Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 152-155
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.23024 Published Online July 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

Local *E*-Automorphisms on Effect Algebras

Haiyan Zhang, Xiaohui Wang

Department of Mathematics and Statistics, Chifeng College, Chifeng
Email: haiyanhaozhongguo@163.com

Received: Apr. 29th, 2012; revised: May 17th, 2012; accepted: May 28th, 2012

Abstract: In this paper, it is proved that each surjective two local *E*-automorphism on effect algebras $E(H)$ of Hilbert space *H* which dimension is equal to or more than three is *E*-automorphism and each surjective and linear two local *E*-automorphism on real space $B_S(H)$ is not only a Jordan automorphism but also has the form $\varphi(A)=UAU^*$, where *U* is unitary or anti-unitary operator.

Keywords: Two-Local *E*-Automorphism; *E*-Automorphism; Jordan Automorphism; Effect Algebra

效应代数的局部 *E*-自同构

张海燕，王晓慧

赤峰学院数学与统计学院，赤峰
Email: haiyanhaozhongguo@163.com

收稿日期：2012 年 4 月 29 日；修回日期：2012 年 5 月 17 日；录用日期：2012 年 5 月 28 日

摘　要：本文证明了维数大于等于 3 的可分 Hilbert 空间 *H* 的效应代数 $E(H)$ 上的每个满的 2-局部 *E*-自同构是 *E*-自同构以及 Jordan 代数 $B_S(H)$ 上线性满的 2-局部 *E*-自同构是 Jordan 自同构，并且都具有 $\varphi(A)=UAU^*$ 的形式，其中 *U* 是酉算子或反酉算子。

关键词：2-局部 *E*-自同构；*E*-自同构；Jordan 自同构；效应代数

1. 引言

效应代数是算子代数中的重要研究对象之一，它与量子力学联系非常密切。我们不仅可以通过量子力学的一些性质得出与之相对应的数学结果，也可以通过数学中的一些结论来反映某些物理特性[1,2]。自从 M. Planck 于 1900 年首先提出了量子的概念以来，经过众多物理学家的不断努力，量子力学一出现就成为科学不可缺少的部分。并有无数成功的例子，包括原子结构、恒星核聚变、自然界基本粒子等几乎所有方面。量子力学是一个数学框架或一套构造物理学理论的规则。由于量子力学中的随机事件不能用 Kolmogorovian 概率论中随机事件的结构来描述、因此对量子力学的系统中随机事件的数学描述就成了量子理论研究的重要问题之一，基于上述原因，以杰出数学家 Birkhoff 和 Von Neumann 为代表众多学者提出了不同模型来反映量子力学的各个方面。Hillbert 空间是量子力学的一个基本数学模型。Hillbert 空间中量子效应表示 *H* 上所有大于等于 0 小于等于 *I* 的有界线性算子，所有这样的元叫做效应元，用 $E(H)$ 表示，也称 $E(H)$ 为 *H* 上的效应代数。效应的概念在量子力学中起着重要作用。

量子力学中重要内容之一就是量子测量的研究，同时量子测量也是量子力学的一个基础。在量子测量理论中，一个结果完全正确的测量称为精确测量。但是在实际测量中不可能得到精确测量，获得的都是非精确测量。

以 Hillbert 空间为模型，一个精确测量就是一个投影算子测量，相应的投影算子就称为精确效应，一个非精确测量就是一个正算子测量， $E(H)$ 就是正算子测量的值域。在对正算子测量的研究中，1994 年美国数学家 Foulis 和 Bennentt 引入了效应代数的概念来作为量子计算，量子测量的数学模型。从而引起了很多数学家和物理学家的极大兴趣。对效应代数做了大量的工作和研究，与效应代数相关的一系列概念和方法如 D-集、D-集的张量积、理想、虑子、商效应代数、拟效应代数、效应代数的群表示等都得到了极大的发展。在量子测量，量子计算等方面，效应代数发挥了重要的作用。

在效应代数研究中，很重要一部分就是对在 Hillbert 空间 H 上的效应代数 $E(H)$ 的研究。$E(H)$ 上我们可以定义不同的运算，从而可以得到相应的各种映射。所以对于效应代数 $E(H)$ 上的同构以及局部同构是一类重要问题。近年来 Lajos Molnár 通过保持 $E(H)$ 上效应元的偏序、共存性零乘积、以及保持 $E(H)$ 上的各种运算，如凸组合运算，非结合运算等性质刻画了 $E(H)$ 上的同构及序列自同构的问题。同时他在量子系统的局部自同构方面做了许多工作，他在[3]中证明了 $B(H)$ 中所有幂等元组成的集合 $SP(H)$ 上的连续 2-局部自同构是自同构。

局部映射问题主要是算子代数间的映射在每一点的局部性质(如局部导子，局部自同构，局部等距等)能否决定该映射的某种整体性质。所以效应代数 $E(H)$ 上的局部同构研究在量子力学中固然起着重要作用。局部映射问题最早是由 Kadison Larson 和 Sourour 等人在 1990 年独立开始研究的。为研究 vonNeumann 代数的上同调问题，Kadison 在[4]中提出了局部导子的概念。随后 Semrl 在[5]中引入了 2-局部导子和 2-局部自同构的概念。设 M 为算子集合， ϕ 为 M 到 M 的映射，如果对于任意 $a,b\in M$ ，总存在一个 *-自同构(导子) $\phi_{a,b}$ ，使得 $\phi_{a,b}(a)=\phi(a)$ $\phi_{a,b}(b)=\phi(b)$，则称 ϕ 为 2-局部 *-自同构(导子)。他证明了对于可分无限 Hillbert 空间 H，$B(H)$ 上的每个 2-局部自同构(导子)是自同构(导子)。

2-局部自同构它可以在不同的集合和结构上定义，而不是仅仅在代数上。受其启发，我们研究了效应代数 $E(H)$ 上不同于序列积运算的另外一种运算，即 2-局部 *E*-自同构问题，以及 Jordan 代数 $B_S(H)$ 上的 2-局部 *E*-自同构，证明了 $E(H)$ 上的每个满的 2-局部 *E*-自同构是 *E*-自同构以及 Jordan 代数 $B_S(H)$ 上线性满的 2-局部 *E*-自同构是 Jordan 自同构，并且都具有 $\varphi(A)=UAU^*$ 的形式，其中 U 是酉算子或反酉算子。

在 Hillbert 空间 H 中，量子效应表示 H 上所有大于等于 0 小于等于 I 的有界线性算子，所有这样的元叫做效应元，用 $E(H)$ 表示。$P(H)$ 表示 H 上所有投影。本文假设可分 Hilbert 空间 H 的维数是大于等于 3 的。

2. 2-局部 *E*-自同构的定义及相关结果

定义 1.1[6] 下面给出 $E(H)$， $E(A)$上的 *E*-自同构的定义。

设 $M=E(H)$ 或 $E(A)$，设 φ： 为 $M\to M$ 的映射。如果对于任意 $E,F\in M$ ，

1) 若 $E+F\in M$ ，则当且仅当 $\phi(E)+\phi(F)\in M$ ，

2) $\phi(E+F)=\phi(E)+\phi(F)$，则称 ϕ 为 *E*-自同构。

定义 1.2 设 $M=E(H)$，或 $M=B_S(H)$。

设 φ：$M\to M$ 的映射，对任意 $A,B\in M$，都存在 M 的一个 *E*-自同构 $\phi_{A,B}$，使得 $\phi(A)=\phi_{A,B}(A)$，$\phi(B)=\phi_{A,B}(B)$。我们称 ϕ 为 2-局部 *E*-自同构。

定理 1.3 设 $\phi: E(H)\to E(H)$ 是满的 2-局部 *E*-自同构，则 ϕ 为 *E*-自同构。

证明：

1) 首先可证 ϕ 为单射。

如果 $\phi(A)=\phi(B)$，则存在 $E(H)$ 的一个 *E*-自同构 $\phi_{A,B}$，使得 $\phi(A)=\phi_{A,B}(A)$， $\phi(B)=\phi_{A,B}(B)$。所以 $\phi_{A,B}(A)=\phi_{A,B}(B)$，因为 $\phi_{A,B}$ 为单射，所以 $A=B$ 。

2) ϕ 为双边保序的。

如果 $A\le B$，只需证明 $\phi(A)\le\phi(B)$。因为 $\phi(A)=\phi_{A,B}(A)$，$\phi(B)=\phi_{A,B}(B)$，又 $\phi_{A,B}$ 是双边保序的，$\phi_{A,B}(A)\le\phi_{A,B}(B)$，即 $\phi(A)\le\phi(B)$。反之，如果 $\phi(A)\le\phi(B)$，则由 $\phi(A)=\phi_{A,B}(A)$，$\phi(B)=\phi_{A,B}(B)$，可得 $\phi_{A,B}(A)\le\phi_{A,B}(B)$，进而可得 $A\le B$。

3) ϕ 是保正交补的，对任意 $A,A'\in E(H)$，$A+A'=I$，则存在 $E(H)$ 的一个 *E*-自同构 $\phi_{A,A'}$ 使得 $\phi(A)+\phi(A')=\phi_{A,A'}(A)+\phi_{A,A'}(A')=\phi_{A,A'}(A+A')=\phi_{A,A'}(I)=I$。所以 $\phi(A')=I-\phi(A)$。综上可知 ϕ 是双边保序保正交补的双射，所以 ϕ 为正交序自同构。由 Ludwig 的结论[7]可知，存在 *H* 上的酉算子或反酉算子 *U*，使得对任意 $A\in E(H)$，有 $\varphi(A)=UAU*$ 成立。

4) 下证 ϕ 为 *E*-自同构。

如果 $A+B\in E(H)$，则 $\phi(A+B)=U(A+B)U^*=UAU^*+UBU^*=\phi(A)+\phi(B)$，所以 $\phi(A)+\phi(B)\in E(H)$。反之，如果 $\phi(A)+\phi(B)\in E(H)$，则 $\phi(A),\phi(B)\in E(H)$，又因为 ϕ 为满射，所以分别存在 $C,D\in E(H)$，使得 $\phi(A)=\phi(C)$，$\phi(B)=\phi(D)$。因为 ϕ 为单射，所以 $A=C,B=D$。又 $\phi(C)=UCU^*$，$\phi(D)=UDU^*$，因此 $\phi(C)+\phi(D)=UCU^*+UDU^*=U(C+D)U^*=\phi(C+D)$。进而可得 $A+B=C+D\in E(H)$，且 $\phi(A+B)=\phi(A)+\phi(B)$，综上 ϕ 为 *E*-自同构。

引理 1.4 设 $\phi:B_S(H)\to B_S(H)$ 是实线性映射，且 ϕ 为满的 2-局部 *E*-自同构，则 $\phi|_{E(H)}$ 为满的 2-局部 *E*-自同构。

证明：$A\in B_S(H),0\le A\le I$，则存在 $B_S(H)$ 的一个 *E*-自同构 $\phi_{A,I}$，使得 $\phi_{A,I}(A)=\phi(A)$ $\phi_{A,I}(I)=\phi(I)$。又 $\phi_{A,I}$ 是保序的，所以 $\phi(A)=\phi_{A,I}(A)\le\phi_{A,I}(I)=\phi(I)=I$，同理可证 $\phi(A)\ge 0$。反之，如果 $0\le\phi(A)\le I$，则可得 $0\le A\le I$。综上可得 $\phi|_{E(H)}$ 为满的 2-局部 *E*-自同构。

定理 1.5 设 $\phi:B_S(H)\to B_S(H)$ 是实线性映射，且 ϕ 为满的 2-局部 *E*-自同构，则存在 *H* 上的酉算子或反酉算子 *U*，使得对任意 $A\in B_S(H)$，有 $\phi(A)=UAU^*$ 成立。

证明：由引理 1.4 可知，$\phi|_{E(H)}$ 为满的 2-局部 *E*-自同构，又由定理 1.3 证明可知，存在酉算子或反酉算子 *U*，使得对任意 $A\in E(H)$，有 $\phi(A)=UAU^*$ 成立。

如果 $A\in B_S(H)$，且 $A\ge 0$，则 $0\le A/\|A\|\le I$。所以 $\phi(A/\|A\|)=U(A/\|A\|)U^*$，因为 ϕ 为实线性的，所以 $1/\|A\|\phi(A)=UA/\|A\|U^*$，即 $\varphi(A)=UAU^*$，综上对任意 $A\ge 0$，$\phi(A)=UAU^*$。又对任意 $A\in B_S(H)$，$A=A^+-A^-$，A^+ 和 A^- 都是正的。$\phi(A^+)=UA^+U^*$，$\phi(A^-)=UA^-U^*$。且 ϕ 为实线性的，所以有 $\phi(A)=\phi(A^+-A^-)=\phi(A^+)-\phi(A^-)=UA^+U^*-UA^-U^*=U(A^+-A^-)U^*=UAU^*$ 综上结论成立。

推论 1.6 设 $\phi:B_S(H)\to B_S(H)$ 是实线性映射，且 ϕ 为满的 2-局部 *E*-自同构，则 ϕ 为 Jordan 自同构。

证明：由定理 1.5 知，ϕ 为双射，且存在酉算子或反酉算子，使得对任意 $A\in B_S(H)$，有 $\phi(A)=UAU^*$ 成立。因为对任意 $A,B\in B_S(H)$，有 $(AB+BA)/2\in B_S(H)$，所以有

$$\begin{aligned}\phi(AB+BA)/2&=U(AB+BA)/2U^*=UABU^*/2+UBAU^*/2\\&=UAU^*UBU^*/2+UBU^*UAU^*/2=1/2\big(\phi(A)\phi(B)+\phi(B)\phi(A)\big)\end{aligned}$$

综上可得 ϕ 为 Jordan 自同构。

推论 1.7 设 $\phi:E(H)\to E(H)$ 是满的 2-局部 *E*-自同构，则 ϕ 为 *E*-自同构，则 ϕ 可以延拓到 $\psi:B(H)\to B(H)$ 的*-自同构或*-反自同构。

证明：由定理 1.3 知，ϕ 是 *E*-自同构。由[6]中性质 2.8.3 知，ϕ 可以延拓到 $\psi:B(H)\to B(H)$ 上的 Jordan 自同构，由 Herstein 在[1]中的结论可知，ψ 是*-自同构或*-反自同构，且存在 *H* 上的酉算子或反酉算子 *U*，使得对任意 $A\in B(H)$，有 $\psi(A)=UAU^*$ 成立。

参考文献 (References)

[1] P. Busch, M. Grabowski and P. J. Lahti. Operational quantum physics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1995.

[2] K. Kraus. State, effects and operations. Lecture Notes in Physics, Vol. 190. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1983.
[3] L. Molnár. Local automorphisms of some quantum mechanical structures. Journal of Mathematical Physics, 2001, 58(2): 91-100.
[4] R. V. Kadison. Local derivations. Journal of Algebra, 1990, 130(2): 494-509.
[5] P. Semrl. Local automorphisms and derivations on B(H). Proceedings of the American Mathematical Society, 1997, 125(9): 183-193.
[6] L. Molnár. Sequential isomorphismsbetween the sets of Von Neumann algebra effects. Acta Mathematica Scientia, 2003, 69(2-3): 755-772.
[7] G. Ludwig. Fundation of quantum mechanics. Berlin: Springer Verlag, 1983.

