Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2023, 13(6), 7789-7796
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2023.136761

直觉模糊集的减法和除法运算的新定义

马　虹[1]，谢小军[2]

[1]广东金融学院金融数学与统计学院，广东 广州
[2]广州工商学院通识教育学院，广东 广州

收稿日期：2023年11月13日；录用日期：2023年12月22日；发布日期：2023年12月29日

摘　要

模糊集合的概念自提出以来，其扩展形式不断得到丰富，其中最为经典的是直觉模糊集和区间直觉模糊集两个概念，后续直觉模糊集和区间直觉模糊集理论被广泛应用于处理决策信息不确定的问题。我们对直觉模糊集的关系和基本运算进行了梳理，发现现有的研究成果中没有定义直觉模糊集的减法和除法运算。因此，我们通过基于直觉模糊集已有的基本运算规则定义了减法和除法两种新运算，证明了基于直觉模糊数的减法和除法是封闭的，并进一步将直觉模糊集上的基本运算规则推广到区间直觉模糊集和区间直觉模糊数上，证明了基于区间直觉模糊数的和、差、积、商运算是封闭的。本文的最重要的贡献是使得直觉模糊集和区间直觉模糊集有了完整的四则运算，从而丰富了其理论基础。

关键词

模糊数学，直觉模糊集，区间直觉模糊集，运算规则

A New Definition of Subtraction and Division Operations for Intuitionistic Fuzzy Sets

Hong Ma[1], Xiaojun Xie[2]

[1]School of Financial Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong
[2]School of General Education, Guangzhou College of Technology and Business, Guangzhou Guangdong

Received: Nov. 13th, 2023; accepted: Dec. 22nd, 2023; published: Dec. 29th, 2023

Abstract

Since the concept of fuzzy sets was proposed, its extended form has been continuously enriched, among which the most classical ones are the concepts of intuitionistic fuzzy sets and interval intuitionistic fuzzy sets, and the subsequent theories of intuitionistic fuzzy sets and interval intuitionistic fuzzy sets have been widely used to deal with the problems of uncertainty of decision-

文章引用: 马虹, 谢小军. 直觉模糊集的减法和除法运算的新定义[J]. 运筹与模糊学, 2023, 13(6): 7789-7796.
DOI: 10.12677/orf.2023.136761

making information. We have sorted out the relations and basic operations of intuitionistic fuzzy sets and found that the subtraction and division operations of intuitionistic fuzzy sets are not defined in the existing research results. Therefore, we prove that subtraction and division based on intuitionistic fuzzy numbers are closed by defining two new operations, subtraction and division, based on the existing basic operation rules of intuitionistic fuzzy sets, and further extend the basic operation rules on intuitionistic fuzzy sets to interval intuitionistic fuzzy sets and interval intuitionistic fuzzy numbers, and prove that the sum, difference, product, and quotient operations based on interval intuitionistic fuzzy numbers are closed. The most important contribution of this paper is to make intuitionistic fuzzy sets and interval intuitionistic fuzzy sets have complete four-rule operations, which enriches their theoretical foundation.

Keywords

Fuzzy Mathematics, Intuitionistic Fuzzy Sets, Interval Intuitionistic Fuzzy Sets, Arithmetic Rules

1. 引言

模糊数学是针对模糊性现象的一门数学分支[1]，基于模糊集合论。它提供了一种新方法来处理不确定性和不精确性问题，有效描述人脑处理模糊信息的思维过程。这一学科适用于“硬”和“软”科学，并已应用于模糊控制[2]、模糊决策[3] [4] [5]、模糊识别[6]、模糊聚类分析[7]等领域。传统的模糊集理论在面对社会发展中更多呈现模糊性和不确定性的事物特征时表现不足，直觉模糊集理论[8]因此产生，强调事物的隶属度、非隶属度和犹豫度，更有效地处理不确定信息和模糊信息。Atanassov 和 Gargov [9]扩展了直觉模糊集的概念，提出了区间直觉模糊集，其中隶属度和非隶属度以区间数形式表示，其相关理论已在环境治理[10]、水利工程[11] [12]、供应商选择[13] [14]和风险评估[15] [16] [17]等领域得到广泛应用，因其实用性而备受关注。

文章主要通过阐述直觉模糊集与区间直觉模糊集的基本概念、基本运算规则等内容，发现直觉模糊数与区间直觉模糊数缺少减法和除法运算规则。针对发现的问题，文章给出了一种直觉模糊数和区间直觉模糊数的减法和除法运算定义，并证明了基于直觉模糊数和区间直觉模糊数的减法和除法是封闭的。最后，通过两个具体计算例子对直觉模糊数和区间直觉模糊数的基本运算规则进行了演示。

2. 直觉模糊集的理论及运算规则

2.1. 直觉模糊集的理论

定义 1 [8] 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一个非空集合，则下列 $\tilde{A}$ 为定义在 X 上的直觉模糊集：

$$\tilde{A}=\{(x_i,\mu_{\tilde{A}}(x_i),\nu_{\tilde{A}}(x_i))|x_i\in X\} \tag{1}$$

其中 $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$、$\nu_{\tilde{A}}(x_i)$ 分别表示元素 x_i 属于 X 的隶属度和非隶属度，且 $\mu_{\tilde{A}}(x_i)\in[0,1]$，$\nu_{\tilde{A}}(x_i)\in[0,1]$，满足 $0\le\mu_{\tilde{A}}(x_i)+\nu_{\tilde{A}}(x_i)\le 1$，$\forall x_i\in X$，元素 x 属于 X 的犹豫度可表示为 $\pi_{\tilde{A}}(x_i)$，且满足 $\pi_{\tilde{A}}(x_i)=1-\mu_{\tilde{A}}(x_i)-\nu_{\tilde{A}}(x_i)$，$\forall x_i\in X$。当 $\pi_{\tilde{A}}(x_i)=0$ 时，则 $\tilde{A}$ 退化为 Zadeh 的模糊集。在文献[8]中，称下列为直觉模糊数：

$$\tilde{\alpha}=(\mu,\nu) \tag{2}$$

其中 $\mu,\nu\in[0,1]$ 且 $0\le\mu+\nu\le 1$， $\pi=1-\mu-\nu$ 。

2.2. 直觉模糊集的运算规则

在模糊集运算规则的基础上，Atanassov [8]定义了以下运算规则：

定义 2 设 $\tilde{A}=\{(x_i,\mu_{\tilde{A}}(x_i),\nu_{\tilde{A}}(x_i))|x_i\in X\}$， $\tilde{B}=\{(x_i,\mu_{\tilde{B}}(x_i),\nu_{\tilde{B}}(x_i))|x_i\in X\}$ 为任意两个直觉模糊集，定义以下运算规则：

1) $\bar{\tilde{A}}=\{(x_i,\ \nu_{\tilde{A}}(x_i),\mu_{\tilde{A}}(x_i))|x_i\in X\}$；

2) $\tilde{A}+\tilde{B}=\{(x_i,\ \mu_{\tilde{A}}(x_i)+\mu_{\tilde{B}}(x_i)-\mu_{\tilde{A}}(x_i)\mu_{\tilde{B}}(x_i),\nu_{\tilde{A}}(x_i)\nu_{\tilde{B}}(x_i))|x_i\in X\}$；

3) $\tilde{A}\cdot\tilde{B}=\{(x_i,\ \mu_{\tilde{A}}(x_i)\mu_{\tilde{B}}(x_i),\nu_{\tilde{A}}(x_i)+\nu_{\tilde{B}}(x_i)-\nu_{\tilde{A}}(x_i)\nu_{\tilde{B}}(x_i))|x_i\in X\}$；

4) $\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{(x_i,\max\{\mu_{\tilde{A}}(x_i),\mu_{\tilde{B}}(x_i)\},\min\{\nu_{\tilde{A}}(x_i),\nu_{\tilde{B}}(x_i)\})|x_i\in X\}$；

5) $\tilde{A}\cap\tilde{B}=\{(x_i,\min\{\mu_{\tilde{A}}(x_i),\mu_{\tilde{B}}(x_i)\},\max\{\nu_{\tilde{A}}(x_i),\nu_{\tilde{B}}(x_i)\})|x_i\in X\}$；

6) $\lambda\tilde{A}=\{(x_i,\ 1-(1-\mu_{\tilde{A}}(x_i))^{\lambda},(\nu_{\tilde{A}}(x_i))^{\lambda})|x_i\in X\},\lambda>0$；

7) $\tilde{A}^{\lambda}=\{(x_i,(\mu_{\tilde{A}}(x_i))^{\lambda},1-(1-\nu_{\tilde{A}}(x_i))^{\lambda})|x_i\in X\},\lambda>0$ 。

类似上述运算规则，可以定义以下直觉模糊数的运算规则：

定义 3 [8] 设 $\tilde{\alpha}=(\mu_{\tilde{\alpha}},\nu_{\tilde{\alpha}})$， $\tilde{\beta}=(\mu_{\tilde{\beta}},\nu_{\tilde{\beta}})$ 为任意两个直觉模糊数，定义以下运算规则：

1) $\bar{\tilde{\alpha}}=(\nu_{\tilde{\alpha}},\mu_{\tilde{\alpha}})$；

2) $\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta}=(\mu_{\tilde{\alpha}}+\mu_{\tilde{\beta}}-\mu_{\tilde{\alpha}}\mu_{\tilde{\beta}},\nu_{\tilde{\alpha}}\nu_{\tilde{\beta}})$；

3) $\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\beta}=(\mu_{\tilde{\alpha}}\mu_{\tilde{\beta}},\nu_{\tilde{\alpha}}+\nu_{\tilde{\beta}}-\nu_{\tilde{\alpha}}\nu_{\tilde{\beta}})$；

4) $\tilde{\alpha}\cup\tilde{\beta}=(\max\{\mu_{\tilde{\alpha}},\mu_{\tilde{\beta}}\},\min\{\nu_{\tilde{\alpha}},\nu_{\tilde{\beta}}\})$；

5) $\tilde{\alpha}\cap\tilde{\beta}=(\min\{\mu_{\tilde{\alpha}},\mu_{\tilde{\beta}}\},\max\{\nu_{\tilde{\alpha}},\nu_{\tilde{\beta}}\})$；

6) $\lambda\tilde{\alpha}=(1-(1-\mu_{\tilde{\alpha}})^{\lambda},(\nu_{\tilde{\alpha}})^{\lambda}),\lambda>0$；

7) $\tilde{\alpha}^{\lambda}=((\mu_{\tilde{\alpha}})^{\lambda},1-(1-\nu_{\tilde{\alpha}})^{\lambda}),\lambda>0$ 。

上述运算规则为直觉模糊数方面的应用奠定了良好的理论基础。且式(1)至(7)的运算结果仍为直觉模糊数。

2.3. 直觉模糊集的减法和除法运算规则定义

我们尝试通过类比于实数集合中的减法和除法的运算规则给出直觉模糊集减法和除法的定义。

定义 4 设 $\tilde{A}=\{(x_i,\mu_{\tilde{A}}(x_i),\nu_{\tilde{A}}(x_i))|x_i\in X\}$， $\tilde{B}=\{(x_i,\mu_{\tilde{B}}(x_i),\nu_{\tilde{B}}(x_i))|x_i\in X\}$ 为任意两个直觉模糊集，定义以下减法和除法运算规则：

1) $\tilde{A}-\tilde{B}=\tilde{A}+\bar{\tilde{B}}=\{(x_i,\ \mu_{\tilde{A}}(x_i)+\nu_{\tilde{B}}(x_i)-\mu_{\tilde{A}}(x_i)\nu_{\tilde{B}}(x_i),\nu_{\tilde{A}}(x_i)\mu_{\tilde{B}}(x_i))|x_i\in X\}$；

2) $\tilde{A}\div\tilde{B}=\tilde{A}\cdot\bar{\tilde{B}}=\{(x_i,\ \mu_{\tilde{A}}(x_i)\nu_{\tilde{B}}(x_i),\nu_{\tilde{A}}(x_i)+\mu_{\tilde{B}}(x_i)-\nu_{\tilde{A}}(x_i)\mu_{\tilde{B}}(x_i))|x_i\in X\}$ 。

类似上述运算规则，定义直觉模糊数相反数、减法和除法运算规则：

定义 5 设 $\tilde{\alpha}=(\mu_{\tilde{\alpha}},\nu_{\tilde{\alpha}})$， $\tilde{\beta}=(\mu_{\tilde{\beta}},\nu_{\tilde{\beta}})$ 为任意两个直觉模糊数，定义以下运算规则：

1) 定义 $-\tilde{\alpha}$ 称为 $\tilde{\alpha}$ 的“相反数”， $-\tilde{\alpha}=\bar{\tilde{\alpha}}=(\nu_{\tilde{\alpha}},\mu_{\tilde{\alpha}})$；

2) $\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}=\tilde{\alpha}+(-\tilde{\beta})=\tilde{\alpha}+\bar{\tilde{\beta}}=(\mu_{\tilde{\alpha}}+\nu_{\tilde{\beta}}-\mu_{\tilde{\alpha}}\nu_{\tilde{\beta}},\nu_{\tilde{\alpha}}\mu_{\tilde{\beta}})$；

3) $\tilde{\alpha}\div\tilde{\beta}=\tilde{\alpha}\otimes\bar{\tilde{\beta}}=(\mu_{\tilde{\alpha}}\nu_{\tilde{\beta}},\nu_{\tilde{\alpha}}+\mu_{\tilde{\beta}}-\nu_{\tilde{\alpha}}\mu_{\tilde{\beta}})$。

定理 1 设 $\tilde{\alpha}=(\mu_{\tilde{\alpha}},\nu_{\tilde{\alpha}})$，$\tilde{\beta}=(\mu_{\tilde{\beta}},\nu_{\tilde{\beta}})$ 为任意两个直觉模糊数，设 $\tilde{\alpha}_1=-\tilde{\alpha}$， $\tilde{\alpha}_2=\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}$， $\tilde{\alpha}_3=\tilde{\alpha}\div\tilde{\beta}$，则 $\tilde{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 均为直觉模糊数。

证明： 因为 $\tilde{\alpha}=(\mu_{\tilde{\alpha}},\nu_{\tilde{\alpha}})$，$\tilde{\beta}=(\mu_{\tilde{\beta}},\nu_{\tilde{\beta}})$ 为直觉模糊数，则有 $\mu_{\tilde{\alpha}},\nu_{\tilde{\alpha}},\mu_{\tilde{\beta}},\nu_{\tilde{\beta}}\in[0,1]$，且 $\mu_{\tilde{\alpha}}+\nu_{\tilde{\alpha}}\le 1$，$\mu_{\tilde{\beta}}+\nu_{\tilde{\beta}}\le 1$。

根据上述定义 5 中运算规则(1) $\tilde{\alpha}_1=-\tilde{\alpha}=(\nu_{\tilde{\alpha}},\mu_{\tilde{\alpha}})$，显然 $\tilde{\alpha}_1$ 仍为直觉模糊数。

根据上述定义 5 中运算规则(2)可知 $\mu_{\tilde{\alpha}_2}=\mu_{\tilde{\alpha}}+\nu_{\tilde{\beta}}-\mu_{\tilde{\alpha}}\nu_{\tilde{\beta}}=\mu_{\tilde{\alpha}}(1-\nu_{\tilde{\beta}})+\nu_{\tilde{\beta}}\ge 0$， $\nu_{\tilde{\alpha}_2}=\nu_{\tilde{\alpha}}\mu_{\tilde{\beta}}\ge 0$，$\mu_{\tilde{\alpha}_2}+\nu_{\tilde{\alpha}_2}=\mu_{\tilde{\alpha}}+\nu_{\tilde{\beta}}-\mu_{\tilde{\alpha}}\nu_{\tilde{\beta}}+\nu_{\tilde{\alpha}}\mu_{\tilde{\beta}}\le\mu_{\tilde{\alpha}}+\nu_{\tilde{\beta}}-\mu_{\tilde{\alpha}}\nu_{\tilde{\beta}}+(1-\mu_{\tilde{\alpha}})(1-\nu_{\tilde{\beta}})=1$，所以 $\tilde{\alpha}_2$ 为直觉模糊数。

根据上述定义 5 中运算规则(3)可知 $\mu_{\tilde{\alpha}_3}=\mu_{\tilde{\alpha}}\nu_{\tilde{\beta}}\ge 0$， $\nu_{\tilde{\alpha}_3}=\nu_{\tilde{\alpha}}+(1-\nu_{\tilde{\alpha}})\mu_{\tilde{\beta}}\ge 0$，$\mu_{\tilde{\alpha}_3}+\nu_{\tilde{\alpha}_3}=\mu_{\tilde{\alpha}}\nu_{\tilde{\beta}}+\nu_{\tilde{\alpha}}+\mu_{\tilde{\beta}}-\nu_{\tilde{\alpha}}\mu_{\tilde{\beta}}\le\nu_{\tilde{\alpha}}+\mu_{\tilde{\beta}}-\nu_{\tilde{\alpha}}\mu_{\tilde{\beta}}+(1-\nu_{\tilde{\alpha}})(1-\mu_{\tilde{\beta}})=1$，所以 $\tilde{\alpha}_3$ 为直觉模糊数。

3. 区间直觉模糊集的理论及运算规则

3.1. 直觉模糊集的理论

Atanassov 和 Gargov [9]将直觉模糊集进一步拓展到区间直觉模糊集，区间直觉模糊集的隶属度和非隶属度其值是一个区间而不是一个精确的数，具体定义如下：

定义 6 [9] 设 X 是一个非空集合，则称下列 $\tilde{A}$ 为区间直觉模糊集：

$$\tilde{A}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}}(x),\nu_{\tilde{A}}(x)\right)\middle|x\in X\right\}\tag{3}$$

其中 $\mu_{\tilde{A}}(x)$、$\nu_{\tilde{A}}(x)$ 分别表示元素 x 属于 X 的隶属度和非隶属度。用区间数表示为：$\mu_{\tilde{A}}(x)=\left[\mu_{\tilde{A}}^{l}(x),\mu_{\tilde{A}}^{u}(x)\right]\subseteq[0,1]$， $\nu_{\tilde{A}}(x)=\left[\nu_{\tilde{A}}^{l}(x),\nu_{\tilde{A}}^{u}(x)\right]\subseteq[0,1]$，其中 $\mu_{\tilde{A}}^{l}(x)=\inf\mu_{\tilde{A}}(x)$，$\mu_{\tilde{A}}^{u}(x)=\sup\mu_{\tilde{A}}(x)$， $\nu_{\tilde{A}}^{l}(x)=\inf\nu_{\tilde{A}}(x)$， $\nu_{\tilde{A}}^{u}(x)=\sup\nu_{\tilde{A}}(x)$，且满足 $\mu_{\tilde{A}}^{u}(x)+\nu_{\tilde{A}}^{u}(x)\le 1$，元素 x 属于 X 的犹豫度可表示为： $\pi_{\tilde{A}}(x)=\left[\pi_{\tilde{A}}^{l}(x),\pi_{\tilde{A}}^{u}(x)\right]$ 且满足 $\pi_{\tilde{A}}^{l}(x)=1-\mu_{\tilde{A}}^{u}(x)-\nu_{\tilde{A}}^{u}(x)$， $\pi_{\tilde{A}}^{u}(x)=1-\mu_{\tilde{A}}^{l}(x)-\nu_{\tilde{A}}^{l}(x)$。当 $\mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{A}}^{l}(x)=\mu_{\tilde{A}}^{u}(x)$，$\nu_{\tilde{A}}(x)=\nu_{\tilde{A}}^{l}(x)=\nu_{\tilde{A}}^{u}(x)$ 时，即退化为直觉模糊集。在文献[9]中，称下列为区间直觉模糊数：

$$\tilde{\alpha}=\left(\left[\mu^{l},\mu^{u}\right],\left[\nu^{l},\nu^{u}\right]\right)\tag{4}$$

其中 $\left[\mu^{l},\mu^{u}\right],\left[\nu^{l},\nu^{u}\right]\subseteq[0,1]$ 且 $0\le\mu^{u}+\nu^{u}\le 1$， $\pi^{l}=1-\mu^{u}-\nu^{u}$， $\pi^{u}=1-\mu^{l}-\nu^{l}$。

3.2. 区间直觉模糊集的运算规则

在直觉模糊集运算规则的基础上，进一步定义了以下关于区间直觉模糊集的运算规则[9]：

定义 7 设 $\tilde{A}=\left\{\left(x_i,\left[\mu_{\tilde{A}}^{l}(x),\mu_{\tilde{A}}^{u}(x)\right],\left[\nu_{\tilde{A}}^{l}(x),\nu_{\tilde{A}}^{u}(x)\right]\right)\middle|x_i\in X\right\}$，$\tilde{B}=\left\{\left(x_i,\left[\mu_{\tilde{B}}^{l}(x),\mu_{\tilde{B}}^{u}(x)\right],\left[\nu_{\tilde{B}}^{l}(x),\nu_{\tilde{B}}^{u}(x)\right]\right)\middle|x_i\in X\right\}$ 为任意两个区间直觉模糊集，定义以下运算规则：

1) $\bar{\tilde{A}}=\left\{\left(x_i,\left[\nu_{\tilde{A}}^{l}(x),\nu_{\tilde{A}}^{u}(x)\right],\left[\mu_{\tilde{A}}^{l}(x),\mu_{\tilde{A}}^{u}(x)\right]\right)\middle|x_i\in X\right\}$；

2) $\tilde{A}+\tilde{B}=\left\{\begin{pmatrix}x_i,\left[\mu_{\tilde{A}}^{l}(x)+\mu_{\tilde{B}}^{l}(x)-\mu_{\tilde{A}}^{l}(x)\mu_{\tilde{B}}^{l}(x),\mu_{\tilde{A}}^{u}(x)+\mu_{\tilde{B}}^{u}(x)-\mu_{\tilde{A}}^{u}(x)\mu_{\tilde{B}}^{u}(x)\right],\\ \left[\nu_{\tilde{A}}^{l}(x)\nu_{\tilde{B}}^{l}(x),\nu_{\tilde{A}}^{u}(x)\nu_{\tilde{B}}^{u}(x)\right]\end{pmatrix}\middle|x_i\in X\right\}$；

3) $\tilde{A}\cdot\tilde{B}=\left\{\left(\begin{array}{l}x_i,\left[\mu_{\tilde{A}}^l(x)\mu_{\tilde{B}}^l(x),\mu_{\tilde{A}}^u(x)\mu_{\tilde{B}}^u(x)\right],\\ \left[\nu_{\tilde{A}}^l(x)+\nu_{\tilde{B}}^l(x)-\nu_{\tilde{A}}^l(x)\nu_{\tilde{B}}^l(x),\nu_{\tilde{A}}^u(x)+\nu_{\tilde{B}}^u(x)-\nu_{\tilde{A}}^u(x)\nu_{\tilde{B}}^u(x)\right]\end{array}\right)\middle|x_i\in X\right\}$；

4) $\tilde{A}\cup\tilde{B}=\left\{\left(\begin{array}{l}x_i,\left[\max\left\{\mu_{\tilde{A}}^l(x),\mu_{\tilde{B}}^l(x)\right\},\max\left\{\mu_{\tilde{A}}^u(x),\mu_{\tilde{B}}^u(x)\right\}\right],\\ \left[\min\left\{\nu_{\tilde{A}}^l(x),\nu_{\tilde{B}}^l(x)\right\},\min\left\{\nu_{\tilde{A}}^u(x),\nu_{\tilde{B}}^u(x)\right\}\right]\end{array}\right)\middle|x_i\in X\right\}$；

5) $\tilde{A}\cap\tilde{B}=\left\{\left(\begin{array}{l}x_i,\left[\min\left\{\mu_{\tilde{A}}^l(x),\mu_{\tilde{B}}^l(x)\right\},\min\left\{\mu_{\tilde{A}}^u(x),\mu_{\tilde{B}}^u(x)\right\}\right],\\ \left[\max\left\{\nu_{\tilde{A}}^l(x),\nu_{\tilde{B}}^l(x)\right\},\max\left\{\nu_{\tilde{A}}^u(x),\nu_{\tilde{B}}^u(x)\right\}\right]\end{array}\right)\middle|x_i\in X\right\}$；

6) $\lambda\tilde{A}=\left\{\left(x_i,\left[1-\left(1-\mu_{\tilde{A}}^l(x)\right)^\lambda,1-\left(1-\mu_{\tilde{A}}^u(x)\right)^\lambda\right],\left[\left(\nu_{\tilde{A}}^l(x)\right)^\lambda,\left(\nu_{\tilde{A}}^u(x)\right)^\lambda\right]\right)\middle|x_i\in X\right\},\lambda>0$；

7) $\tilde{A}^\lambda=\left\{\left(x_i,\left[\left(\mu_{\tilde{A}}^l(x)\right)^\lambda,\left(\mu_{\tilde{A}}^u(x)\right)^\lambda\right],\left[1-\left(1-\nu_{\tilde{A}}^l(x)\right)^\lambda,1-\left(1-\nu_{\tilde{A}}^u(x)\right)^\lambda\right]\right)\middle|x_i\in X\right\},\lambda>0$。

类似上述运算规则，可以定义以下区间直觉模糊数的运算规则：

定义 8 [9] 设 $\tilde{\alpha}_1=\left(\left[\mu_1^l,\mu_1^u\right],\left[\nu_1^l,\nu_1^u\right]\right)$， $\tilde{\alpha}_2=\left(\left[\mu_2^l,\mu_2^u\right],\left[\nu_2^l,\nu_2^u\right]\right)$为任意两个区间直觉模糊数，定义以下运算规则：

1) $\bar{\tilde{\alpha}}_1=\left(\left[\nu_1^l,\nu_1^u\right],\left[\mu_1^l,\mu_1^u\right]\right)$；

2) $\tilde{\alpha}_1\oplus\tilde{\alpha}_2=\left(\left[\mu_1^l+\mu_2^l-\mu_1^l\mu_2^l,\mu_1^u+\mu_2^u-\mu_1^u\mu_2^u\right],\left[\nu_1^l\nu_2^l,\nu_1^u\nu_2^u\right]\right)$；

3) $\tilde{\alpha}_1\otimes\tilde{\alpha}_2=\left(\left[\mu_1^l\mu_2^l,\mu_1^u\mu_2^u\right],\left[\nu_1^l+\nu_2^l-\nu_1^l\nu_2^l,\nu_1^u+\nu_2^u-\nu_1^u\nu_2^u\right]\right)$；

4) $\tilde{\alpha}_1\cup\tilde{\alpha}_2=\left(\left[\max\left\{\mu_1^l,\mu_2^l\right\},\max\left\{\mu_1^u,\mu_2^u\right\}\right],\left[\min\left\{\nu_1^l,\nu_2^l\right\},\min\left\{\nu_1^u,\nu_2^u\right\}\right]\right)$；

5) $\tilde{\alpha}_1\cap\tilde{\alpha}_2=\left(\left[\min\left\{\mu_1^l,\mu_2^l\right\},\min\left\{\mu_1^u,\mu_2^u\right\}\right],\left[\max\left\{\nu_1^l,\nu_2^l\right\},\max\left\{\nu_1^u,\nu_2^u\right\}\right]\right)$；

6) $\lambda\tilde{\alpha}_1=\left(\left[1-\left(1-\mu_1^l\right)^\lambda,1-\left(1-\mu_1^u\right)^\lambda\right],\left[\left(\nu_1^l\right)^\lambda,\left(\nu_1^u\right)^\lambda\right]\right),\lambda>0$；

7) $\left(\tilde{\alpha}_1\right)^\lambda=\left(\left[\left(\mu_1^l\right)^\lambda,\left(\mu_1^u\right)^\lambda\right],\left[1-\left(1-\nu_1^l\right)^\lambda,1-\left(1-\nu_1^u\right)^\lambda\right]\right),\lambda>0$。

定理 2 设 $\tilde{\alpha}_1=\left(\left[\mu_1^l,\mu_1^u\right],\left[\nu_1^l,\nu_1^u\right]\right)$， $\tilde{\alpha}_2=\left(\left[\mu_2^l,\mu_2^u\right],\left[\nu_2^l,\nu_2^u\right]\right)$为任意两个区间直觉模糊数，设 $\tilde{\beta}_1=\bar{\tilde{\alpha}}_1$， $\tilde{\beta}_2=\tilde{\alpha}_1\oplus\tilde{\alpha}_2$， $\tilde{\beta}_3=\tilde{\alpha}_1\otimes\tilde{\alpha}_2$， $\tilde{\beta}_4=\lambda\tilde{\alpha}_1$， $\tilde{\beta}_5=\left(\tilde{\alpha}_1\right)^\lambda$， 则 $\tilde{\alpha}_i\,(i=1,2,3,4,5)$ 均为区间直觉模糊数。

证明：因为 $\tilde{\alpha}_1=\left(\left[\mu_1^l,\mu_1^u\right],\left[\nu_1^l,\nu_1^u\right]\right)$， $\tilde{\alpha}_2=\left(\left[\mu_2^l,\mu_2^u\right],\left[\nu_2^l,\nu_2^u\right]\right)$为区间直觉模糊数，则有 $\left[\mu_1^l,\mu_1^u\right],\left[\nu_1^l,\nu_1^u\right],\left[\mu_2^l,\mu_2^u\right],\left[\nu_2^l,\nu_2^u\right]\subseteq[0,1]$， 且 $\mu_1^u+\nu_1^u\le 1,\mu_2^u+\nu_2^u\le 1$。

根据上述定义 8 中运算规则(1) $\tilde{\beta}_1=\bar{\tilde{\alpha}}_1=\left(\left[\nu_1^l,\nu_1^u\right],\left[\mu_1^l,\mu_1^u\right]\right)$， 显然 $\tilde{\beta}_1$ 为区间直觉模糊数。

根据上述定义 5 中运算规则(2)可知：

$$\mu_{\tilde{\beta}_2}^l=\mu_1^l+\left(1-\mu_1^l\right)\mu_2^l\ge 0,\quad 0\le\nu_{\tilde{\beta}_2}^l=\nu_1^l\nu_2^l\le\nu_{\tilde{\beta}_2}^u=\nu_1^u\nu_2^u\le 1,$$

$$\mu_{\tilde{\beta}_2}^u=\mu_1^u+\mu_2^u\left(1-\mu_1^u\right)\ge\mu_1^u+\mu_2^l\left(1-\mu_1^u\right)=\mu_1^u\left(1-\mu_2^l\right)+\mu_2^l\ge\mu_1^l\left(1-\mu_2^l\right)+\mu_2^l=\mu_{\tilde{\beta}_2}^l\ge 0,$$

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{\beta}_2}^u+\nu_{\tilde{\beta}_2}^u&=\mu_1^u+\mu_2^u-\mu_1^u\mu_2^u+\nu_1^u\nu_2^u=\mu_1^u+\mu_2^u\left(1-\mu_1^u\right)+\nu_1^u\nu_2^u\le\mu_1^u+\left(1-\nu_2^u\right)\left(1-\mu_1^u\right)+\nu_1^u\nu_2^u\\&=1-\nu_2^u+\mu_1^u\nu_2^u+\nu_1^u\nu_2^u=1-\nu_2^u+\left(\mu_1^u+\nu_1^u\right)\nu_2^u\le 1\end{aligned}$$

所以 $\tilde{\beta}_2$ 为区间直觉模糊数。

根据上述定义 5 中运算规则(3)可知：

$$\mu^l_{\tilde{\beta}_3}=\mu^l_1\mu^l_2\ge 0,\ \ \mu^l_1\mu^l_2\le\mu^u_{\tilde{\beta}_3}=\mu^u_1\mu^u_2\le 1,$$

$$\nu^u_{\tilde{\beta}_3}=\nu^u_1+\left(1-\nu^u_1\right)\nu^u_2\ge\nu^u_1+\left(1-\nu^u_1\right)\nu^l_2=\nu^u_1\left(1-\nu^l_2\right)+\nu^l_2+\mu^l_2\ge\nu^l_1\left(1-\nu^l_2\right)+\nu^l_2=\nu^l_{\tilde{\beta}_3}\ge 0$$

$$\mu^u_{\tilde{\beta}_3}+\nu^u_{\tilde{\beta}_3}=\mu^u_1\mu^u_2+\nu^u_1+\nu^u_2-\nu^u_1\nu^u_2=\mu^u_1\mu^u_2+\nu^u_1+\left(1-\nu^u_1\right)\nu^u_2\le\mu^u_1\mu^u_2+\nu^u_1+\left(1-\nu^u_1\right)\left(1-\mu^u_2\right)$$

$$=1-\mu^u_2+\mu^u_1\mu^u_2+\nu^u_1\mu^u_2=1-\mu^u_2+\left(\mu^u_1+\nu^u_1\right)\mu^u_2\le 1$$

所以 $\tilde{\beta}_3$ 为区间直觉模糊数。

根据上述定义 5 中运算规则(6)可知：

$$0\le\mu^l_{\tilde{\beta}_4}=1-\left(1-\mu^l\right)^\lambda\le\mu^u_{\tilde{\beta}_4}=1-\left(1-\mu^u\right)^\lambda\le 1,\ \ 0\le\nu^l_{\tilde{\beta}_4}=\left(\nu^l\right)^\lambda\le\nu^u_{\tilde{\beta}_4}=\left(\nu^u\right)^\lambda\le 1$$

$$\mu^u_{\tilde{\beta}_4}+\nu^u_{\tilde{\beta}_4}=1-\left(1-\mu^u\right)^\lambda+\left(\nu^u\right)^\lambda\le 1-\left(1-\mu^u\right)^\lambda+\left(1-\mu^u\right)^\lambda=1$$

所以 $\tilde{\beta}_4$ 为区间直觉模糊数。

根据上述定义 5 中运算规则(6)可知：

$$0\le\mu^l_{\tilde{\beta}_5}=\left(\mu^l_1\right)^\lambda\le\mu^u_{\tilde{\beta}_5}=\left(\mu^u_1\right)^\lambda\le 1,\ \ 0\le\nu^l_{\tilde{\beta}_5}=1-\left(1-\nu^l_1\right)^\lambda\le\nu^u_{\tilde{\beta}_5}=1-\left(1-\nu^u_1\right)^\lambda\le 1$$

$$\mu^u_{\tilde{\beta}_5}+\nu^u_{\tilde{\beta}_5}=\left(\mu^u_1\right)^\lambda+1-\left(1-\nu^u_1\right)^\lambda\le\left(1-\nu^u_1\right)^\lambda+1-\left(1-\nu^u_1\right)^\lambda=1$$

$\tilde{\beta}_5$ 所以为区间直觉模糊数。

3.3. 区间直觉模糊集的减法和除法运算规则定义

类比于上述定义 4 中直觉模糊数的减法和除法的定义给出区间直觉模糊集的减法和除法的定义。

定义 9 设 $\tilde{A}=\left\{\left(x_i,\left[\mu^l_{\tilde{A}}(x),\mu^u_{\tilde{A}}(x)\right],\left[\nu^l_{\tilde{A}}(x),\nu^u_{\tilde{A}}(x)\right]\right)\middle|x_i\in X\right\}$，$\tilde{B}=\left\{\left(x_i,\left[\mu^l_{\tilde{B}}(x),\mu^u_{\tilde{B}}(x)\right],\left[\nu^l_{\tilde{B}}(x),\nu^u_{\tilde{B}}(x)\right]\right)\middle|x_i\in X\right\}$ 为任意两个区间直觉模糊集，定义以下减法和除法运算规则：

1) $\tilde{A}-\tilde{B}=\tilde{A}+\bar{\bar{\tilde{B}}}=\left\{\left(\begin{array}{l}x_i,\left[\mu^l_{\tilde{A}}(x)+\nu^l_{\tilde{B}}(x)-\mu^l_{\tilde{A}}(x)\nu^l_{\tilde{B}}(x),\mu^u_{\tilde{A}}(x)+\nu^l_{\tilde{B}}(x)-\mu^u_{\tilde{A}}(x)\nu^l_{\tilde{B}}(x)\right],\\ \left[\nu^l_{\tilde{A}}(x)\mu^l_{\tilde{B}}(x),\nu^u_{\tilde{A}}(x)\mu^u_{\tilde{B}}(x)\right]\end{array}\right)\middle|x_i\in X\right\}$；

2) $\tilde{A}\div\tilde{B}=\tilde{A}\cdot\bar{\bar{\tilde{B}}}=\left\{\left(\begin{array}{l}x_i,\left[\mu^l_{\tilde{A}}(x)\nu^l_{\tilde{B}}(x),\mu^u_{\tilde{A}}(x)\nu^u_{\tilde{B}}(x)\right],\\ \left[\nu^l_{\tilde{A}}(x)+\mu^l_{\tilde{B}}(x)-\nu^l_{\tilde{A}}(x)\mu^l_{\tilde{B}}(x),\nu^u_{\tilde{A}}(x)+\mu^u_{\tilde{B}}(x)-\nu^u_{\tilde{A}}(x)\mu^u_{\tilde{B}}(x)\right]\end{array}\right)\middle|x_i\in X\right\}$。

类似上述运算规则，定义区间直觉模糊数相反数、减法和除法运算规则：

定义 10 设 $\tilde{\alpha}_1=\left(\left[\mu^l_1,\mu^u_1\right],\left[\nu^l_1,\nu^u_1\right]\right)$，$\tilde{\alpha}_2=\left(\left[\mu^l_2,\mu^u_2\right],\left[\nu^l_2,\nu^u_2\right]\right)$ 为任意两个区间直觉模糊数，定义以下运算规则：

1) 定义 $-\tilde{\alpha}_1$ 称为 $\tilde{\alpha}_1$ 的“相反数”，$-\tilde{\alpha}_1=\bar{\bar{\tilde{\alpha}}}_1=\left(\left[\nu^l_1,\nu^u_1\right],\left[\mu^l_1,\mu^u_1\right]\right)$；

2) $\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2=\tilde{\alpha}_1\oplus\bar{\bar{\tilde{\alpha}}}_2=\left(\left[\mu^l_1+\nu^l_2-\mu^l_1\nu^l_2,\mu^u_1+\nu^u_2-\mu^u_1\nu^u_2\right],\left[\nu^l_1\mu^l_2,\nu^u_1\mu^u_2\right]\right)$；

3) $\tilde{\alpha}_1\div\tilde{\alpha}_2=\tilde{\alpha}_1\otimes\bar{\bar{\tilde{\alpha}}}_2=\left(\left[\mu^l_1\nu^l_2,\mu^u_1\nu^u_2\right],\left[\nu^l_1+\mu^l_2-\nu^l_1\mu^l_2,\nu^u_1+\mu^u_2-\nu^u_1\mu^u_2\right]\right)$。

定理 3 设 $\tilde{\alpha}_1=\left(\left[\mu^l_1,\mu^u_1\right],\left[\nu^l_1,\nu^u_1\right]\right)$，$\tilde{\alpha}_2=\left(\left[\mu^l_2,\mu^u_2\right],\left[\nu^l_2,\nu^u_2\right]\right)$ 为任意两个区间直觉模糊数，设 $\tilde{\beta}_6=-\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\beta}_7=\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2$，$\tilde{\beta}_8=\tilde{\alpha}_1\div\tilde{\alpha}_2$，则 $\tilde{\alpha}_i\,(i=6,7,8)$ 均为区间直觉模糊数。

证明： 因为 $\tilde{\alpha}_1=\left(\left[\mu_1^l,\mu_1^u\right],\left[v_1^l,v_1^u\right]\right)$， $\tilde{\alpha}_2=\left(\left[\mu_2^l,\mu_2^u\right],\left[v_2^l,v_2^u\right]\right)$ 为区间直觉模糊数，则有 $\left[\mu_1^l,\mu_1^u\right],\left[v_1^l,v_1^u\right],\left[\mu_2^l,\mu_2^u\right],\left[v_2^l,v_2^u\right]\subseteq[0,1]$，且 $\mu_1^u+v_1^u\le 1,\mu_2^u+v_2^u\le 1$。

根据上述定义 10 中运算规则(1) $\tilde{\beta}_6=-\tilde{\alpha}_1=\bar{\tilde{\alpha}}_1=\left(\left[v_1^l,v_1^u\right],\left[\mu_1^l,\mu_1^u\right]\right)$，显然 $\tilde{\beta}_6$ 为区间直觉模糊数。

根据上述定义 10 中运算规则(2)可知 $\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2=\tilde{\alpha}_1\oplus\bar{\tilde{\alpha}}_2$，由定理 1 中的结论 $\bar{\tilde{\alpha}}_2$ 仍为区间直觉模糊数，再由定理 1 中两个区间直觉模糊数的和 $\tilde{\alpha}_1\oplus\bar{\tilde{\alpha}}_2$ 仍为区间直觉模糊数，所以 $\tilde{\beta}_7$ 为区间直觉模糊数。

根据上述定义 10 中运算规则(3)可知 $\tilde{\alpha}_1\div\tilde{\alpha}_2=\tilde{\alpha}_1\otimes\bar{\tilde{\alpha}}_2$，由定理 1 中的结论 $\bar{\tilde{\alpha}}_2$ 仍为区间直觉模糊数，再由定理 1 中两个区间直觉模糊数的乘积 $\tilde{\alpha}_1\otimes\bar{\tilde{\alpha}}_2$ 仍为区间直觉模糊数，所以 $\tilde{\beta}_8$ 为区间直觉模糊数。

4. 实例

例 1 设 $\tilde{\alpha}=(0.8,0.1)$，$\tilde{\beta}=(0.5,0.3)$ 为两个区间直觉模糊数，请分别计算 $\bar{\tilde{\alpha}}$，$\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta}$，$\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\beta}$，$\tilde{\alpha}\cup\tilde{\beta}$，$\tilde{\alpha}\cap\tilde{\beta}$，$2\tilde{\alpha}$，$\tilde{\alpha}^2$，$\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}$，$\tilde{\alpha}\div\tilde{\beta}$。

解： $\bar{\tilde{\alpha}}=(0.1,0.8)$

$\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta}=(0.8+0.5-0.8\times 0.5,0.1\times 0.3)=(0.9,0.03)$，

$\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\beta}=(0.8\times 0.5,0.1+0.3-0.1\times 0.3)=(0.4,0.37)$，

$\tilde{\alpha}\cup\tilde{\beta}=(\max\{0.8,0.5\},\min\{0.1,0.3\})=(0.8,0.1)$，

$\tilde{\alpha}\cap\tilde{\beta}=(\min\{0.8,0.5\},\max\{0.1,0.3\})=(0.5,0.3)$，

$2\tilde{\alpha}=\left(1-(1-0.8)^2,(0.1)^2\right)=(0.96,0.01)$，

$\tilde{\alpha}^2=\left((0.8)^2,1-(1-0.1)^2\right)=(0.64,0.19)$，

$\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}=(0.8+0.3-0.8\times 0.3,0.1\times 0.5)=(0.86,0.05)$，

$\tilde{\alpha}\div\tilde{\beta}=(0.8\times 0.3,0.1+0.5-0.1\times 0.5)(0.24,0.55)$。

例 2 设 $\tilde{\alpha}=([0.6,0.8],[0,0.1])$，$\tilde{\beta}=([0.4,0.5],[0.2,0.4])$ 为两个区间直觉模糊数，请分别计算 $\bar{\tilde{\alpha}}$，$\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta}$，$\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\beta}$，$\tilde{\alpha}\cup\tilde{\beta}$，$\tilde{\alpha}\cap\tilde{\beta}$，$2\tilde{\alpha}$，$\tilde{\alpha}^2$，$\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}$，$\tilde{\alpha}\div\tilde{\beta}$。

解： $\bar{\tilde{\alpha}}=([0,0.1],[0.6,0.8])$

$\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta}=([0.6+0.4-0.6\times 0.4,0.8+0.5-0.8\times 0.5],[0\times 0.2,0.1\times 0.4])=([0.76,0.9],[0,0.04])$，

$\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\beta}=([0.6\times 0.4,0.8\times 0.5],[0+0.2-0\times 0.2,0.1+0.4-0.1\times 0.4])=([0.24,0.4],[0.2,0.46])$，

$\tilde{\alpha}\cup\tilde{\beta}=\left(\left[\max\{0.6,0.4\},\max\{0.8,0.5\}\right],\left[\min\{0,0.2\},\min\{0.1,0.4\}\right]\right)=([0.6,0.8],[0,0.1])$，

$\tilde{\alpha}\cap\tilde{\beta}=\left(\left[\min\{0.6,0.4\},\min\{0.8,0.5\}\right],\left[\max\{0,0.2\},\max\{0.1,0.4\}\right]\right)=([0.4,0.5],[0.2,0.4])$，

$2\tilde{\alpha}=\left(\left[1-(1-0.6)^2,1-(1-0.8)^2\right],\left[0^2,0.1^2\right]\right)=([0.84,0.94],[0,0.01])$，

$\tilde{\alpha}^2=\left(\left[0.6^2,0.8^2\right],\left[1-(1-0)^2,1-(1-0.1)^2\right]\right)=([0.36,0.64],[0,0.19])$，

$\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}=([0.6+0.2-0.6\times 0.2,0.8+0.4-0.8\times 0.4],[0\times 0.4,0.1\times 0.5])=([0.68,0.88],[0,0.05])$，

$\tilde{\alpha}\div\tilde{\beta}=([0.6\times 0.2,0.8\times 0.4],[0+0.4-0\times 0.4,0.1+0.5-0.1\times 0.5])=([0.12,0.32],[0.4,0.55])$。

5. 总结

文章对直觉模糊集和区间直觉模糊集的基本理论和基本运算进行了研究和分析。首先，在已有研究理论的基础上，新定义了直觉模糊集和直觉模糊数的减法和除法运算规则，并证明了基于直觉模糊数的减法和除法是封闭的。其次，将直觉模糊集的基本运算规则进一步推广到区间直觉模糊集和区间直觉模

糊数，并给出了区间直觉模糊集和区间直觉模糊数的减法和除法运算，且进一步证明了区间直觉模糊数基于和、差、积、商等一些运算规则的封闭性。最后，通过两个具体计算例子对直觉模糊数和区间直觉模糊数的基本运算规则进行了演示。本文的研究结果对丰富直觉模糊集和区间直觉模糊集的基本理论具有重要的意义，进一步丰富了其理论基础，为直觉模糊集和区间直觉模糊集的理论发展提供了理论支撑。

当然本文的研究也还存在许多需要完善的地方，比如所提出的运算规则在实际应用中是否合理还有待进一步验证。因此下一步的研究工作将利用本文的研究结果应用到实际问题中，以验证其合理性和准确性，并丰富其应用研究。

参考文献

[1] 莫智文, 舒兰, 许彪. 模糊数学理论及其应用评述[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 1998, 21(3): 330-335.

[2] 黄军辉, 傅沈文. 模糊控制理论的发展及应用[J]. 中国科技信息, 2006(12): 303-304, 306.

[3] 张利亭, 冯涛, 李欢. 不完备信息系统的直觉模糊决策粗糙集[J]. 郑州大学学报(理学版), 2021, 53(2): 57-65.

[4] 柯强, 冯康宏, 曹心德, 等. 基于模糊数学的场地重金属污染风险综合评价[J]. 中国环境科学, 2023, 43(1): 415-423.

[5] 陈静. 模糊数学方法在旅游吸引力评价中的应用[J]. 浙江大学学报(理学版), 2021, 48(1): 118-123.

[6] 张幼振, 张宁, 邵俊杰, 等. 基于钻进参数聚类的含煤地层岩性模糊识别[J]. 煤炭学报, 2019, 44(8): 2328-2335.

[7] 刘芹, 孔维丽, 崔筱, 等. 基于模糊数学和聚类分析的香菇品种综合品质评价[J]. 中国瓜菜, 2021, 34(11): 37-46.

[8] Atanassov, K. (1986) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 87-96. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3

[9] Atanassov, K. and Gargov, G. (1989) Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Set. *Fuzzy Sets System*, **31**, 343-349. https://doi.org/10.1016/0165-0114(89)90205-4

[10] 李慧敏, 吕乐琳, 汪伦焰, 等. 基于区间直觉模糊集的水环境治理 PPP 项目可持续性评价[J]. 节水灌溉, 2019(3): 59-66, 70.

[11] 陈璇, 孙开畅, 马文俊, 等. 基于区间灰色直觉模糊语言集的水利工程应急能力评价[J]. 水力发电, 2019, 45(5): 103-107.

[12] 马文俊, 孙开畅, 颜鑫, 等. 水利工程应急方案直觉模糊多属性决策研究[J]. 水力发电, 2019, 45(2): 79-82.

[13] 周清华, 王琦. 基于直觉模糊集和 VIKOR 的低碳供应商选择方法研究[J]. 科技管理研究, 2017, 37(10): 233-237.

[14] 商克俭, 冯东梅, 李乃文. 基于直觉模糊集的公私合营项目方案选择[J]. 统计与决策, 2019, 35(3): 178-181.

[15] 田永超, 于丽英. 基于区间值直觉模糊集的技术创新风险评价方法[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2020, 26(2): 290-300.

[16] 李沃源, 乔剑敏. 基于区间直觉模糊集的双边匹配决策模型及应用[J]. 模糊系统与数学, 2021, 35(3): 71-77.

[17] 杨敏, 张仕斌, 张航. 基于新模糊熵和得分函数的区间直觉模糊多属性决策[J]. 运筹与管理, 2021, 30(6): 63-68.