Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2023, 13(3), 2018-2023
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2023.133201

Hans汉斯

复双曲空间中测地球面上的Sasakian磁流

王江丽，石青松

贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2023年4月19日；录用日期：2023年6月20日；发布日期：2023年6月27日

摘　要

在复双曲空间中的每个测地球上都有由几乎接触度量结构引起的Sasakian磁场。在本文中研究了复双曲空间中测地球上的一种特殊的Sasakian磁流即Legendre轨道流，它是带电粒子在测地球上的Sasakian磁场作用下沿着与特征向量场正交方向运动所获得的受限磁流。本文主要研究了复双曲空间中测地球上的Legendre轨道流与Legendre测地流彼此光滑共轭。

关键词

Sasakian磁场，Legendre轨道，共轭，复双曲空间

Measuring Sasakian Magnetic Flow on Earth Surface in Complex Hyperbolic Space

Jiangli Wang, Qingsong Shi

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Apr. 19th, 2023; accepted: Jun. 20th, 2023; published: Jun. 27th, 2023

Abstract

In the complex hyperbolic space, there are Sasakian magnetic fields caused by the almost contact metric structure on every measuring earth. In this paper, a special Sasakian magnetic flow, Legendre orbital flow, is studied on the measuring Earth in the complex hyperbolic space. It is the limited magnetic flow obtained by the charged particles moving in the direction orthogonal to the eigenvector field under the Sasakian magnetic field on the measured earth. This paper mainly studies that the Legendre orbital flow and Legendre geodesic flow on Earth in complex hyperbolic space are smooth conjugate to each other.

文章引用: 王江丽, 石青松. 复双曲空间中测地球面上的 Sasakian 磁流[J]. 运筹与模糊学, 2023, 13(3): 2018-2023.
DOI: 10.12677/orf.2023.133201

Keywords

Sasakian Magnetic Field, Legender Orbit, Conjugation, Complex Hyperbolic Space

1. 引言

$\left(\tilde{M},J,\langle,\rangle\right)$是具有复结构$J$的Kähler流形，在复双曲空间中的每个测地球上都有由复结构J诱导的几乎接触度量结构$\left(\varphi,\xi,\eta,\langle,\rangle\right)$。由此结构可诱导正则闭2-形$F_\phi$，利用$F_\phi$可定义测地球上的Sasakian磁场即$F_k=kF_\phi$。类似测地线诱导测地流一样，可从带电粒子在磁场作用下的运动轨道中诱导单位切丛上的磁流，定义与Sasakian磁场有关的流为$F_k\varphi_t(v)=\dot{\gamma}_u(t)$，$\forall v\in UM$，其中$\gamma_u$代表$F_k$的法向轨道且满足$\dot{\gamma}_u(0)=v$，以弧长为参数的曲线$\gamma$如果满足微分方程$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=k\phi\dot{\gamma}$，则$\gamma$称为Sasakian磁场的轨道。当磁力$k=0$时，Sasakian磁场的轨道方程变为$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=0$，此时轨道即为测地线。所以轨道是测地线的推广概念。在研究Sasakian流形时显然想到通过考察轨道的性质来反映Sasakian流形的形状及几何构造。

本文主要是研究复双曲空间中测地球上两个磁流之间的关系，运用坐标变换的形式将Legendre轨道流表示为复欧式空间的子集的矩阵，然后利用矩阵的性质刻画Legendre轨道流与Legendre测地流之间的关系。对于磁流的研究，在文献[1]中T Adachi在复空间形中的A型实超曲面上对Kähler磁场上的一般轨道进行了研究。得到了$CP^n(c)$中的单位切丛上的磁流彼此平滑一致，$CH^n(c)$中的单位切丛上的磁流被分成三个一致类。因为Sasakian流形是Kähler流形的奇维类似物，所以本文受到了文献[1]中研究Kähler磁场中Kähler磁流的启发，研究了Sasakian磁场中的Sasakian磁流。因为Sasakian磁场的轨道受力不均匀，所以相对来说Sasakian磁场轨道的研究比较繁琐。对于Sasakian磁场轨道的研究，在文献[2]中Maeda和T Adachi研究了A形超曲面上的所有测地线并对其闭合性进行了研究。在文献[3]中J.L. Cabrerizo，M. Fernandez & J.S. Gomez研究了三维Sasakian流形上的轨道及其闭合性。在文献[4]中S.L. Druta-Romaniuc，J. Inoguchi，M.I. Munteanu和A.I. Nistor研究了n维Sasakian流形上的轨道并以Frenet公式的观点证明了它们的性质。他们研究的都是一般的轨道，本文中研究的是与特征向量场ξ正交方向的Legendre轨道。并在此基础上考察了复双曲空间中测地球上Legendre轨道流与Legendre测地流两者之间的关系。此工作可以让我们对测地球这种特殊的流形有了一个大致的了解，而且进一步完善了实超曲面的理论体系。

2. 预备知识

在研究之前，先给出本文需要用到的相关定义、定理、引理。既然是研究Sasakian流形中Sasakian磁场的轨道，则现在先给出Sasakian流形的定义。

定义1 ([5])：$\left(\tilde{M},J,\langle,\rangle\right)$是具有复结构$J$的Kähler流形，M是Kähler流形的实超曲面，在M上对任意的切向量$v,w\in T_pM,\forall p\in M$，由复结构$J$诱导的接触度量结构$\left(\phi,\xi,\eta,\langle,\rangle\right)$满足$\phi^2v=-v+\eta(v)\xi$，$\phi(\xi)=0$，$\eta(\xi)=1$，$\langle\phi v,\phi w\rangle=\langle v,w\rangle-\eta(v)\eta(w)$时，此流形称为contact度量流形，这里的$\phi,\xi,\eta,\langle,\rangle$分别是张量场，向量场，一阶形式和黎曼度量。进一步，当接触度量结构满足$(\nabla_v\phi)w=\langle v,w\rangle\xi-\eta(w)v$时，contact度量流形称为Sasakian流形。

定义 2：$\tilde{M}$ 是完备的黎曼流形，设 $p \in \tilde{M}, \delta > 0$，使得指数映射 $\exp_p$ 在开球 $B_p(\delta) = \{v \in T_pM; |v| < \delta\}$ 上有定义，令 $\mathcal{B}_p(\delta) = \exp_p(B_p(\delta)) = \{q \in M; \exists 连接 p,q 的测地线 r, 使得 L(r) < \delta\}$，称 $\mathcal{B}_p(\delta)$ 为在 $\tilde{M}$ 中以 p 为中心，δ 为半径的测地球。

为了后续研究 Legendre 轨道的方程，这里引进外在形状，复扭转以及 d 阶螺旋的定义。

定义 3 ([3])：对于黎曼流形 $\tilde{M}$ 中子流形 M 上的光滑曲线 γ，将其视为黎曼流形 $\tilde{M}$ 中的曲线 $\hat{\gamma}$，称 $\hat{\gamma}$ 为 γ 在 $\tilde{M}$ 中的外在形状，$\tau_{ij} = \langle Y_i, JY_j \rangle$ 为 γ 的复扭转。

所以为了研究 M 上的曲线，很自然的想法是通过研究 γ 在 $\tilde{M}$ 中的外在形状 $\hat{\gamma}$。

定义 4 ([3])：以弧长为参数的光滑曲线 γ 称为 d 阶螺旋，如果有沿着 γ 的单位正交向量场 $Y_1 = \dot{\gamma}$，$Y_2 \cdots Y_d$ 和测地曲率 $k_1, \cdots, k_{d-1}$ 满足方程 $\nabla_{\dot{\gamma}} Y_j = k_{j-1} Y_{j-1} + k_j Y_{j+1} (j = 1, \cdots, d)$，其中 $k_0 = k_d \equiv 0$，$Y_0 = Y_{d+1} = 0$。

因为 Sasakian 磁场作用在轨道上的力不均匀，为了测量作用在轨道上的力，对其结构扭进行定义。

定义 5 ([6])：γ 的结构扭转定义为 $\rho_\gamma(t) = \eta(\dot{\gamma}(t))$，当 $\rho_\gamma = \pm 1$ 时，它是测地线，$\rho_\gamma = 0$ 时，为 Legendre 轨道。

$\tilde{\nabla}$ 和 ∇ 分别是 $\tilde{M}$ 和 M 的协变微分，有 Gauss 和 Weingarten 公式 $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N$，$\tilde{\nabla}_X N = -AN$，其中 X, Y 为 M 的切向量场，A 是与 N 对应的形状算子，有 $\nabla_X \xi = \phi AX$，对结构扭转求微分有([7])

$$\rho'_\gamma = \dot{\gamma}\langle \dot{\gamma}, \xi \rangle = \langle k\phi\dot{\gamma}, \xi \rangle + \langle \dot{\gamma}, \phi A\dot{\gamma} \rangle = \frac{1}{2}\langle \dot{\gamma}, (\phi A - A\phi)\dot{\gamma} \rangle$$

因此，从此式可以发现，沿 γ 的结构扭转一般来说不是常数。而本文研究对象是复双曲空间中的测地球，它可被看作是 Sasakian 空间形的一种特殊的流形([8])，此流形上的形状算子 ϕ 和特征向量 ξ 可以同时对角化。所以对于测地球上 Sasakian 磁场的任何轨道其结构扭转都为常数，正如测地线诱导测地流一样，测地球上 Sasakian 磁场的 Legendre 轨道诱导了 Legendre 轨道流([9])，$F_k^0 \varphi_t : U^0 \mathcal{B}_p(\delta) \to U^0 \mathcal{B}_p(\delta)$ 这里 $\mathcal{B}_p(\delta)$ 表示半径为 δ 的测地球。

为了研究复双曲空间中测地球上的 Legendre 轨道，现在给出一些基本符号。

$H_1^{2n+1} = \{z \in C^{n+1} | \langle\langle z, z \rangle\rangle = -1\} = \{z \in C^{n+1} | \|z\| = -1\}$，用单位圆 $S^1 = \{\lambda \in C | |\lambda| = 1\}$ 作用在 H_1^{2n+1} 上即 $\lambda \cdot z = \lambda z = (\lambda z_0, \lambda z_1, \cdots, \lambda z_n)$ 用 CH^n 表示 H_1^{2n+1} 的商空间 H_1^{2n+1}/S^1，称为 n 维复双曲空间，取复空间 C^{n+1} 上的埃尔米特形 $\langle\langle , \rangle\rangle$，定义为 $\langle\langle z, w \rangle\rangle = -z_0\overline{w}_0 + z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_n\overline{w}_n$，这里 $z = (z_0, z_1, \cdots, z_n), w = (w_0, w_1, \cdots, w_n) \in C^{n+1}$，定义 anti-de Sitter 空间的映射为 $\varpi : H_1^{2n+1} \to CH^n(-4)$，anti-de Sitter 空间在 z 处的切空间定义为 $T_z H_1^{2n+1} = \{(z, u) \in \{z\} \times C^{n+1} | \mathrm{Re}\langle\langle z, u \rangle\rangle = 0\}$ 现在将其分解为与映射 ϖ 有关的水平和垂直的子空间即 $T_z H_1^{2n+1} = \mathcal{H}_z \oplus \mathcal{V}_z$ 其中

$$\mathcal{H}_z = \{(z, u) \in T_z H_1^{2n+1} | \langle\langle z, u \rangle\rangle = 0\}, \mathcal{V}_z = \{(z, \sqrt{-1}az) \in T_z H_1^{2n+1} | a \in R\},$$

取 $CH^n(-4)$ 中的测地球 $B = \mathcal{B}_p(\delta)$ 它的逆映射定义为 $\hat{B} = \varpi^{-1}(\mathcal{B}_p(\delta))$ 切空间定义为 $T_z\hat{B}$，定义从 $T^0B = \{v \in TB | v \perp \xi\}$ 的水平抬升为 $T^0\hat{B} = \{v \in T\hat{B} | v \perp \hat{\xi}\}$

在给出 Legendre 轨道的显示表达式之前先介绍几个重要的引理。

设 $\overline{\nabla}, \tilde{\nabla}$ 分别为 C^{n+1} 和 H_1^{2n+1} 上的黎曼连接，$N = N(z) = (z, z) \in T_z H_1^{2n+1}$ 为单位法向量，则 $\overline{\nabla}, \tilde{\nabla}$ 和 $CH^n(-4)$ 上的黎曼连接 ∇ 之间的关系如下：

引理 1 ([1])：1) 对于 $H_1^{2n+1} \subset C^{n+1}$ 上的任意向量场 X, Y，有 $\tilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \langle X, Y \rangle N$

2) 对于 H_1^{2n+1} 上的任意水平向量场 X, Y，将其视为 $CH^n(-4)$ 上的向量场，$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \langle X, JY \rangle JN$

证明：1) 因为 $\langle Y, N \rangle = 0$ 和 $\overline{\nabla}_X N = X$，所以有 $\overline{\nabla}_X \langle Y, N \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, N \rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X N \rangle = 0$

2) 同理 $\nabla_X Y=\tilde{\nabla}_X Y-\dfrac{\langle\tilde{\nabla}_X Y,JN\rangle}{\langle JN,JN\rangle}JN=\tilde{\nabla}_X Y+\langle\tilde{\nabla}_X Y,JN\rangle JN$，因为 $\langle Y,JN\rangle=0$，可发现

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X\langle Y,JN\rangle&=\langle\tilde{\nabla}_X Y,JN\rangle+\langle Y,\tilde{\nabla}_X JN\rangle=\langle\tilde{\nabla}_X Y,JN\rangle+\langle Y,\bar{\nabla}_X JN-\langle X,JN\rangle N\rangle\\&=\langle\tilde{\nabla}_X Y,JN\rangle+\langle Y,J\bar{\nabla}_X N\rangle=\langle\tilde{\nabla}_X Y,JN\rangle-\langle X,JY\rangle\end{aligned}$$

引理 2 ([5])：设 γ 是 $CH^n(c)$ 中测地球上 Sasakian 磁场 F_k 的 Legendre 轨道，γ 位于某个完全测地线 $M^2(c;C)$ 上，它在 $CH^n(c)$ 里的外在形状是具有测地曲率为 $k_1=\sqrt{k^2+\lambda^2}$，$k_2=|k|\lambda\big/\sqrt{k^2+\lambda^2}$，$k_3=\lambda^2\big/\sqrt{k^2+\lambda^2}$ 和复扭转为 $\tau_{12}=-\tau_{34}=-k\big/\sqrt{k^2+\lambda^2}$，$\tau_{13}=\tau_{24}=0$，$\tau_{14}=-\tau_{23}=\operatorname{sgn}(k)\lambda\big/\sqrt{k^2+\lambda^2}$ 的 4 阶 Killing 螺旋，当 $k=0$ 时，它的外在形状是 $M^n(c;C)$ 里具有测地曲率为 $k_1=\lambda$ 和复扭转为 $\tau_{12}=0$ 的圆证明：由高斯与 Weingarten 公式还有 $\nabla_X\xi=\phi AX$ 可得

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=k\varphi\dot{\gamma}+\lambda N=kJ\dot{\gamma}+\lambda N$$

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\{kJ\dot{\gamma}+\lambda N\}=kJ\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}-\lambda A\dot{\gamma}=-(k^2+\lambda^2)\dot{\gamma}-k\lambda\xi$$

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\xi=\lambda J\dot{\gamma}=\frac{k\lambda}{k^2+\lambda^2}(kJ\dot{\gamma}+\lambda N)+\frac{\lambda^2}{k^2+\lambda^2}(\lambda J\dot{\gamma}-kN)$$

所以当 $k=0$ 时，γ 的外在形状是具有测地曲率为 λ 的圆，它的 Frenet 标架为 $\{\dot{\gamma},N\}$，它位于某个常截面曲率为 $c/4$ 的完全测地实空间形 $M^2(c/4;R)$ 上，当 $k\neq0$，可看到 $k_1=\sqrt{k^2+\lambda^2}$，$k_2=|k|\lambda/k_1$，$k_3=\lambda^2/k_1$ 是正数，设 $Y_2=\dfrac{1}{k_1}(kJ\dot{\gamma}+\lambda N)$，$Y_3=-\operatorname{sgn}(k)\xi$，$Y_4=-\dfrac{\operatorname{sgn}(k)}{k_1}(\lambda J\dot{\gamma}-kN)$ 其中 $\operatorname{sgn}(k)$ 表示 k 的符号，所以有 $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=k_1Y_2$，$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}Y_2=-k_1\dot{\gamma}+k_2Y_3$，$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}Y_3=-k_2Y_2+k_3Y_4$，$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}Y_4=-k_3Y_3$，因此可发现 γ 的外在形状是 4 阶螺旋，且位于某个完全测地 $M^2(c;C)$ 上。

3. Sasakian 磁场的 Legendre 轨道方程

在本节主要是通过引理 1 和引理 2 给出 $CH^n(-4)$ 中测地球上的 Legendre 轨道方程的显示表达式。设 γ 是 $CH^n(-4)$ 中测地球上 Sasakian 磁场的 Legendre 轨道，由引理 1 中黎曼连接的关系有 $\bar{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-\langle\langle X,\bar{J}Y\rangle\rangle\overline{JN}+\langle\langle X,Y\rangle\rangle\bar{N}$，$\bar{N}$ 为 H_1^{2n+1} 上的单位外法向量，且 $\langle\langle\bar{N},\bar{N}\rangle\rangle=-1$，$\bar{J}$ 为 C^{n+1} 上的复结构，对轨道 γ 进行水平抬升 $\hat{\gamma}\in H_1^{2n+1}$ 并将其视为 C^{n+1} 中的曲线。由黎曼连接的关系和引理 2，知 $\hat{\gamma}$ 满足

$$\begin{cases}\bar{\nabla}_{\dot{\hat{\gamma}}}\dot{\hat{\gamma}}=\sqrt{k^2+\cot^2 r}\,Y_2-\hat{\gamma},\\ \bar{\nabla}_{\dot{\hat{\gamma}}}Y_2=-\sqrt{k^2+\cot^2 r}\,\dot{\hat{\gamma}}+\dfrac{|k|\cot r}{\sqrt{k^2+\cot^2 r}}Y_3-\dfrac{k}{\sqrt{k^2+\cot^2 r}}\bar{J}\hat{\gamma},\end{cases}$$

这里 Y_2,Y_3 是由引理 2 导出的水平向量场，因此可知 $\hat{\gamma}$ 满足常微分方程

$$\hat{\gamma}'''-ik\hat{\gamma}''+(\cot^2 r-1)\hat{\gamma}'=0$$

解此微分方程有

$$\hat{\gamma}(t)=A\exp\left(\sqrt{-1}\left(k+\sqrt{k^2+\left(4/\sinh^2 r\right)}\right)t/2\right)+B\exp\left(\sqrt{-1}\left(k-\sqrt{k^2+\left(4/\sinh^2 r\right)}\right)t/2\right)+C$$

$A,B,C\in C^{n+1}$，考虑初值条件 $\hat{\gamma}(0)=z\in\hat{B}\subset C^{n+1}$，$\dot{\hat{\gamma}}(0)=(z,v)\in\{z\}\times C^{n+1}$ 和 $N_{\varpi(z)}=(z,u)\in\{z\}\times C^{n+1}$，则

$A,B,C\in C^{n+1}$ 有如下形式

$$A=\frac{\sinh r}{2\sqrt{k^2\sinh^2 r+4}}\left\{\left(k\sinh r-\sqrt{k^2\sinh^2 r+4}\right)\left(\sinh rz+\cosh ru\right)-2iv\right\},$$

$$B=\frac{\sinh r}{2\sqrt{k^2\sinh^2 r+4}}\left\{-\left(k\sinh r+\sqrt{k^2\sinh^2 r+4}\right)\left(\sinh rz+\cosh ru\right)+2iv\right\},$$

$$C=\cosh^2 rz+\left(\sinh r\cosh r\right)u\ .$$

接下来在第四节中研究 $U^0\mathcal{B}_p(\delta)$ 上的 Legendre 磁流。

4. Sasakian 磁流

本节证明了复双曲空间中测地球上 Sasakian 磁场 F_k 的 Legendre 轨道流与 Legendre 测地流是彼此光滑一致的，现在给出本文的主要定理。

定理 1：设 $\mathcal{B}_p(\delta)$ 是复双曲空间中半径为 δ 的测地球，则 Sasakian 磁场 F_k 的 Legendre 轨道流 $F_k^0\varphi_t$ 与 Legendre 测地流 φ_t^0 彼此光滑共轭，即存在微分同胚 f_k 使得

$$F_k^0\varphi_t=f_k^{-1}\circ\varphi^0_{\sqrt{k^2\sinh^2 r+4t/2}}\circ f_k$$

证明：一般来说我们只关注 $c=-4$ 这种情况，首先注意到在 $UCH^n(-4)$ 上的 Legendre 测地流 φ_t 可以用矩阵表示为

$$\varphi_t\left(\mathrm{d}\pi\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}\right)=\mathrm{d}\pi\left(A_0(t)\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}\right),$$

其中

$$A_0(t)=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{t}{\sinh r}\cdot I & \sin\dfrac{t}{\sinh r}\cdot I\\ -\sin\dfrac{t}{\sinh r}\cdot I & \cos\dfrac{t}{\sinh r}\cdot I\end{pmatrix}\in Mat\left(2(n+1);C\right),$$

这里 $\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}$ 表示 $(z\quad u)$ 的转置，$I\in Mat(n+1,C)$ 表示单位矩阵，定义 $A_k(t)\in Mat\left(2(n+1),C\right)$，定义两个函数

$$\mathcal{G}(t)=\cos\frac{1}{2}\sqrt{k^2+\frac{4}{\sinh^2 r}}t,\ \mathcal{H}(t)=\sin\frac{1}{2}\sqrt{k^2+\frac{4}{\sinh^2 r}}t\ ,$$

$$A_k(t)=\mathcal{G}(t)\cdot\begin{pmatrix}I & O\\ O & I\end{pmatrix}+\mathcal{H}(t)\cdot\frac{\sinh r}{\sqrt{k^2\sinh^2 r+4t}}\cdot\begin{pmatrix}-kiI & 2I\\ 2I & kiI\end{pmatrix}$$

这里 $O\in Mat(n+1,C)$ 表示零矩阵，因为 Sasakian 磁场的 Legendre 轨道流 $F_k^0\varphi_t$ 可以表示为

$$F_k^0\varphi_t\left(\mathrm{d}\pi\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}\right)=\mathrm{d}\pi\left(\mathrm{e}^{-ikt/2}\cdot A_k(t)\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}\right)=\mathrm{d}\pi\left(A_k(t)\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}\right),$$

I_n 表示 $n\times n$ 阶单位矩阵

设矩阵 $P_k(t)=\begin{pmatrix}p_{11}^{(k)}I_n & p_{12}^{(k)}I_n\\ p_{21}^{(k)}I_n & p_{22}^{(k)}I_n\end{pmatrix}$ 其中 $P_{11}^{(k)},P_{12}^{(k)},P_{21}^{(k)},P_{22}^{(k)}$ 向量取值如下

$$P_{11}^{(k)} = \left(-2i \Big/ \sqrt{-4 + \left(\sqrt{k^2 \sinh^2 r + 4} + k \sinh r \right)^2} \right),$$

$$P_{12}^{(k)} = \left(2i \Big/ \sqrt{-4 + \left(\sqrt{k^2 \sinh^2 r + 4} - k \sinh r \right)^2} \right),$$

$$P_{21}^{(k)} = \left(\sqrt{k^2 \sinh^2 r + 4} + k \sinh r \Big/ \sqrt{-4 + \left(\sqrt{k^2 \sinh^2 r + 4} + k \sinh r \right)^2} \right),$$

$$P_{22}^{(k)} = \left(\sqrt{k^2 \sinh^2 r + 4} - k \sinh r \Big/ \sqrt{-4 + \left(\sqrt{k^2 \sinh^2 r + 4} - k \sinh r \right)^2} \right),$$

得到 $P_k^{-1} \cdot A_k(t) \cdot P_k = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_k + i\mathcal{H}_k & O \\ O & \mathcal{G}_k - i\mathcal{H}_k \end{pmatrix}$

所以有 $Q_k^{-1} \cdot A_k(t) \cdot Q_k = A_0\left(\sqrt{k^2 \sinh^2 r + 4}\, t/2\right)$，$Q_k = P_k \cdot P_0^{-1}$ 由于 $A_0(t)$ 对应于复双曲空间中 Legendre 测地流 φ_t 且 Q_k 作用于水平子束 $\mathcal{H}_{\mathcal{Z}}$ 上且与 $S^1 - fiber$ 作用可交换，所以它在 $UCH^n(-4)$ 上诱导了一个微分同胚映射 f_k 使得

$$F_k^0 \varphi_t = f_k^{-1} \circ \varphi^0_{\sqrt{k^2 \sinh^2 r + 4}\, t/2} \circ f_k$$

5. 总结

本文是通过建立 Sasakian 磁场与 Kähler 磁场之间的对应关系，利用代数方法实现在复双曲空间中测地球面上 Sasakian 磁场中建立 Legendre 轨道流与 Legendre 测地流之间的合同关系。通过本文的研究不仅完善了实超曲面的理论体系，并且为下一步研究四元 Kähler 流形中的实超曲面提供了新的思路。

参考文献

[1] Adachi, T. (1995) Kähler Magnetic Flows on a Manifold of Constant Holomorphic Sectional Curvature. *Tokyo Journal of Mathematics*, **18**, 473-483. https://doi.org/10.3836/tjm/1270043477

[2] Adachi, T. and Maeda, S. (2020) Length Spectrum of Complete Simply Connected Sasakian Space Forms. *Differential Geometry and its Applications*, **70**, Article No. 101625. https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2020.101625

[3] Cabrerizo, J.L., Fernandez, M. and Gomez, J.S. (2009) The Contact Magnetic Flow in 3D Sasakian Manifolds. *Journal of Physics A*: *Mathematical and Theoretical*, **42**, 195-201. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/19/195201

[4] Druta-Romaniuc, S.L., Inoguchi, J., Munteanun, M.I. and Nistor, A.I. (2015) Magnetic Curves in Sasakian Manifolds. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **22**, 428-447. https://doi.org/10.1080/14029251.2015.1079426

[5] Adachi, T. (2008) Trajectories on Geodesic Sphere in a Non-Flat Complex Space Form. *Journal of Geometry*, **90**, 1-29. https://doi.org/10.1007/s00022-008-1941-3

[6] Sunada, T. (1993) Magnetic Flows on a Riemann Surface. *Proceedings of KAIST Math*, *Workshop*, **8**, 93-108.

[7] 丘成桐, 孙理察. 微分几何讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[8] Ikawa, O. (2004) Motion of Electric Charged Particles in Homogeneous Kähler Manifolds and Homogeneous Sasakian Manifolds. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **14**, 283-302.

[9] Bao, T. and Adachi, T. (2009) Circlular Trajectories on Real Hypersurfaces in a Nonflat Complex Space Form. *Journal of Geometry*, **96**, 41-55. https://doi.org/10.1007/s00022-010-0032-4