

The Parallelism of the Rays in a Complete Noncompact Riemannian Manifold*

Huashui Zhan

School of Sciences, Jimei University, Xiamen

Email: hszhan@jmu.edu.cn

Received: Mar. 14th, 2011; revised: Apr. 26th, 2011; accepted: Apr. 29th, 2011.

Abstract: The paper generalizes the concept of the parallelism for the rays in Euclidean space to a general noncompact Riemannian manifold, proves that if the manifold has only two Busemann function with adverse signs, then the manifold is with complete parallel property. This conclusion answers Wu-Chen Problem partly.

Keywords: Parallel Rays; Busemann Function; Complete Parallel Property; Wu-Chen Problem

完备非紧黎曼流形上的射线的平行性*

詹华税

集美大学理学院, 厦门

Email: hszhan@jmu.edu.cn

收稿日期: 2011 年 3 月 14 日; 修回日期: 2011 年 4 月 26 日; 录用日期: 2011 年 4 月 29 日

摘 要: 将欧式空间平行射线的概念推广到一般完备非紧的黎曼流形上, 证明了只有符号相反的 Busemann 函数的完备非紧的黎曼流形具有完全平行性质。部分地回答了 Wu-Chen 问题。

关键词: 平行射线; Busemann 函数; 完全平行性质; Wu-Chen 问题

1. 引言

熟知, 对一般的完备非紧黎曼流形而言是不存在直线的。换句话说, 直线的存在性将对流形的几何结构产生很强的限制, 例如我们有经典的 Cheeger-Gromoll 分裂定理^[1]: 设 M 是具非负 Ricci 曲率的完备非紧黎曼流形, 若 M 包含一条直线, 则 M 必等距于 $M' \times \mathbb{R}$ 。其中 M' 是具非负 Ricci 曲率的完备黎曼流形。

但射线却广泛存在, 因为我们有

命题 1.1: 完备黎曼流形 M 是非紧的充分必要条件是 $\forall p \in M$ 都存在一条由 p 出发的射线。

所以, 在对完备非紧黎曼流形的几何性质的研究中, 对射线的研究就显得非常的重要。甚至于完备非紧黎曼流形其他性质的研究亦离不开对射线的分析, 例如著名数学家 S. T. Yau 所创立的几何分析理论^[2]中所探讨的一个基本的问题就是完备非紧黎曼流形上的调和函数的存在性, 其方法就是将现代偏微分方程的分析技巧应用于对流形上的 Busemann 函数性质估计。而众所周知, Busemann 函数是基于流形上的射线而定义的(见下面的定义(2.1))。在过去的十几年中, 作者在完备非紧黎曼流形的几何性质的研究(参见文献[3-12])过程中, 发现其中许多问题都与欧氏空间射线的平行性如何在一般的完备非紧黎曼流形进行相应的推广应用有着密切的关系。

*福建省自然科学基金(2009J01009), 集美大学潘金龙科学基金资助课题。

我们首先必须先澄清在一般的流形中,射线的平行是一个什么样的意思:对任意该射线以外的点 p , 记连接 p 与 $\gamma(t)$ 的最短测地线记为 σ_{pt} , 通过选取子列知有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\sigma}_{pt}(0) = \dot{\sigma}_p(0), \quad (1.2)$$

其中 $\sigma_p: [0, +\infty) \rightarrow M$ 是由 p 出发而且是唯一满足(1.2)式的射线。

定义 1.2: 我们称 σ_p 平行于 γ , 并记为 $\sigma_p \parallel \gamma$ 。

注 1.3: 在有些文献中称 σ_p 是 γ 的渐近射线。而在平面几何中,这与普通的不相交的平行射线的定义是等价的。

对于一般的完备非紧黎曼流形,通过考察具体的一些典型例子如具诱导度量的 R^3 中的柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 、旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和具非欧度量的平面 R^2 单位圆盘 $x^2 + y^2 < 1$ 等,我们发现完全有可能成立以下

猜测 1.4: 设 M 为完备非紧的黎曼流形, $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow M$ 是正规测地射线, 对任意的该射线以外的一点 p , 则由 p 可引唯一的射线与 γ 平行。

依定义 1.2 所定义的流形的平行射线一般可能不具有递推性(即 $\gamma_1 \parallel \gamma_2, \gamma_2 \parallel \gamma_3$, 则 $\gamma_1 \parallel \gamma_3$) 和对称性(即 $\gamma_1 \parallel \gamma_2$, 则 $\gamma_2 \parallel \gamma_1$)。实际上能否阐明在一般的流形中,平行射线确有“平行”的性质将直接决定了我们 1.2 定义是否有意义。考察 R^3 中的旋转抛物面 $\Pi: z = x^2 + y^2$ 在诱导度量下它是具正曲率的完备非紧的流形, 由^[13]之第 136 页知子午线是仅有的射线, 由此事实, 易知在 Π 上按定义 1.2 所定义的平行射线不具

有递推性。不具有对称性的例子暂时无法找到。我们给出如下的

定义 1.6: 设 M 为一般的完备非紧的黎曼流形, 若 M 上的任意两平行射线的对称性成立, 则称 M 具有(不完全)平行性质; 若具有(不完全)平行性质的 M 上平行射线还有递推性, 则称 M 具有完全平行性。

本文对流形的曲率条件作了一定的限制, 对完备非紧的黎曼流形射线的平行性进行探讨。

2. 平行射线的存在性

设 M 为完备非紧的黎曼流形, 假定 M 的曲率有下界, 即 $K_M \geq -K$, 其中 K 是某一正的常数,

$\gamma: [0, +\infty) \rightarrow M$ 是正规测地射线, σ_{pt} 与 σ_p 如前所述, γ 所对应的 Busemann 函数定义为

$$B_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t - d(x, \gamma(t))), \quad (2.1)$$

现在对任意的 $t_0 > 0$, 记 $p\sigma_p(t_0)$ 与 $\sigma_p(t_0)\gamma(t)$ 的交角为 θ_t 。令 $M(t) = d(p, \gamma(t))$, $N(t) = d(\sigma_p(t_0), \gamma(t))$ 熟知(参见[14,15]等)有 $B_\gamma(\sigma_p(t)) = B_\gamma(p) + t, \forall t > 0$, 故有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (t - M(t)) &= B_\gamma(p) = B_\gamma(\sigma_p(t_0)) - t_0 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (t - N(t)) - t_0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (M(t) - N(t)) &= t_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

现在, 在与 $-K$ 为曲率的空间形式中选取相应的等边长的三角形 $\bar{p}\bar{\sigma}_{\bar{p}(t_0)}\bar{\gamma}(t)$, 相应的夹角为 $\bar{\theta}_t$ 。由非欧几何的余弦定理有

$$\begin{aligned} \cos \bar{\theta}_t &= -\frac{2e^{\sqrt{K}M(t)} + 2e^{-\sqrt{K}M(t)} - (e^{\sqrt{K}N(t)} + e^{-\sqrt{K}N(t)}) (e^{\sqrt{K}t_0} + e^{-\sqrt{K}t_0})}{(e^{\sqrt{K}t_0} - e^{-\sqrt{K}t_0}) (e^{\sqrt{K}N(t)} - e^{-\sqrt{K}N(t)})} \\ \cos \bar{\theta} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \cos \bar{\theta}_t = -\frac{1}{e^{\sqrt{K}t_0} - e^{-\sqrt{K}t_0}} \left(2 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\sqrt{K}(M(t) - N(t))} - e^{\sqrt{K}t_0} - e^{-\sqrt{K}t_0} \right) = -1 \end{aligned}$$

即有 $\bar{\theta} = \pi$, 由比较定理知有

$$\theta = \pi \quad (2.3)$$

事实(2.3)说明对 $\forall t_0 > 0$, 由 $\sigma_p(t_0)$ 做平行于 γ 的平行射线 $\sigma_{\sigma_p(t_0)}$, 则有

$$\sigma_{\sigma_p(t_0)} = \sigma_p \Big|_{t_0}^{+\infty} \quad (2.4)$$

由式(2.3)与(2.4)知, σ_p 与 γ 的关系只可能是以下两种情况之一:

- 1) $\gamma \subset \sigma_p$;
- 2) $\gamma \cap \sigma_p = \emptyset$ 。这是因为若 σ_p 与 γ 有交点 $\sigma_p(t_0) = \gamma(s_0)$, 则有 $\sigma_p(t_0)$ 所做的平行射线将是 $\gamma_{s_0}: [s_0, +\infty) \rightarrow M$ 而非 $\sigma_{\sigma_p(t_0)}$, 这便与式(2.4)矛盾。

根据前面所述的平行射线的定义知道, σ_p 与 γ 是

流形 M 上的两平行射线。下面证明唯一性。若通过选取另一个子列有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\sigma}_{pt}(0) = \dot{\sigma}_p(0), \quad (2.5)$$

其中 $\delta_p: [0, +\infty) \rightarrow M$ 也是由 p 出发而且是满足(2.5)式的射线。我们将要说明 $\delta = \sigma$ 。否则, 对任意的 $t > 0$, 记 σ_p 与 δ 的夹角为 α , 由于

$$B_\gamma(\sigma_p(t)) = B_\gamma(p) + t = B_\gamma(\delta_p(t)), \quad \forall t > 0, \quad (2.6)$$

根据 Busemann 函数的定义, 由(2.6)我们知道有

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [d(\delta_p(t), \gamma(s)) - d(\sigma_p(t), \gamma(s))] = 0.$$

所以, 由距离函数的三角不等式, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\delta_p(t), \sigma_p(t)) = 0. \quad (2.7)$$

现在与 $-K$ 为曲率的空间形式相比较, 利用非欧几何的余弦定理容易知道 $\alpha = 0$ 。

由以上证明我们有

定理 2.1: 设 M 为完备非紧曲率具下界的黎曼流形, $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow M$ 是正规测地射线, 对任意该射线以外的点 p , 则由 p 可引唯一的射线与 γ 平行。

3. 只有两个符号相反的 Busemann 函数的流形

定义 3.1: 设 M 是完备非紧黎曼流形, γ_1, γ_2 是 M 上射线, 若 Busemann 函数满足

$$B_{\gamma_1}(x) = B_{\gamma_2}(x) + c, \quad \forall x \in M. \quad (3.1)$$

则称 B_{γ_1} 和 B_{γ_2} 是 M 上同一个 B-函数。其中 c 是常数。

此定义是伍鸿熙和陈维桓在其著的书[14]中首次提出的。依此定义, R^2 上有无穷多 B-函数, 而 R^3 中柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 上仅有二个符号相反的 B-函数; R^3 中的旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 仅有一个 B-函数(见[5])。在[14]的第三章中, 伍鸿熙和陈维桓提出了如下的

Wu-Chen 问题 3.2: 若完备非紧的黎曼流形 M 仅有两个符号相反的 Busemann 函数, 那么, 该流形的几何拓扑结构如何?

文[5]已经部分回答了上述问题。在这一节中我们将进一步探讨此问题。

引理 3.3: 设 M 为完备非紧黎曼流形, 若 M 上仅有两个符号相反的 B-函数且其曲率有下界, 则对

$\forall p \in M$, 只有两条方向相反的射线由它出发且它们构成唯一的测地直线。

证明: 由于 M 上仅有两个符号相反的 B-函数 $B_1(x) = -B_2(x) + c$, 容易证明对 $\forall p \in M$, 存在由其出发的两条射线 γ_1, γ_2 使得

$$B_{\gamma_1}(x) = -B_{\gamma_2}(x), \quad \forall x \in M.$$

由 B-函数的定义易知有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(t+s) - d(\gamma_1(t), \gamma_2(s))] = 0. \quad (3.2)$$

由此式应用 Toponogov 比较定理可以证明(参见[5]) γ_1, γ_2 构成一条测地直线。若存在另一条由 p 出发的射线 γ_3 , 由于 M 上仅有两个符号相反的 B-函数, 故不妨设 $B_{\gamma_3} = B_{\gamma_1}$, 同样有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(t+s) - d(\gamma_3(t), \gamma_2(s))] = 0 \quad (3.3)$$

于是同样有 γ_3, γ_2 构成一条测地直线, 所以 $\gamma_1 = \gamma_3$ 。引理得证。

现在过 $\gamma(0) = o$ 引 $\sigma_p = \sigma$ 的平行线, 记之为 γ_o 。

若 M 上仅有两个符号相反的 B-函数

$B_1(x) = -B_2(x) + c$, 由于熟知有

$$\begin{aligned} B_\gamma(\sigma_p(t)) &= B_{\sigma_p}(\sigma_p(t)) + B_\gamma(p), \\ B_{\sigma_p}(\gamma_o(t)) &= B_{\gamma_o}(\gamma_o(t)) + B_{\sigma_p}(o) \end{aligned}$$

不妨设 $B_\gamma(x) = B_1(x) + c$, 则由上式知只能是

$$B_\gamma(x) = B_{\gamma_o}(x) = B_{\sigma_p}(x) + c$$

由引理 3.3 知 $\gamma = \gamma_o$, 即 M 具有平行性。进一步若 $\gamma_1 \parallel \gamma_2, \gamma_2 \parallel \gamma_3$, 由以上分析易知有

$$B_{\gamma_1}(x) = B_{\gamma_2}(x) + c_1 = B_{\gamma_3}(x) + c_2$$

由引理 3.3 知 $\gamma_1 \parallel \gamma_3$ 。于是得如下的

定理 3.4: 设 M 为完备非紧黎曼流形, 若 M 上仅有两个符号相反的 B-函数且其曲率有下界, 则 M 具有完全平行性质。

4. Busemann 函数

引理 4.1^[5]: 设 M 为完备非紧的黎曼流形, $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow M$ 是正规测地射线, 对任意该射线以外的点 p , $\sigma_p = \sigma$ 如前所述, 则有

$$B_\gamma(x) \geq B_\sigma(x) + B_\gamma(p), \quad \forall x \in M. \quad (4.1)$$

现在假定 M 为完备非紧具非负曲率黎曼流形, 若 $\dim S > 0$, 由文献[12]知道 M 具有(不完全)平行性质, 则由(4.1)有

$$\begin{aligned} B_\gamma(x) &\geq B_\sigma(x) + B_\gamma(\sigma(0)) \\ &\geq B_\gamma(x) + B_\sigma(\gamma(0)) + B_\gamma(\sigma(0)), \\ \forall x \in M; \\ 0 &\geq B_\sigma(\gamma(0)) + B_\gamma(\sigma(0)), \\ -B_\sigma(\gamma(0)) &\geq B_\gamma(x) - B_\sigma(x) \geq B_\gamma(\sigma(0)). \end{aligned}$$

现在任意固定一射线 γ , 令 $\Pi_\gamma = \{M \text{ 中所有的射线 } \sigma, \sigma \text{ 与 } \gamma \text{ 平行并使得下式成立}\}$

$$B_\gamma(\sigma(0)) + B_\sigma(\gamma(0)) = 0 \quad (4.2)$$

显然, 若 Π_γ 是非空集合, 那么对 Π_γ 的 σ 有

$$B_\sigma(x) + B_\gamma(\sigma(0)) = B_\gamma(x), \quad \forall x \in M$$

即 $B_\sigma(x)$ 与 $B_\gamma(x)$ 是 M 中的同一个 B-函数。

当 M 具有非负曲率时, 设 S 是其核心。若 γ 与 σ 均由 S 出发, 由于熟知此时 M 上的 B-函数是凸函数, S 是 M 上的全凸全测地子流形, 所以任意的 B-函数在 S 上均取常数。此时 $B_\gamma(\sigma(0)) = B_\gamma(\gamma(0)) = 0 = B_\sigma(\sigma(0)) = B_\sigma(\gamma(0))$, (4.2)式当然成立。

注意到如果 $\gamma \subset \gamma', \sigma \subset \sigma'$, 那么由 B-函数的定义易知

$$\begin{aligned} B_\gamma(x) &= B_{\gamma'}(x) - d(\gamma'(0), \gamma(0)), \\ B_\sigma(x) &= B_{\sigma'}(x) - d(\sigma'(0), \sigma(0)), \quad \forall x \in M. \end{aligned}$$

于是有

定理 4.2: 设 M 为完备非紧具非负曲率的黎曼流形, 若 $\dim S > 0$, γ 与 σ 是 M 上的任意两条平行射线,

则 B_γ 与 B_σ 是 M 上的同一个 B-函数。

要注意的是该定理的逆定理不成立。例如 R^3 中的旋转抛物面在诱导度量下是只有一个 B-函数, 但若 γ 与 σ 是由顶点出发的两条不同的射线(子午线), 它们是不互相平行的。

参考文献 (References)

- [1] J. Cheeger, D. Gromoll. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 1971, 6(1): 119-128.
- [2] 丘成桐, 孙理察. 微分几何[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
- [3] 詹华税. 完备 Riemann 流形之共轭点[J]. *数学学报*, 1994, 37(3): 414-419.
- [4] H. S. Zhan, Z. M. Shen. The volume and topology of a complete Riemannian manifold. *Chinese Annals of Mathematics*, 2001, 22(1): 85-92.
- [5] 詹华税. 关于 H-WU 问题[J]. *数学进展*, 2000, 29(4): 362-369.
- [6] 詹华税. 可定向的完备非紧具非负曲率的黎曼流形[J]. *数学进展*, 2001, 30(1): 70-74.
- [7] H. S. Zhan. Complete three dimensional manifolds with non-negative Ricci curvature and two order volume growth. *South-east Asian Bulletin of Mathematics*, 2000, 24(2): 341-343.
- [8] H. S. Zhan. The open manifold with zero ideal boundary. *South-east Asian Bulletin of Mathematics*, 1999, 23(1): 153-157.
- [9] H. S. Zhan. The diameter growth of an open Riemannian manifold with nonnegative sectional curvature. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 2004, 27(6): 1129-1132.
- [10] Y. X. Liang, H. S. Zhan. The geodesics without conjugate point on a complete manifold. *Tensor, New Series*, 1996, 57(3): 325-327.
- [11] 詹华税. 局部对称流形上的闭测地线[J]. *厦门大学学报(自)*, 2003, 42(3): 150-152.
- [12] 詹华税. 具有完全平行性质和非负曲率的完备黎曼流形[J]. *厦门大学学报(自)*, 2003, 73(43): 441-443.
- [13] J. Cheeger, D. Ebin. *Complete theorem in Riemannian geometry*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975.
- [14] 伍鸿熙, 陈维桓. 黎曼几何选讲[M]. 北京: 北京大学出版社, 1993.
- [15] Z. Shen. On complete manifolds of nonnegative k-th Ricci curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1993, 338(1): 289-309.