, 李慧嘉, 赵岳. 一种新型多局域世界网络模型分析[J]. 计算机应用研究, 2013, 30(3): 869-872.
- [3] 李晓. 基于双向择优机制的多局域加权网络研究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东师范大学, 2012.
- [4] 汪小帆. 复杂网络理论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.