Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 45-52
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.21009 Published Online January 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

Study on Uniform Continuity of Vector Function

Weibin Wang[1], Jianhua Ma[1], Xiaoyuan Yang[2]
[1]School of Physics and Nuclear Energy Engineering, Beihang University, Beijing
[2]School of Mathematics and System Sciences, Beihang University, The LMIB of the Ministry of Education of China, Beijing
Email: xiaoyuanyang@vip.163.com
Received: Oct. 13th, 2011; revised: Nov. 24th, 2011; accepted: Nov. 27th, 2011

Abstract: This paper studies the uniform continuity of vector function. We expand the application of comparative method and "relative period" theorem, and find some new methods to judge the uniform continuity of vector function. In the last part, the enlarged application examples are presented to show the effectiveness of the methods and theorem we offer.

Keywords: Vector Function; Uniform Continuity; "Relative Period"; Comparative Method

向量函数一致连续的判别方法研究

王玮彬[1]，马建华[1]，杨小远[2]
[1]北京航空航天大学物理科学与核能工程学院，北京
[2]北京航空航天大学数学与系统科学学院，数学、信息、行为教育部重点实验室，北京
Email: xiaoyuanyang@vip.163.com
收稿日期：2011 年 10 月 13 日；修回日期：2011 年 11 月 24 日；录用日期：2011 年 11 月 27 日

摘　要：本文研究了向量函数的一致连续问题。提出了向量函数相对周期的概念，在此基础上，给出了向量函数一致收敛的判别方法，最后给出实际应用的例子，说明本文提出方法的有效性。

关键词：向量函数；一致连续；“相对周期”；比较判别法

1. 向量函数一致连续的基本定义

函数的一致连续是基础数学研究的一个重要概念。一元向量函数一致连续性的探究，对复变函数及运动物理学的研究具有重要意义。在文献[1-4]中，我们研究了一元函数和多元函数一致连续判别法。本文在此基础，研究了向量函数的一致连续判别方法。本文获得的结论进一步扩宽了这一问题的理论成果，具有理论和应用价值。

下面给出向量函数一致连续和不一致连续的定义。

定义 1.1. (一致连续) 设 $D_1 \subset R^n, D_2 \subset R^m$，$F: D_1 \to D_2$。若任意给定 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，对于任意的 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in D_1$，当 $\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\| < \delta$ 时，$\|F(\boldsymbol{X}) - F(\boldsymbol{Y})\| < \varepsilon$ 成立，则称 F 在 D_1 上一致连续。

定义 1.2. (不一致连续) 设 $D_1 \subset R^n, D_2 \subset R^m$，$F: D_1 \to D_2$。若存在一个 $\varepsilon_0 > 0$，对任何 $i \in N$，在 D_1 中可以找到两个向量列 $\{\boldsymbol{S}_i\}, \{\boldsymbol{K}_i\}$，$\|\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{K}_i\| < \frac{1}{i}$，但是 $\|F(\boldsymbol{S}_i) - F(\boldsymbol{K}_i)\| \ge \varepsilon_0$，则称 F 在 D_1 上不一致连续，这里 N 为自然数集合。

2. 向量函数一致连续的相对周期判别法

首先将一元函数周期的概念拓展到向量函数，对于一般向量函数定义周期如下。

定义 2.1. (向量函数的周期)设 $F:R^n\to R^m,\ f_i:R^n\to R$。

$$F(\boldsymbol{X})=\left(f_1(\boldsymbol{X}),f_2(\boldsymbol{X}),\cdots,f_m(\boldsymbol{X})\right)=\left(f_1(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{T}),f_2(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{T}),\cdots,f_m(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{T})\right)$$

对任意 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$ 成立(其中 $x_i\in R$)，则定义多元函数的周期为$\boldsymbol{T}=(T_1,T_2,\cdots,T_n),(T_i\in R)$。

例 1. 向量函数 $F(x,y)=\begin{bmatrix}\sin x\cos 2y\\ \cos\left(x-2y-\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \sin 2x\cos 2y\end{bmatrix}$ 以 $\begin{bmatrix}2\pi\\ \pi\end{bmatrix}$ 为周期。$\left((x,y)\in R^2\right)$

定义 2.2. (向量函数的逆映射定义) 设 $D_1\subseteq R^n,D_2\subseteq R^m,F:D_1\to D_2$。若对任意 $\boldsymbol{X}$，存在映射 $F^{-1}:D_2\to D_1$，且满足 $F\left(F^{-1}(\boldsymbol{X})\right)=\boldsymbol{X}$，则称 $F^{-1}(\boldsymbol{X})$ 是向量函数 $F(\boldsymbol{X})$ 的逆映射。

定义 2.3. (向量函数广义相对周期定义) 设 $F:R^n\to R^m,G:R^n\to R^n$。其中 $F(\boldsymbol{X})$ 以 $\boldsymbol{T}$ 为周期。若向量函数 $G(\boldsymbol{X})=\left(g_1(\boldsymbol{X}),g_2(\boldsymbol{X})\cdots,g_n(\boldsymbol{X})\right)$。

$\left(g_i(\boldsymbol{X}):R^n\to R。\right)$ 存在逆映射 $G^{-1}(\boldsymbol{X})$，则复合向量函数 $W(\boldsymbol{X})=F\left(G(\boldsymbol{X})\right)$ 的第 k 个相对周期为：

$$\boldsymbol{T}_k=G^{-1}(k\boldsymbol{T})-G^{-1}\left[(k-1)\boldsymbol{T}\right]=(T_{k1},T_{k2},\cdots,T_{kn})\cdot(T_{ki}\in R)$$

下面通过一个例题来阐释向量函数逆映射及相对周期的求法。

例 2. $W(x,y)=\begin{bmatrix}\sin x^2\cos\sqrt{y}\\ \cos\left(x^2-\sqrt{y}-\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(x^2+\sqrt{y}\right)\end{bmatrix}\left((x,y)\in R^2\right)$

解：分析向量函数 $W(x,y)$ 的复合结构：$W(x,y)=F\left(G(x,y)\right)$，其中 $F(x,y)=\begin{bmatrix}\sin x\cos y\\ \cos\left(x-y-\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \sin(x+y)\end{bmatrix}$，是以 $\begin{bmatrix}\pi\\ \pi\end{bmatrix}$ 为周期的周期向量函数；$G(x,y)=\begin{bmatrix}x^2\\ \sqrt{y}\end{bmatrix}$，根据逆映射定义 $G\left(G^{-1}(\boldsymbol{X})\right)=\boldsymbol{X}$ 易求得其存在逆映射 $G^{-1}(x,y)=\begin{bmatrix}\sqrt{x}\\ y^2\end{bmatrix}$。于是由相对周期的定义求得 $W(x,y)$ 的第 k 个相对周期为

$$\boldsymbol{T}_k=G^{-1}(k\boldsymbol{T})-G^{-1}\left[(k-1)\boldsymbol{T}\right]=\begin{bmatrix}\sqrt{k\pi}\\ (k\pi)^2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\sqrt{(k-1)\pi}\\ \left[(k-1)\pi\right]^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{k\pi}-\sqrt{(k-1)\pi}\\ (k\pi)^2-[(k-1)\pi]^2\end{bmatrix}$$

定理 2.1. (基于广义相对周期的一致连续判别方法)

设 $F:R^n\to R^m,\ G:R^n\to R^n,W:R^n\to R^m$。$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$。其中 $F(\boldsymbol{X})$ 为 R^n 上连续的周期向量函数且以 T 为周期，则对于复合向量函数 $W(\boldsymbol{X})=F\left(G(\boldsymbol{X})\right)$，若其存在相对周期 $\boldsymbol{T}_k=(T_{k1},T_{k2},\cdots,T_{kn})$，且

$\inf\|\boldsymbol{T}_k\|=0$，则向量函数$W(\boldsymbol{X})$在$R^n$上不一致连续。

证明： 设$\boldsymbol{S}_k$是$W(\boldsymbol{X})$在$\boldsymbol{T}_k$上的模最大值点(波峰点)，即$\boldsymbol{S}_k\in\left[\sum_{p=0}^{k-1}\boldsymbol{T}_p,\sum_{q=0}^{k}\boldsymbol{T}_q\right]$,且对$\forall\boldsymbol{X}\in\left[\sum_{p=0}^{k-1}\boldsymbol{T}_p,\sum_{q=0}^{k}\boldsymbol{T}_q\right]$，$x_i\in\left[\sum_{p=0}^{k-1}T_{pi},\sum_{q=0}^{k}T_{qi}\right](i=1,2,\cdots,n)$时，必有$\|W(\boldsymbol{X})\|\le\|W(\boldsymbol{S}_k)\|$成立；$\boldsymbol{K}_k$是$W(\boldsymbol{X})$在$\boldsymbol{T}_k$上的模最小值点(波谷点)，即$\boldsymbol{K}_k\in\left[\sum_{p=0}^{k-1}\boldsymbol{T}_p,\sum_{q=0}^{k}\boldsymbol{T}_q\right]$，且对$\forall\boldsymbol{X}\in\left[\sum_{p=0}^{k-1}\boldsymbol{T}_p,\sum_{q=0}^{k}\boldsymbol{T}_q\right]$，$x_i\in\left[\sum_{p=0}^{k-1}T_{pi},\sum_{q=0}^{k}T_{qi}\right](i=1,2,\cdots,n)$时，必有$\|W(\boldsymbol{X})\|\ge\|W(\boldsymbol{K}_k)\|$成立。由广义相对周期$\boldsymbol{T}_k$定义2.3.知，若$\boldsymbol{X}\in\left[\sum_{p=0}^{k-1}\boldsymbol{T}_p,\sum_{q=0}^{k}\boldsymbol{T}_q\right]$，即$\boldsymbol{X}\in\left[G^{-1}\left[(k-1)\boldsymbol{T}\right],G^{-1}(k\boldsymbol{T})\right]$，且$G\left(G^{-1}(\boldsymbol{Y})\right)=\boldsymbol{Y}$，所以有：$G(\boldsymbol{X})\in\left[(k-1)\boldsymbol{T},k\boldsymbol{T}\right]$。

又因为$F(\boldsymbol{X})$是周期向量函数，在每个周期$\boldsymbol{T}$上有固定的波峰点和波谷点，设$F(\boldsymbol{X})$在$\left[(k-1)\boldsymbol{T},k\boldsymbol{T}\right]$上的模最大值为$F(\boldsymbol{Y})_{\max}$，模最小值为$F(\boldsymbol{Y})_{\min}$，并且

$$\left\|F(\boldsymbol{Y})_{\max}-F(\boldsymbol{Y})_{\min}\right\|=A\quad\left(\boldsymbol{Y}\in\left[(k-1)\boldsymbol{T},k\boldsymbol{T}\right],\forall k\in N\text{，}A\text{为常数}\right),$$

因此在每个相对周期上也都有$\left\|F\left(G(\boldsymbol{X})\right)\right\|\in\left[\left\|F(\boldsymbol{Y})_{\min}\right\|,\left\|F(\boldsymbol{Y})_{\max}\right\|\right]$成立，且$F$在$R^n$上连续，即总可以找到这样的向量列$\{\boldsymbol{S}_k\},\{\boldsymbol{K}_k\}$，使

$$W(\boldsymbol{S}_k)=F\left(G(\boldsymbol{X})\right)_{\max}=F(\boldsymbol{Y})_{\max},W(\boldsymbol{K}_k)=F\left(G(\boldsymbol{X})\right)_{\min}=F(\boldsymbol{Y})_{\min}$$

故有

$$\left\|W(\boldsymbol{S}_k)-W(\boldsymbol{K}_k)\right\|=\left\|F(\boldsymbol{Y})_{\min}-F(\boldsymbol{Y})_{\max}\right\|=A>0\text{。}$$

对$\forall i\in N^{\cdot},\exists N\in N^{\cdot}$, 由$\inf\|\boldsymbol{T}_k\|=0$即$\lim\limits_{k\to+\infty}\|\boldsymbol{T}_k\|=0$知，当$k>N$时，有$\|\boldsymbol{T}_k\|<\frac{1}{i}$，且$\boldsymbol{S}_k,\boldsymbol{K}_k\in\left[\sum_{p=0}^{k-1}\boldsymbol{T}_p,\sum_{q=0}^{k}\boldsymbol{T}_q\right]$, 必有$\|\boldsymbol{S}_k-\boldsymbol{K}_k\|<\|\boldsymbol{T}_k\|<\frac{1}{i}$，但是$\left\|W(\boldsymbol{S}_k)-W(\boldsymbol{K}_k)\right\|=A\ne0$，所以函数$W(\boldsymbol{X})$在$R^n$上不一致连续。

3. 向量函数一致连续的比较判别法

这一节我们讨论向量函数在不同类型区域上的一致连续性的比较判别法。

定理 3.1. 设$D\in R^n$有界开集，函数$F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X}):D\to R^m$, $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})\in C(D)$。$\forall\boldsymbol{A}\in\partial D$，存在$\boldsymbol{B}\in R^n$满足

$$\lim_{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{A}}\left(F(\boldsymbol{X})-aG(\boldsymbol{X})\right)=\boldsymbol{B}$$

(其中a为非零常实数)，则在集合D上$F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})$有相同的一致连续性。

证明： 作辅助函数

$$W(\boldsymbol{X})=\begin{cases}F(\boldsymbol{X})-aG(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{X}\in D;\\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{X}\in\partial D.\end{cases}\text{则}$$

$W(\boldsymbol{X})$在有界闭集$\boldsymbol{D}$上连续，故一致连续，因此D上$F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})$有相同的一致连续。结论得证。

为了下面叙述方便，我们引进下面记号。

$\boldsymbol{B}_r(\boldsymbol{O})=\left\{\boldsymbol{X}\,\middle|\,\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{O}\|\le r,\boldsymbol{X}\in R^n\right\}$， $B_r(\boldsymbol{O})=\left\{\boldsymbol{X}\,\middle|\,\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{O}\|< r,\boldsymbol{X}\in R^n\right\}$， $\partial\boldsymbol{B}_r(\boldsymbol{O})=\left\{\boldsymbol{X}\,\middle|\,\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{O}\|= r,\boldsymbol{X}\in R^n\right\}$。

定理 3.2. 设 $E=B_r(\boldsymbol{O})\subset R^n, D_1=E^c$, 向量函数 $F,G:D_1\to D_2\in R^m$，且满足 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})\in C(D_1)$，如果

$$\lim_{\boldsymbol{X}\to\infty}\left(F(\boldsymbol{X})-aG(\boldsymbol{X})\right)=\boldsymbol{B}$$

成立(其中 a 为非零常实数，$\boldsymbol{B}$ 为常值向量)，则在集合 D_1 上 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})$ 有相同的一致连续性。

证明：首先证明如果 $G(\boldsymbol{X})$ 在 D_1 上一致连续，则 $F(\boldsymbol{X})$ 在 D_1 上一致连续。

由于 $g(\boldsymbol{X})$ 在 D_1 上一致连续，则有定义 1.1.得到

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta'>0,\forall\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in D_1,\ \|\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2\|<\delta',\|G(\boldsymbol{X}_1)-G(\boldsymbol{X}_2)\|<\frac{\varepsilon}{3A} \tag{3.1}$$

又 $\lim_{\boldsymbol{X}\to\infty}\left(F(\boldsymbol{X})-aG(\boldsymbol{X})\right)=\boldsymbol{B}$, 对于 $\forall\varepsilon>0,\ \exists M>r>0,$ 当 $\|\boldsymbol{X}\|>M>0$ 时，有

$$\|F(\boldsymbol{X})-aG(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{B}\|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{3.2}$$

取 $\|\boldsymbol{X}_1\|>M$, $\|\boldsymbol{X}_2\|>M$ ，且 $\|\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2\|<\delta$ ，则根据(3.1)和(3.2)得到

$$\begin{aligned}\|F(\boldsymbol{X}_1)-F(\boldsymbol{X}_2)\|&=\|F(\boldsymbol{X}_1)-aG(\boldsymbol{X}_1)-\boldsymbol{B}+aG(\boldsymbol{X}_1)-aG(\boldsymbol{X}_2)+\boldsymbol{B}+aG(\boldsymbol{X}_2)-F(\boldsymbol{X}_2)\|\\&\le\|F(\boldsymbol{X}_1)-aG(\boldsymbol{X}_1)-\boldsymbol{B}\|+|a|\|G(\boldsymbol{X}_1)-G(\boldsymbol{X}_2)\|+\|F(\boldsymbol{X}_2)-aG(\boldsymbol{X}_2)-\boldsymbol{B}\|\\&\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

从而得到 $F(\boldsymbol{X})$ 在 $D_1=R^n\setminus B_M(\boldsymbol{O})$ 上是一致连续的。又由于 $F(\boldsymbol{X})$ 在有界闭集 $E^c\cap\boldsymbol{B}_M(\boldsymbol{O})$ 上连续，因此一致连续，综合上面证明， $F(\boldsymbol{X})$ 在 D_1 上一致连续。

同理可证明 $F(\boldsymbol{X})$ 在 D_1 上一致连续，则 $G(\boldsymbol{X})$ 在 D_1 上一致连续，即 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})$ 具有相同的一致连续性。结论得证：由定理 3.2 可以得到下面推论。

推论 3.1. 向量函数 $F,G:R^n\to R^m$ ，且满足 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})\in C(R^n)$ ，如果

$$\lim_{\boldsymbol{X}\to\infty}\left(F(\boldsymbol{X})-aG(\boldsymbol{X})\right)=\boldsymbol{B}.$$

成立(其中 a 为非零常实数，$\boldsymbol{B}$ 为常值向量)，则在集合 R^n 上 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})$ 有相同的一致连续性。

推论 3.2. 设 $D_1=E^c,E=\boldsymbol{B}_r(\boldsymbol{O})$, 向量函数 $F,G:D_1\to D_2\in R^m$ ，且满足 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})\in C(D_1)$,如果

1) $\lim_{\boldsymbol{X}\to\infty}\left(F(\boldsymbol{X})-aG(\boldsymbol{X})\right)=\boldsymbol{B}$,

2) $\forall\boldsymbol{X}\in\partial\boldsymbol{B}_r(\boldsymbol{O}),\ \exists W(\boldsymbol{X})\in R^m$ ， $\lim_{\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{X}}\left(F(\boldsymbol{Y})-aG(\boldsymbol{Y})\right)=W(\boldsymbol{X})$

成立(其中 a 为非零常实数，$\boldsymbol{B}$ 为常值向量)，则在集合 D_1 上 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})$ 有相同的一致连续性。

定理 3.3. 设 $E_1,E_2\subset R^n,E=\partial E_1\cup\partial E_2,E_1\cup E\cup E_2=R^n,E_1\cap E\cap E_2=\varnothing$ ，向量函数 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})\in C(E_1\cup E)$ 。若在 E_1 上满足：

$$\lim_{\boldsymbol{X}\to\infty}\left(F(\boldsymbol{X})-aG(\boldsymbol{x})\right)=\boldsymbol{B}.$$

成立(其中 a 为非零常实数，$\boldsymbol{B}$ 为常值向量)，则在集合 $E_1\cup E$ 上 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})$ 有相同的一致连续性。图 1 给出了定理 3.3.中向量函数定义域示意图。

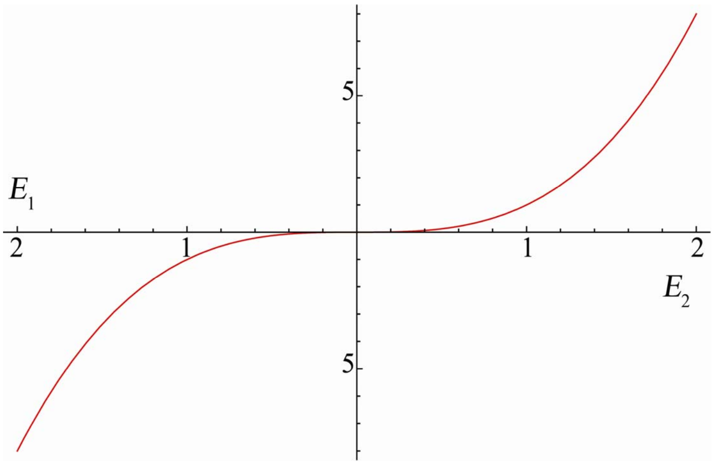

Figure 1. Diagram of domain in theorem 3.3
图 1. 定理 3.3.中向量函数定义域示意图

证明：设 $G(\boldsymbol{X})$ 在 $E_1\cup E$ 上一致连续，证明 $F(\boldsymbol{X})$ 在 $E_1\cup E$ 上一致连续。

因为 $G(\boldsymbol{X})$ 在 $E_1\cup E$ 上一致连续，所以

$$\forall\varepsilon>0,\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2\in E_1\cup E,\ \exists\delta'>0,\ \left\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_2\right\|<\delta',\ \left\|G(\boldsymbol{X})-G(\boldsymbol{X}_2)\right\|<\frac{\varepsilon}{3A} \tag{3.3}$$

又 $\lim\limits_{X\to\infty}\left(F(\boldsymbol{X})-aG(\boldsymbol{x})\right)=\boldsymbol{B}$, 对于 $\forall\varepsilon>0,\ \exists M>r>0,$ 当 $\left\|\boldsymbol{X}\right\|>M>0$ 时，有

$$\left\|F(\boldsymbol{X})-aG(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{B}\right\|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{3.4}$$

取 $\forall\left\|\boldsymbol{X}_1\right\|>M,\ \left\|\boldsymbol{X}_2\right\|>M$ ，且 $\left\|\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2\right\|<\delta'$ ，则通过(3.3)，(3.4)有

$$\begin{aligned}\left\|F(\boldsymbol{X}_1)-F(\boldsymbol{X}_2)\right\|&=\left\|F(\boldsymbol{X}_1)-aG(\boldsymbol{X}_1)-\boldsymbol{B}+aG(\boldsymbol{X}_1)-aG(\boldsymbol{X}_2)+\boldsymbol{B}+aG(\boldsymbol{X}_2)-F(\boldsymbol{X}_2)\right\|\\&\le\left\|F(\boldsymbol{X}_1)-aG(\boldsymbol{X}_1)-\boldsymbol{B}\right\|+|a|\left\|G(\boldsymbol{X}_1)-G(\boldsymbol{X}_2)\right\|+\left\|F(\boldsymbol{X}_2)-aG(\boldsymbol{X}_2)-\boldsymbol{B}\right\|\\&\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $F(\boldsymbol{X})$ 在集合 $E'=E\cup E_1/B_M(\boldsymbol{O})$ 中一致连续，与 $G(\boldsymbol{X})$ 有相同的一致连续性，存在一个正数 m 使此时集合 $\boldsymbol{B}_{M+m}(\boldsymbol{O})\cap(E\cup E_1)$ 是一个有界闭集，所以 $F(\boldsymbol{X})$ 在其中必定一致连续，所以函数 $F(\boldsymbol{X})$ 与函数 $G(\boldsymbol{X})$ 在集合 $(E_1\cup E)$ 上一致连续。

同理，可以证明函数 $F(\boldsymbol{X})$ 在 $(E_1\cup E)$ 上一致连续，则 $G(\boldsymbol{X})$ 在 $(E\cup E_1)$ 上一致连续，因此，结论得证。

推论 3.3. 设 $E_1,E_2\subset R^n,E=(\partial E_1\cup\partial E_2),\ E_1\cup E\cup E_2=R^n,E_1\cap E\cap E_2=\varnothing,$ 向量函数 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})\in C(E_1),$ 如果

1) $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})$ 在 E 上任何点的极限都存在；

2) 在集合 E_1 上满足：

$$\lim_{X\to\infty}\left(F(\boldsymbol{X})-AG(\boldsymbol{X})\right)=\boldsymbol{B}$$

成立(其中 a 为非零常实数，$\boldsymbol{B}$ 为常值向量)，则 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})$ 在 E_1 上有相同的一致连续性。图 2 给出了推论 3.3.中向量函数定义域示意图。

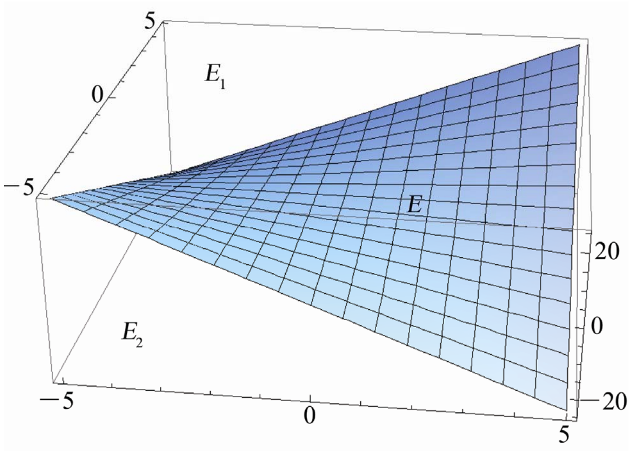

Figure 2. Diagram of domain in corollary 3.3
图 2. 推论 3.3.中向量函数定义域示意图

证明：做辅助函数：

$$F^{\cdot}(\boldsymbol{X})=\begin{cases}F(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{X}\in E_1\\ \lim\limits_{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{A}}F(\boldsymbol{X}),\forall\boldsymbol{A}\in E\end{cases};\ G^{\cdot}(\boldsymbol{X})=\begin{cases}G(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{X}\in E_1\\ \lim\limits_{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{A}}G(\boldsymbol{X}),\forall\boldsymbol{A}\in E\end{cases}$$

由定理 3.3.可知，函数 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})$ 在 $(E_1\cup E)$ 上有相同的一致连续性，故 $F(\boldsymbol{X}),G(\boldsymbol{X})$ 在定义域 E_1 上有相同的一致连续性。

4. 应用举例

本节举例说明本文提出的判断函数一致连续定理的应用。

例 1：定理 2.1. 应用

讨论向量函数 $W(x,y)=\left(\sin x^2\cos y^3,3\cos\left(x^2-y^3-\dfrac{\pi}{2}\right),5\sin\left(x^2+y^3\right)\right)$ 在 R^2 上的一致连续性。

解：因为向量函数 $F=\left(\sin x\cos y,3\cos\left(x-y-\dfrac{\pi}{2}\right),\ 5\sin(x+y)\right)$ 是周期向量函数，令 $G=\left(x^2,y^3\right)$，则据向量函数相对周期定义解得第 k 个相对周期

$$\boldsymbol{T}_k=G^{-1}(k\boldsymbol{T})-G^{-1}\left[(k-1)\boldsymbol{T}\right]=\begin{bmatrix}\sqrt{2k\pi}-\sqrt{2(k-1)\pi}\\ \sqrt[3]{2k\pi}-\sqrt[3]{2(k-1)\pi}\end{bmatrix}$$

从而有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{T}_k\|=0$, 即 $\inf\|\boldsymbol{T}_k\|=0$，故向量函数 $W(x,y)$ 在 R^2 上不一致连续

例 2：定理 3.2. 应用

讨论向量函数 $F(x)=\left(4\ln\dfrac{x+2}{x}+x^2,3x^3+\dfrac{4}{\sqrt{x}},2e^{-x}+4x^4\right)$ 在 $D_1:(0,+\infty)$ 上的一致连续性。

解：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\ln\frac{x+2}{x}+x^2}{x^2}=1$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^{-1/2}+3x^3}{3x^3}=1$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{-x}+4x^4}{4x^4}=1$，所以令 $G(x)=\left(2x^2,3x^3,4x^4\right)$，且 $A=1$，于是有：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(F\left(x\right)-aG\left(x\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\begin{bmatrix}4\ln\frac{x+2}{x}+x^2\\ \frac{4}{\sqrt{x}}+3x^3\\ 2e^{-x}+4x^4\end{bmatrix}^T-\begin{bmatrix}x^2\\3x^3\\4x^4\end{bmatrix}^T\right)=\lim_{x\to+\infty}\begin{pmatrix}4\ln\frac{x+2}{x}\\ \frac{4}{\sqrt{x}}\\ 2e^{-x}\end{pmatrix}^T=\boldsymbol{O},$$

所以函数$F\left(x\right)$在$D_1:\left(0,+\infty\right)$与函数$G\left(x\right)$有相同的一致连续性。又函数$G\left(x\right)=\left(x^2,3x^3,4x^4\right)$在$D_1:\left(0,+\infty\right)$上非一致连续，所以函数$F\left(x\right)=\left(4\ln\frac{x+2}{x}+x^2,\ 3x^3+\frac{4}{\sqrt{x}},\ 2e^{-x}+5x^4\right)$在$D_1:\left(0,+\infty\right)$上也非一致连续。

例 3：定理 3.2. 应用

讨论向量函数：$F\left(x\right)=\left(3\sqrt{x+3},\ln\left(x+6\right),4\sin x\right)$在$D_1:\left(0,+\infty\right)$上的一致连续性。

解：因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt{\left(x+3\right)}}{\sqrt{x}}=3$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x-7\right)}{3^{-1}\ln x}=3$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4\sin x}{\frac{4}{2}\sin x}=3$，所以令$G\left(x\right)=\left(\sqrt{x},\frac{1}{2}\ln x,\ \frac{4}{3}\sin x\right)$且$A=3$，于是有：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(F(x)-aG(x)\right)=\boldsymbol{O},$$

因此，函数$F\left(x\right)$与函数$G\left(x\right)$在$D_1:\left(0,+\infty\right)$上有相同的一致连续性。而函数$G\left(x\right)=\left(\sqrt{x},\frac{1}{3}\ln x,\frac{4}{3}\sin x\right)$在$D_1:\left(0,+\infty\right)$上一致连续，所以函数$F\left(x\right)=\left(3\sqrt{x+3},\ln\left(x+6\right),4\sin x\right)$在$D_1:\left(0,+\infty\right)$上一致连续。

例 4：定理 3.2. 的应用

讨论函数$F(x,y)=\left(\frac{x+y}{x+2y}\sin\frac{1}{xy},\sqrt{x^4y^6+x+\sin x},\frac{1}{\sqrt{xy}}+\ln\frac{y^3+\cos x}{y^3+2}+e^{xy}\right)$在$R^2$上的一致连续性。

解：因为

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{\frac{x+y}{x+2y}\sin\frac{1}{xy}}{\sin\frac{1}{xy}}=1,\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{\sqrt{x^4y^6+x+\sin x}}{x^2y^3}=1,\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{\frac{1}{\sqrt{xy}}+\ln\frac{y^3+\cos x}{y^3+2}+e^{xy}}{e^{xy}}=1;$$

所以令$G\left(x,y\right)=\left(\sin\frac{1}{xy},x^2y^3,e^{xy}\right)$且$a=1$，于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(F\left(x,y\right)-aG\left(x,y\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\begin{pmatrix}\frac{x+y}{x+2y}\sin\frac{1}{xy}\\ \sqrt{x^4y^6+x+\sin x}\\ \frac{1}{\sqrt{xy}}+\ln\frac{y^3+\cos x}{y^3+2}+e^{xy}\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}\sin\frac{1}{xy}\\ x^2y^3\\ e^{xy}\end{pmatrix}^T\right)=\boldsymbol{O}$$

因此，函数$F\left(x,y\right)$与函数$G\left(x,y\right)$在$D_1:\left(0,+\infty\right)$上有相同的一致连续性.而函数$G\left(x,y\right)$在定义域上不一致连续，故原函数在定义域上不一致连续。

5. 结论

本文研究了多种类型区域向量函数一致连续的判别方法，本文的结论丰富了函数一致连续性的理论结果。

参考文献 (References)

[1] 杨小远, 马建华, 张立文等. 关于函数一致连续性的判别方法研究[J]. 河南科学, 2010, 28(6): 635-637.
[2] 杨小远, 王玮彬, 张立文等. 振荡函数一致连续性研究[J]. 河南科学, 2010, 28(8): 899-900.
[3] 杨小远, 王玮彬, 马建华. 多元振荡函数一致连续性研究[J]. 河南科学, 2010, 28(9): 1061-1064.
[4] 杨小远, 王玮彬, 马建华. 多元函数一致连续的比较判别方法研究[J]. 河南科学, 2010, 28(12): 1501-1503.

