

Global Bifurcation of Positive Solutions to a Predator-Prey Model*

Wencong Chang[#], Hua Nie

College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an
Email: [#]changwencong@163.com

Received: Aug. 14th, 2012; revised: Aug. 29th, 2012; accepted: Sep. 7th, 2012

Abstract: This paper deals with a Prey-Predator model with Beddington-DeAngelis and Leslie functional response. First, sufficient and necessary conditions for coexistence solutions of the steady-state are discussed by the global bifurcation theory and the estimate of eigenvalues, and the structure of global bifurcation branch is investigated. It turns out that when a , the growth rate of prey, lies between λ_1 and $\lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, the continuum of nontrivial solution is bounded and joins two branches of semi-trivial solutions. This bifurcation branch goes to infinity with parameter b when a is larger than $\lambda_1 + \frac{a_2}{k}$ (see Figure 1). Second, the stability for the coexistence solutions is given by perturbation technique.

Keywords: Prey-Predator; The Bifurcation Theory; Perturbation Technique; Positive Steady-State Solution

一类捕食食饵模型正解的整体分歧*

常文丛[#], 聂 华

陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安
Email: [#]changwencong@163.com

收稿日期: 2012年8月14日; 修回日期: 2012年8月29日; 录用日期: 2012年9月7日

摘 要: 本文考察一类带 Beddington-DeAngelis 和 Leslie 反应项的捕食食饵模型。首先, 采用全局分歧理论和特征值估计研究了平衡态共存解存在的充要条件, 并刻画了共存解分支的全局结构。结果表明, 当被捕食物种的生长率 $a \in \left(\lambda_1, \lambda_1 + \frac{a_2}{k} \right)$ 时, 共存解分支有界, 且连接了两半平凡的解分支; 当 $a \geq \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$ 时, 共存解分支最终沿参数 b 趋于无穷(见图 1)。其次, 采用摄动理论分析了共存解分支的稳定性。

关键词: 捕食 - 食饵模型; 分歧理论; 摄动理论; 正平衡解

1. 引言

本文研究如下反应扩散系统

$$\begin{aligned} u_t - d_1 \Delta u &= \left(a - a_1 u - \frac{a_2 v}{1 + mu + kv} \right) u, & x \in \Omega, \\ v_t - d_2 \Delta v &= \left(b - \frac{b_1 v}{1 + hu} \right) v, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & & x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.1}$$

*资助信息: 国家自然科学基金(11001160), 陕西省自然科学基金基础研究计划(2011JQ1015)。

[#]通讯作者。

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) 为有界区域, 且具有光滑边界. Δ 为 Laplace 算子; u, v 为食饵和捕食者的密度, $a, a_1, a_2, b, b_1, d_1, d_2, m, k, h$ 均为常数, 且 $a, a_1, a_2, b, b_1, d_1, d_2 > 0$, $m, k, h \geq 0$, 上述参数相应的生物意义见文[1,2]。反应函数 $\frac{u}{1+mu+kv}$ 最早由 Beddington^[3]和 DeAngelis^[4]给出, 描述食饵与捕食物种间的相互作用, 被称为 Beddington-DeAngelis (B-D)反应函数。与 Holling-Tanner 反应函数相比, B-D 函数分母中多了一项 kv , 刻画捕食者与食饵之间的相互干涉, 更详细的生物背景参见文[5]。反应项 $\frac{v^2}{1+hu}$ 被称为改进的 Leslie 反应项^[6], 刻画了捕食者在其喜爱的食物缺乏的情况下, 不得不捕食其它食饵, 从而导致其数量蒙受一定损失。

如果 $k = 0$ 且 $m > 0$, 那么(1.1)式即为带 Holling-Tanner 和 Leslie 反应项的捕食 - 食饵模型。文[7]中, Aziz-Alaoui 等研究了该类模型正解的有界性、正不变集的存在性等。最近, Nie 等在文[8]中又研究了该模型带有脉冲项的情况。文[9]研究了带 B-D 和 Leslie 反应项的常微捕食 - 食饵模型解的存在性和稳定性。

本文取扩散系数 $d_1 = d_2 = 1$, 主要研究(1.1)对应的平衡态系统

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(a - a_1 u - \frac{a_2 v}{1 + mu + kv} \right) u, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = \left(b - \frac{b_1 v}{1 + hu} \right) v, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

正解的存在性及参数对模型正解全局结构的影响。为此, 首先引入一些记号和一些已知结论。设 λ_1 为问题 $-\Delta u = \lambda_1 u, x \in \Omega; u|_{\partial\Omega} = 0$ 的主特征值, 相应的主特征函数为 χ_1 , 且 $\|\chi_1\|_\infty = 1, \chi_1 > 0$ 。由文[10]知, 如果 $a \leq \lambda_1$, 则零为如下边值问题

$$-\Delta u = au - a_1 u^2, x \in \Omega; u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.3)$$

的惟一非负解; 如果 $a > \lambda_1$, 则(1.3)存在惟一正解, 记为 θ_a , 且有如下结论成立。

引理 1.1^[10] 若 $a > \lambda_1$, 则(1.3)存在惟一正解, 记为 θ_a , 且 θ_a 满足以下性质:

- (i) $\frac{(a - \lambda_1)\chi_1}{a_1} \leq \theta_a \leq \frac{a}{a_1}$;
- (ii) θ_a 在 $a \in (\lambda_1, +\infty)$ 上连续可微且关于 a 逐点单调递增;
- (iii) $\lim_{a \rightarrow \lambda_1} \theta_a = 0$ 在 $x \in \bar{\Omega}$ 上一致成立;
- (iv) 记(1.3)在 θ_a 处的线性化算子为 $L_a = -\Delta + 2a_1\theta_a - a$, 则 L_a 的所有特征值都严格大于零。

注 1.1 对如下单物种的平衡态问题

$$-\Delta v = bv - b_1 v^2, x \in \Omega; v|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.4)$$

有类似的结论成立。为后面使用方便, 记(1.4)的惟一正解为 θ_b , 相应的线性化算子为 $L_b = -\Delta + 2b_1\theta_b - b$ 。同理对于

$$-\Delta v = bv - \frac{a_1 b_1}{a_1 + ha} v^2, x \in \Omega; v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.5)$$

当 $b > \lambda_1$ 时, 存在惟一正解, 记为 v_b 。

显然, 系统(1.2)存在非负平凡解分支 $S_0 = \{(b, 0, 0): b \in \mathbb{R}\}$; 当 $b > \lambda_1$ 时, 有非负半平凡解分支 $S_1 = \{(b, 0, \theta_b): b > \lambda_1\}$; 当 $a > \lambda_1$ 时, 存在另一非负半平凡解分支 $S_2 = \{(b, \theta_a, 0): b \in \mathbb{R}\}$ 。下面固定 $a > \lambda_1$, 以 b 为分歧参数研究(1.2)正解分支的全局结构, 本文所得主要结论如下。

定理 1.1 假设 $a > \lambda_1$ 固定, 则存在(1.2)正解的连续分支 Γ , 它发自分歧点 $(\lambda_1, \theta_a, 0)$, 且 Γ 具有如下性质:

- (i) 若 $\lambda_1 < a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, 则分歧曲线 Γ 与半平凡分支 $S_1 = \{(b, 0, \theta_b): b > \lambda_1\}$ 相交于点 $(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}})$, 其中 \hat{b} 由

$a = \lambda_1 \left(\frac{a_2 \theta_b}{1 + k \theta_b} \right)$ 惟一确定, 且 $\{b: (b, u, v) \in \Gamma\} \supset (\lambda_1, \hat{b})$ 。又若 $2ka_1 > ma_2$, 则有 $\{b: (b, u, v) \in \Gamma\} = (\lambda_1, \hat{b})$ 。

(ii) 若 $a \geq \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, 则分枝曲线 Γ 沿 b 延伸到无穷, 且 $\{b: (b, u, v) \in \Gamma\} = (\lambda_1, +\infty)$ 。而且, 对任意

$(b_n, u_n, v_n) \in \Gamma$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n(x)\|_\infty = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u_n - \theta_{\frac{a_2}{a - \frac{a_2}{k}}} \right\|_{C^1} = 0, x \in \bar{\Omega}$ 。其中 $\theta_{\frac{a_2}{a - \frac{a_2}{k}}}$ 为如下问题

$$-\Delta u = \left(a - \frac{a_2}{k} \right) u - a_1 u^2, \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.6}$$

的惟一正解。特别地, 当 $a = \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$ 时, $\theta_{\frac{a_2}{a - \frac{a_2}{k}}} = 0$ 。

定理 1.2 若 $2ka_1 > ma_2$, 则(1.2)存在正解的充要条件为 $a > \lambda_1 \left(\frac{a_2 \theta_b}{1 + k \theta_b} \right), b > \lambda_1$ 。

注 1.2 定理 1.1 表明, 发自分歧点 $(\lambda_1, \theta_a, 0)$ 的正解分支 Γ 的结构有两种情形, 见图 1。对于 $\lambda_1 < a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, 分枝曲线 Γ 从点 $A(\lambda_1, \theta_a, 0)$ 出发连接到 S_1 上的点 $B(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}})$, 此时 Γ 有界。若 $2ka_1 > ma_2$, Γ 在 b 轴的投影为 $\{b: (b, u, v) \in \Gamma\} = (\lambda_1, \hat{b})$, 这里 \hat{b} 由 $a = \lambda_1 \left(\frac{a_2 \theta_b}{1 + k \theta_b} \right)$ 惟一确定, 由引理 2.3, \hat{b} 随 a 的增大严格增大。当 $a = \lambda_1$ 时, Γ 缩于点 $C(\lambda_1, 0, 0)$ 。对于 $a \geq \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, Γ 从点 $A'(\lambda_1, \theta_a, 0)$ 出发沿 b 延伸到无穷, 即对任意 $b > \lambda_1$, (1.2) 均存在正解, 而且当 b 趋于无穷时, 捕食者的浓度也趋于无穷, 食饵的浓度趋于 $\theta_{\frac{a_2}{a - \frac{a_2}{k}}}$, 此时 Γ 长度达到无穷大。

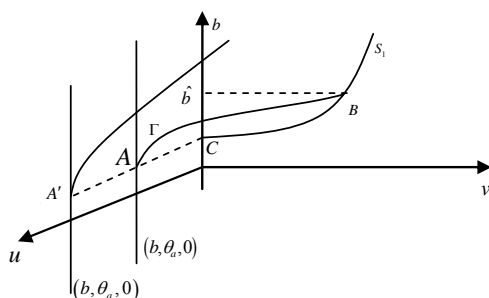


Figure 1. Global bifurcation of positive solutions
图 1. 正解分枝曲线

本文主要内容如下: 第 2 节介绍一些基本的理论知识以及(1.2)正解的先验估计; 第 3 节将 b 当作分枝参数, 利用分枝理论研究(1.2)正平衡解存在的充要条件及分枝曲线的全局结构, 并给出定理 1.1 的证明。最后, 采用扰动理论分析了分歧解的稳定性。

2. 预备知识

首先给出一些记号, $C^1(\bar{\Omega}, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间, 其中 $\|\cdot\|$ 为 C^1 范数, 定义 $C_b^1(\bar{\Omega}) = \{u \in C^1(\bar{\Omega}): u|_{\partial\Omega} = 0\}$ 。令 $X = C_b^1(\bar{\Omega}) \times C_b^1(\bar{\Omega})$, $X_1 = [C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})] \cap X$, $Y_1 = C^\alpha \times C^\alpha$ 。 $i: X_1 \rightarrow Y_1$ 的包含映射。

引理 2.1^[11] 考察特征值问题

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u, \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.1}$$

其中, $q(x) \in C(\bar{\Omega})$, 则(2.1)存在一列特征值 $\lambda_i(q)$ ($i = 1, 2, \dots$) 使 $0 < \lambda_1(q) < \lambda_2(q) \leq \dots \rightarrow \infty$ 成立, 对应的特征函数为 ϕ_1, ϕ_2, \dots , 其中 $\phi_1 > 0, x \in \Omega$ 。而且有如下比较原理成立: 若 $q(x) \leq \tilde{q}(x)$, 则 $\lambda_n(q) \leq \tilde{\lambda}_n(\tilde{q}), x \in \bar{\Omega}, n = 1, 2, \dots$ 。又若 $q(x) \neq \tilde{q}(x)$, 则 $\lambda_n(q) < \tilde{\lambda}_n(\tilde{q}), x \in \bar{\Omega}, n = 1, 2, 3, \dots$ 。

由上下解原理和 Green 公式, 易得(1.2)参数和非负解的先验估计如下。

引理 2.2 若 (u, v) 为(1.2)的非负解, 且 $u \neq 0, v \neq 0$, 则有如下结论成立:

(i) $u \leq \theta_a, \theta_b \leq v \leq v_b, \frac{(b-\lambda_1)\chi_1}{bb_1} \leq \frac{v}{b} \leq \frac{a_1+ah}{a_1b_1}$;

(ii) $a > \lambda_1, b > \lambda_1$;

(iii) 又若 $2ka_1 > ma_2$, 则 $a > \lambda_1 \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right), b > \lambda_1$;

(iv) 又若 $a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, 则存在常数 $M > 0$, 使得 $b \leq M$ 。

注 2.1 引理 2.2(ii)说明当食饵或捕食者的出生率很小时, 它们不能共存。

为分析分歧曲线的结构, 研究特征值问题

$$-\Delta u + \frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b}u = \mu u, x \in \Omega; u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.2}$$

的主特征值 $\lambda_1 \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right)$ 的性质。与文献[12]引理 3.4 相同方法可以证明如下引理成立。

引理 2.3 (2.2)的主特征值 $\lambda_1 \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right)$ 具有以下性质:

(i) $\lambda_1 \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right) \in C([\lambda_1, +\infty))$, 且当 $b = \lambda_1$ 时, $\lambda_1 \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right) = \lambda_1$;

(ii) $\lambda_1 \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right) \in C^1((\lambda_1, +\infty))$, 且 $\lambda_1' \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right) > 0$, 这里 $\lambda_1' \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right)$ 表示 $\lambda_1 \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right)$ 关于 b 的导数;

(iii) $\lim_{b \rightarrow +\infty} \lambda_1 \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right) = \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$ 。

注 2.2 由引理 2.3, 函数 $\lambda_1 \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right)$ 的图像大致如图 2 所示。

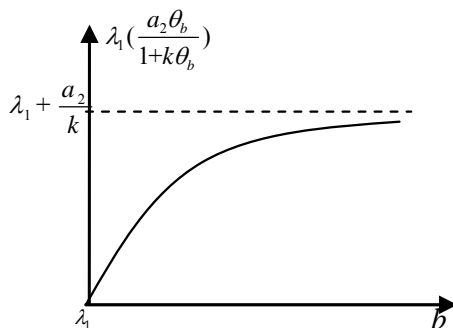


Figure 2. Diagram of $\lambda_1 \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right)$

图 2. 特征值 $\lambda_1 \left(\frac{a_2\theta_b}{1+k\theta_b} \right)$ 的图形

3. 正解全局分歧的结构与稳定性

设 $a > \lambda_1$ 固定, 考察(1.2)沿半平凡分支 $S_2 = \{(b, \theta_a, 0) : b \in R\}$ 产生的分歧正解及稳定性. 令 $\omega = \theta_a - u, \chi = v$, 则 (ω, χ) 满足

$$\begin{aligned} \omega &= aK\omega - 2a_1K(\theta_a\omega) + a_2K\left(\frac{\theta_a\chi}{1+m\theta_a}\right) + KF_1(\omega, \chi), \quad x \in \Omega, \\ \chi &= bK\chi + KF_2(\omega, \chi), \quad x \in \Omega, \\ \omega &= \chi = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 K 为 $-\Delta$ 在 $C_B^1(\bar{\Omega})$ 上的逆算子, $F_1(\omega, \chi) = a_1\omega^2 - \frac{a_2\theta_a}{1+m\theta_a}\chi + \frac{a_2(\theta_a - \omega)\chi}{1+m(\theta_a - \omega) + k\chi}$, $F_2(\omega, \chi) = -\frac{b_1\chi^2}{1+h(\theta_a - \omega)}$.

令 $F = (F_1, F_2)$, 则 F 连续, $F(0,0) = 0$, 且其 Frechet 导数 $D_{(\omega, \chi)}F(0,0) = 0$. 定义 $T: R^+ \times X \rightarrow X$ 为

$$T(b, \omega, \chi) = \left(aK\omega - 2a_1K(\theta_a\omega) + a_2K\left(\frac{\theta_a\chi}{1+m\theta_a}\right) + KF_1(\omega, \chi), bK\chi + KF_2(\omega, \chi) \right),$$

且 $H(b, \omega, \chi) = (\omega, \chi) - T(b, \omega, \chi)$, 则 $T(b, \omega, \chi)$ 为 X 上可微的紧算子, $H(b, \omega, \chi)$ 为 C^1 连续的, 且 $H(b, 0, 0) = 0$ 显然, 满足 $0 \leq \omega \leq \theta_a, \theta_b \leq \chi \leq v_b$, 且 $H(b, \omega, \chi) = 0$ 的解为系统(3.1)的非负解.

定理 3.1 假设 $a > \lambda_1$, 则 $(\lambda_1, \theta_a, 0)$ 为(1.2)的分歧点, 并且存在 $0 < \varepsilon \ll 1$, 当 $b \in (\lambda_1, \lambda_1 + \varepsilon)$ 时, (1.2)存在正平衡解.

证明 考察在点 $(b, \omega, \chi) = (\lambda_1, 0, 0)$ 的分歧. 令 $L_0(b, 0, 0) = D_{(\omega, \chi)}H(b, 0, 0)$ 为 H 关于 (ω, χ) 在 $(b, 0, 0)$ 处的 Frechet 导数, 易验证核空间 $N(L_0(\lambda_1, 0, 0)) = span\{(\omega_1, \chi_1)\}$, 值域 $R(L_0(\lambda_1, 0, 0)) = \{(\omega, \chi) \in X : \int_{\Omega} \chi \chi_1 dx = 0\}$. 其中 $\omega_1 = L_a^{-1}\left(\frac{a_2\theta_a}{1+m\theta_a}\chi_1\right)$, 故 $\dim N(L_0) = \text{codim}R(L_0) = 1$. 而且

$$\begin{aligned} L_1(\lambda_1, 0, 0)(\omega_1, \chi_1) &= D_{b(\omega, \chi)}^2 H(\lambda_1, 0, 0)(\omega_1, \chi_1) \\ &= (0, -\chi_1) \notin R(L_0(\lambda_1, 0, 0)). \end{aligned}$$

于是, 由文[13]的定理 13.5 可知, (1.2)在点 $(\lambda_1, \theta_a, 0)$ 附近存在一条光滑的正解分支曲线

$$\Gamma_{\delta} := \left\{ (b(s), \theta_a - s(\omega_1 + \phi(s)), s(\chi_1 + \psi(s))) : 0 < s < \delta \right\},$$

且满足 $b(0) = \lambda_1, \phi(0) = \psi(0) = 0, \phi(s), \psi(s) \in \{(\omega_1, \chi_1)\}^{\perp}$. 将

$$(b(s), u(s), v(s)) = (b(s), \theta_a - s(\omega_1 + \phi(s)), s(\chi_1 + \psi(s)))$$

代入(1.2), 得 $b(s)$ 关于 s 在 $s = 0$ 处的导数 $b'(0) > 0$. 故 Γ_{δ} 在分歧点 $(\lambda_1, \theta_a, 0)$ 向右分出, 从而定理 3.1 成立.

下面研究定理 3.1 所得分歧解的稳定性, 为此首先给出几个引理. 由定理 3.1 的证明可知如下引理成立.

引理 3.1.0 为 $L_0(\lambda_1, 0, 0)$ 的 i -简单特征值, 其中 $L_0(\lambda_1, 0, 0)$ 由定理 3.1 给出.

引理 3.2.0 为 $L_0(\lambda_1, 0, 0)$ 实部最小的特征值, 其余特征值的实部均大于 0.

证明 由引理 3.1 知, 0 为 $L_0(\lambda_1, 0, 0)$ 的特征值. 令 $\tilde{L}_0 = -\Delta - \lambda_1$, 易知 0 为 \tilde{L}_0 的主特征值. 假设 λ_0 为 $\tilde{L}_0 = -\Delta - \lambda_1$ 的特征值, 且 $\text{Re } \lambda_0 < 0$, 对应特征函数为 (ϕ, ψ) , 则有

$$\begin{aligned} -\Delta\phi + (2a_1\theta_a - a)\phi - \frac{a_2\theta_a}{1+m\theta_a}\psi &= \lambda_0\phi, \quad x \in \Omega, \\ -\Delta\psi - \lambda_1\psi &= \lambda_0\psi, \quad x \in \Omega, \\ \phi = \psi &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

如果 $\psi \equiv 0$, 因为算子 $L_a - \lambda_0$ 可逆, 则 $\phi \equiv 0$, 矛盾. 所以显然 $\psi \neq 0$, 故 λ_0 为 \tilde{L}_0 的特征值, 因而 $\lambda_0 \in R$, 且 $\lambda_0 < 0$, 这与 \tilde{L}_0 的主特征值为 0 矛盾.

记 $L(b(s), u(s), v(s))$ 是(1.2)在点 $(b(s), u(s), v(s)) = (b(s), \theta_a - s(\omega_1 + \phi(s)), s(\chi_1 + \psi(s)))$ 的线性化算子, 则由文[13]的定理 13.8 得如下引理。

引理 3.3 存在 λ_1 和 0 的小邻域到 $R \times X$ 的 C^1 函数: $b \rightarrow (\gamma(b), U(b)), s \rightarrow (\eta(s), V(s))$, 使得 $(\gamma(\lambda_1), U(\lambda_1)) = (0, (\omega_1, \chi_1)) = (\eta(0), V(0))$, 且有

$$\begin{aligned} L(b, 0, 0)U(b) &= \gamma(b)U(b), |b - \lambda_1| \ll 1, \\ L(b(s), u(s), v(s))V(s) &= \eta(s)V(s), |s| \ll 1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $U(b) = (u_1(b), u_2(b)), V(s) = (v_1(s), v_2(s))$ 。另外, $\gamma'(\lambda_1) \neq 0$ 。若 $\eta(s) \neq 0, |s| \ll 1$, 则有

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sb'(s)\gamma'(\lambda_1)}{\eta(s)} = -1。$$

引理 3.4 $\gamma'(\lambda_1) < 0$, 其中 $\gamma'(\lambda_1)$ 由引理 3.3 给出。

证明 由(3.2)知

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + (2a_1\theta_a - a)u_1 + \frac{a_2\theta_a}{1+m\theta_a}u_2 &= \gamma(b)u_1, x \in \Omega, \\ -\Delta u_2 - bu_2 &= \gamma(b)u_2, x \in \Omega, \\ u_1 = u_2 &= 0, x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

因为 $|b - \lambda_1| \ll 1$, 则有 $\gamma(b) \ll 1$ 。如果 $u_2 \equiv 0$, 对于 $|b - \lambda_1| \ll 1$, 有 $u_1 \equiv 0$, 矛盾。所以 $u_2 \neq 0$, 则 $\gamma(b)$ 为 $\hat{L}_0 = -\Delta - b$ 的特征值。因为 $\chi_1 > 0$, 则对于 $|b - \lambda_1| \ll 1$, $\gamma(b)$ 是 \hat{L}_0 的主特征值, 且关于 b 单调递减。由 $\gamma'(\lambda_1) \neq 0$, 则 $\gamma'(\lambda_1) < 0$ 。

结合定理 3.1 及引理 3.1-3.4, 我们有如下结论成立。

定理 3.2 对于 $0 < s \ll 1$, $\eta(s) > 0$, 且由定理 3.1 给出的共存解渐近稳定。

下面我们给出定理 1.1 的证明。

定理 1.1 的证明 首先证明 Γ_s 可延拓为全局分歧 Γ 。 $T(b, \omega, \chi)$ 在 $(\omega, \chi) = (0, 0)$ 处的线性化算子为

$$D_{(\omega, \chi)}T(b, 0, 0)(\omega, \chi) = \left(K((a - 2a_1\theta_a)\omega) + K\left(\frac{a_2\theta_a}{1+m\theta_a}\chi\right), bK\chi \right)。$$

显然 $D_{(\omega, \chi)}T(b, 0, 0)$ 为紧线性算子。由度理论知, $i(T(b, \cdot), 0) = (-1)^p$, 其中 p 为 $D_{(\omega, \chi)}T(b, 0, 0)$ 大于 1 的特征值的代数重数之和。设 $\lambda \geq 1$ 为 $D_{(\omega, \chi)}T(b, 0, 0)$ 的特征值, 对应的特征函数为 (ω, χ) , 则

$$\begin{aligned} -\lambda\Delta\omega - (a - 2a_1\theta_a)\omega &= \frac{a_2\theta_a}{1+m\theta_a}\chi, x \in \Omega, \\ -\lambda\Delta\chi - b\chi &= 0, x \in \Omega, \\ \omega = \chi &= 0, x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

若 $\chi = 0$, 则 $\omega = 0$ 矛盾, 故 $\chi \neq 0$, 所以 $b = \lambda\lambda_i$, 其中 λ_i 为 $-\Delta$ 的第 i 个特征值, $i = 1, 2, 3, \dots$ 。

易知, 对于 $\lambda \geq 1, L_\lambda := -\lambda\Delta - (a - 2a_1\theta_a)$ 的特征值均大于 0, 则 $\omega = L_\lambda^{-1}\left(\frac{a_2\theta_a}{1+m\theta_a}\chi\right)$, 故 (ω, χ) 为 $D_{(\omega, \chi)}T(b, 0, 0)$

的特征函数, 即 $\lambda \geq 1$ 是 $D_{(\omega, \chi)}T(b, 0, 0)$ 的特征值当且仅当 $b = \lambda\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots$ 。

假设 $b < \lambda_1$, 则有 $b < \lambda_1 \leq \lambda\lambda_i, i = 1, 2, \dots, \lambda \geq 1$ 。此时, $D_{(\omega, \chi)}T(b, 0, 0)$ 没有大于 1 的特征值, 所以当 $b < \lambda_1$ 时, $i(T(b, \cdot), 0) = 1$ 。

假设 $\lambda_1 < b < \lambda\lambda_2$, 则 $b < \lambda\lambda_i, \lambda \geq 1, i \geq 2$ 。显然存在惟一的 $\bar{\lambda} = \frac{b}{\lambda_1} > 1$, 使得 $b = \bar{\lambda}\lambda_1$ 。下证 $\bar{\lambda}$ 为简单的。易

证, $N(\bar{\lambda}I - D_{(\omega, \chi)}T(b, 0, 0)) = \text{span}\{(\bar{\omega}, \bar{\chi})\}$, $\dim N(\bar{\lambda}I - D_{(\omega, \chi)}T(b, 0, 0)) = 1$, 其中 $\bar{\chi} > 0$ 为

$$-\bar{\lambda}\Delta\bar{\chi} - b\bar{\chi} = 0, x \in \Omega; \bar{\chi}|_{\partial\Omega} = 0$$

的主特征函数, $\bar{\omega} = L_{\bar{\chi}}^{-1}\left(\frac{a_2\theta_a}{1+m\theta_a}\bar{\chi}\right)$ 。下面证明 $R(\bar{\lambda}I - K(b)) \cap N(\bar{\lambda}I - K(b)) = 0$ 。反设 $(\bar{\omega}, \bar{\chi}) \in R(\bar{\lambda}I - K(b))$,

即存在 $(\omega, \chi) \in X$, 使 $(\bar{\lambda}I - K(b))(\omega, \chi) = (\bar{\omega}, \bar{\chi})$, 则 $-\bar{\lambda}\Delta\chi - b\chi = -\Delta\bar{\chi}$, $x \in \Omega; \chi|_{\partial\Omega} = 0$ 。两端乘以 $\bar{\chi}$, 在 Ω 上积分得

$$-\int_{\Omega} \bar{\chi}\Delta\bar{\chi} dx = \int_{\Omega} (-\bar{\lambda}\Delta\chi - b\chi)\bar{\chi} dx = \int_{\Omega} (-\bar{\lambda}\Delta\bar{\chi} - b\bar{\chi})\chi dx = 0$$

则有 $b\int_{\Omega} \bar{\chi}^2 dx = 0$, 矛盾, 所以 $\bar{\lambda}$ 的代数重数为 1。故当 $\lambda_1 < b < \lambda\lambda_2$ 时, $i(T(b, \cdot), 0) = -1$ 。

由标准的全局分歧理论^[14]得, 存在发自分歧点 $(\lambda_1, 0, 0)$ 的 $H(b, \omega, \chi) = 0$ 的解曲线 C_0 。定义

$$C_1 = C_0 - \{(b(s), s(\omega_1 + \phi(s)), s(\chi_1 + \psi(s))) : -\delta < s < 0\}.$$

显然, 在分歧点 $(\lambda_1, 0, 0)$ 附近, C_1 包含 $\{(b(s), s(\omega_1 + \phi(s)), s(\chi_1 + \psi(s))) : 0 < s < \delta\}$ 。令

$$\Gamma = \{(b, \theta_a - \omega, \chi) : (b, \omega, \chi) \in C_1\},$$

则 Γ 为(1.2)的解曲线, 且在分歧点 $(b, u, v) = (\lambda_1, \theta_a, 0)$ 附近, Γ 上的解均为正的。定义

$$P_1 = \left\{u \in C^1(\Omega) : u(x) > 0, x \in \Omega; \frac{\partial u}{\partial n}(x) < 0, x \in \partial\Omega\right\}, P = \{(b, u, v) : b \in R; u, v \in P_1\}.$$

显然, 在 $(\lambda_1, \theta_a, 0)$ 的小邻域内, $\Gamma \subset \bar{P}$ 。

由文[14]的定理 2.1 知, 连续分支 $\Gamma - \{(\lambda_1, \theta_a, 0)\}$ 必满足以下三条件之一:

- 1) 连接到分歧点 $(\tilde{b}, \theta_a, 0)$, 其中 $\tilde{b} \neq \lambda_1$;
- 2) 延伸到无穷;
- 3) 包含形如 $(b, \theta_a - u, v)$ 和 $(b, \theta_a + u, -v)$ 的点。

下面分(i) $\lambda_1 < a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, (ii) $a \geq \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$ 两种情况讨论。首先证明(i), 假定 $\lambda_1 < a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$ 。若

$\Gamma - \{(\lambda_1, \theta_a, 0)\} \subseteq P$, 显然(1)(3)不可能发生。由引理 2.2 知, 如果 $a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, 则存在 $M > 0$, 使得 $\lambda_1 < b \leq M$ 。

又由 L_p 估计和 Sobolev 嵌入定理得, 存在常数 $M_1 > 0$, 使得 $\|u\|, \|v\| \leq M_1$, 所以(2)不可能发生, 故

$\Gamma - \{(\lambda_1, \theta_a, 0)\} \not\subseteq P$ 。因而存在 $(\hat{b}, \hat{u}, \hat{v}) \in \{\Gamma - (\lambda_1, \theta_a, 0)\} \cap \partial P$, 且存在一列 $\{(b_n, u_n, v_n)\} \subseteq \Gamma \cap P$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \hat{b}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(u_n, v_n) - (\hat{u}, \hat{v})\|_X = 0$, 因为 $(\hat{b}, \hat{u}, \hat{v}) \in \partial P$, 则 $\hat{u} \in \partial P_1$ 或 $\hat{v} \in \partial P_1$ 。若 $\hat{u} \in \partial P_1$, 则 $\hat{u}(x) \geq 0(x \in \Omega)$, 且存在 $x_0 \in \Omega$, 使 $\hat{u}(x_0) = 0$ 或存在 $x_1 \in \partial\Omega$, 使得 $\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}(x_1) = 0$ 。由极值原理知, $\hat{u} \equiv 0$ 。同理, 若 $\hat{v} \in \partial P_1$, 则 $\hat{v} \equiv 0$ 。故有 $\hat{u} \equiv 0$ 或 $\hat{v} \equiv 0$ 。

假设 $\hat{u} \equiv 0$ 且 $\hat{v} \equiv 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \hat{b}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(u_n, v_n) - (0, 0)\|_X = 0$ 。令 $U_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, 由(1.2)得

$$-\Delta U_n = aU_n - a_1 \|u_n\| U_n^2 - \frac{a_2 U_n v_n}{1 + mu_n + kv_n}, x \in \Omega; U_n|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.3)$$

由 L_p 估计和 Sobolev 嵌入定理得, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n - U\|_{C^1} = 0$ (必要时 U_n 取子列), 且 $U(x) \geq 0, \neq 0, x \in \Omega$ 。对(3.3)式两端

取极限得 $-\Delta U = aU, x \in \Omega; U|_{\partial\Omega} = 0$ 。由最值原理得, $U > 0, x \in \Omega$, 故 $a = \lambda_1$ 矛盾。

假设 $\hat{u} > 0, \hat{v} \equiv 0$, 由解的惟一性知, $(\hat{u}, \hat{v}) = (\theta_a, 0)$, 则 $(\hat{b}, \hat{u}, \hat{v})$ 位于半平凡分支 $S_2 = \{(b, \theta_a, 0) : b \in R\}$ 上, 即

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \hat{b}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(u_n, v_n) - (\theta_a, 0)\|_X = 0$ 。令 $V_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$, 同上述证明得 $\hat{b} = \lambda_1$, 矛盾。

综上所述, 有 $\hat{u} \equiv 0, \hat{v} > 0$, 由 θ_b 的惟一性知 $(\hat{u}, \hat{v}) = (0, \theta_b)$, 故 $(\hat{b}, \hat{u}, \hat{v})$ 位于半平凡分支 $S_1 = \{(b, 0, \theta_b) : b > \lambda_1\}$, 交点为 $b = \hat{b}$ 。类似地, 可以证明 $a = \lambda_1 \left(\frac{a_2 \theta_b}{1 + k \theta_b} \right)$ 。又由引理 2.3 得, 对于 $\lambda_1 < a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, 存在惟一的 \hat{b} , 使得 $a = \lambda_1 \left(\frac{a_2 \theta_b}{1 + k \theta_b} \right)$ 。显然有 $\{b : (b, u, v) \in \Gamma\} \supset (\lambda_1, \hat{b})$ 。由引理 2.2(iii) 及引理 2.3 得, 若 $2ka_1 > ma_2$, 曲线 Γ 在 b 轴的投影为 $\{b : (b, u, v) \in \Gamma\} = (\lambda_1, \hat{b})$ 。

下面考察(ii) $a \geq \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$ 的情况。若 $\Gamma - \{(\lambda_1, \theta_a, 0)\} \not\subset P$, 则存在 $(\hat{b}, \hat{u}, \hat{v}) \in \{\Gamma - (\lambda_1, \theta_a, 0)\} \cap \partial P$ 。同上述证明得, $\hat{u} \equiv 0$ 或 $\hat{v} \equiv 0$ 。类似于(i)的情形, 可以证明 $\hat{u} \equiv 0, \hat{v} \equiv 0$ 和 $\hat{u} > 0, \hat{v} \equiv 0$, 均不成立。因此仅考虑 $\hat{u} \equiv 0, \hat{v} > 0$, 此时必存在一列 $\{(b_n, u_n, v_n)\} \subseteq \Gamma \cap P$, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \hat{b}, \lim_{n \rightarrow \infty} \|(u_n - v_n) - (0, \hat{v})\|_X = 0$ (必要时取子列)。且有

$-\Delta u_n = au_n - a_1 u_n^2 - \frac{a_2 u_n v_n}{1 + mu_n + kv_n}, x \in \Omega; u_n|_{\partial\Omega} = 0$ 。令 $U_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, 存在 $U \geq 0, \neq 0, x \in \Omega$, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n - U\|_{C^1} = 0$, 则

$$-\Delta U + \frac{a_2 \hat{v}}{1 + k \hat{v}} U = aU, x \in \Omega; U|_{\partial\Omega} = 0$$

由最大值原理 $U > 0$, 则 $a = \lambda_1 \left(\frac{a_2 \hat{v}}{1 + k \hat{v}} \right)$ 。又因为 $a \geq \lambda_1 + \frac{a_2}{k} > \lambda_1 \left(\frac{a_2 \hat{v}}{1 + k \hat{v}} \right)$ 矛盾。所以分歧曲线 $\Gamma - \{(\lambda_1, \theta_a, 0)\} \subseteq P$ 。

由文[14]的定理 2.1 知, Γ 必在 P 内延伸到 ∞ 。再根据引理 2.2 可知, 在 P 内 Γ 只能沿 b 延伸到无穷。最后, 考察 $b \rightarrow \infty$ 时, 分歧解的走势。设 $\{(b_n, u_n, v_n)\} \subseteq \Gamma$ 为(1.2)的一列正解, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 。由引理 2.2 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{\infty} = \infty$ 。

由 L_p 估计和 Sobolev 嵌入定理得, 存在 $\tilde{u} \in C^1(\Omega)$, 且 $\tilde{u} \geq 0, \neq 0$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - \tilde{u}\|_{C^1} = 0$ (必要时取子列), 且有

$-\Delta \tilde{u} = \left(a - \frac{a_2}{k} \right) \tilde{u} - a_1 \tilde{u}^2, x \in \Omega; \tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0$ 。因为 $a \geq \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, 故 $\tilde{u} = \theta_{a - \frac{a_2}{k}}$, 特别地 $a = \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$ 时, $\tilde{u} = 0$ 。这里 $\theta_{a - \frac{a_2}{k}}$

为(1.6)的惟一正解。

注 3.1 对于 $a \geq \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, 由引理 2.2 知, 存在 $\delta > 0$, 使得在 Ω 的任意紧子集 Ω' 上有 $\delta < \frac{v(x)}{b} < \frac{a_1 + ah}{a_1 b_1}$ 。因此在此在 Ω 的任意紧子集 Ω' 上, $v(x)$ 与 b 趋于无穷的速度相同。

注 3.2 由定理 1.1, 引理 2.2(iii) 及引理 2.3 易证定理 1.2 成立。

定理 1.1 表明(1.2)的正解曲线 Γ 从分歧点 $(\lambda_1, \theta_a, 0)$ 向右分歧, 且在该分歧点附近渐近稳定。对于 $a \geq \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, 分歧曲线 Γ 沿参数 b 趋于无穷; 对于 $\lambda_1 < a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$ 分歧曲线 Γ 与另一半平凡解分支 $S_1 = \{(b, 0, \theta_b) : b > \lambda_1\}$ 相交于点 $(\hat{b}, 0, \theta_b)$, 故 $(\hat{b}, 0, \theta_b)$ 也是分歧点。为此, 我们进一步分析分歧曲线 Γ 在 $(\hat{b}, 0, \theta_b)$ 附近的形状及稳定性。

定理 3.3 假设 $\lambda_1 < a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$, $b > \lambda_1$, 则在 $(\hat{b}, 0, \theta_b)$ 附近的正解分支为一条光滑的曲线

$$\hat{\Gamma}_\zeta = \{(b(s), s(\varphi_1 + \hat{\varphi}(s)), \theta_b + s(\psi_1 + \hat{\psi}(s))) : 0 < s < \zeta\},$$

满足 $b(0) = \hat{b}, \hat{\varphi}(0) = 0, \hat{\psi}(0) = 0, (\hat{\varphi}(s), \hat{\psi}(s)) \in \{(\varphi_1, \psi_1)\}^\perp$, 且 $\hat{\Gamma}_\zeta \subset \Gamma$ 。

证明 类似于定理 3.1 的证明可得, 当 $\lambda_1 < a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}, b > \lambda_1$, 时, 系统(1.2)在点 $(\hat{b}, 0, \theta_b)$ 处的线性化算子记

为 $\hat{L}_0(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}})$, 则

$$\hat{L}_0(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}}) = \begin{pmatrix} -\Delta - a + \frac{a_2 \theta_{\hat{b}}}{1 + k \theta_{\hat{b}}} & 0 \\ -hb_1 \theta_{\hat{b}}^2 & -\Delta - \hat{b} + 2b_1 \theta_{\hat{b}} \end{pmatrix}$$

易验证核空间 $N(\hat{L}_0(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}})) = \text{span}\{(\varphi_1, \psi_1)\}$, 值域 $R(\hat{L}_0(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}})) = \{(u, v) \in X : \int_{\Omega} u \varphi_1 dx = 0\}$, 其中 $\varphi_1 > 0$ 为特征值问题 $-\Delta u + \frac{a_2 \theta_{\hat{b}}}{1 + k \theta_{\hat{b}}} u = au, x \in \Omega; u|_{\partial\Omega} = 0$ 的主特征函数, 且 $\|\varphi_1\|_{\infty} = 1, \psi_1 = L_b^{-1}(hb_1 \theta_{\hat{b}}^2 \varphi_1)$, 其中

$L_b = -\Delta - \hat{b} + 2b_1 \theta_{\hat{b}}$. 而且 $\hat{L}_1(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}})(\varphi_1, \psi_1) = -\psi_1 \notin R(\hat{L}_0(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}}))$. 由文[13]的定理 13.5 知, 结论成立。

为研究局部分歧曲线 $\hat{\Gamma}_{\zeta}$ 上正解的稳定性. 将曲线 $\hat{\Gamma}_{\zeta}$ 上的点

$$(b(s), u(s), v(s)) = (b(s), s(\varphi_1 + \hat{\varphi}(s)), \theta_{\hat{b}} + s(\psi_1 + \hat{\psi}(s)))$$

代入系统(1.2)的第二式, 并在 $s = 0$ 处求导, 经过简单计算得, $b'(0) = 0$ 的符号不易确定, 故我们采用摄动技术研究该分歧解的稳定性. 为此, 设 $\{(b_n, u_n, v_n)\} \subseteq \Gamma$, 且 $(b_n, u_n, v_n) \rightarrow (\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}}) (n \rightarrow \infty)$. 记 $\hat{L}_n(b_n, u_n, v_n)$ 为(1.2)在点 (b_n, u_n, v_n) 处的线性化算子, 则

$$\hat{L}_n(b_n, u_n, v_n) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta - a + 2a_1 u_n + \frac{a_2 v_n (1 + kv_n)}{(1 + mu_n + kv_n)^2} & \frac{a_2 u_n (1 + mu_n)}{(1 + mu_n + kv_n)^2} \\ \frac{-hb_1 v_n^2}{(1 + hu_n)^2} & -\Delta - b_n + \frac{2b_1 v_n}{1 + hu_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

引理 3.5 设 $\lambda_1 < a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$ 固定, $\{(b_n, u_n, v_n)\} \subseteq \Gamma$ 为(1.2)的一列正解, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \hat{b}$, 则(1.2)在点 (b_n, u_n, v_n) 处的线性化算子 $\hat{L}_n(b_n, u_n, v_n)$ 存在一个特征值 $\eta_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 所有其它特征值的实部均大于 0.

证明 显然, 对于 $\lambda_1 < a < \lambda_1 + \frac{a_2}{k}$ 固定, 由定理 1.1 及定理 3.3 知, $b_n \rightarrow \infty$ 时必有 $(u_n, v_n) \rightarrow (0, \theta_{\hat{b}})$, 从而 $\hat{L}_n(b_n, u_n, v_n)$ 以算子范数收敛到

$$\hat{L}_{\infty}(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}}) = \begin{pmatrix} -\Delta - a + \frac{a_2 \theta_{\hat{b}}}{1 + k \theta_{\hat{b}}} & 0 \\ -hb_1 \theta_{\hat{b}}^2 & -\Delta - \hat{b} + 2b_1 \theta_{\hat{b}} \end{pmatrix}.$$

考察 $\hat{L}_{\infty}(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}})$ 的特征值问题

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi - a \varphi + \frac{a_2 \theta_{\hat{b}}}{1 + k \theta_{\hat{b}}} \varphi &= \eta \varphi, & x \in \Omega, \\ -\Delta \psi - \hat{b} \psi + 2b_1 \theta_{\hat{b}} \psi - hb_1 \theta_{\hat{b}}^2 \varphi &= \eta \psi, & x \in \Omega, \\ \varphi = \psi &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

由引理 1.1(iv)知, 算子 $-\Delta - \hat{b} + 2b_1 \theta_{\hat{b}}$ 的特征值均为正. 又由 $a = \lambda_1 \left(\frac{a_2 \theta_{\hat{b}}}{1 + k \theta_{\hat{b}}} \right)$ 知, $-\Delta - a - \frac{a_2 \theta_{\hat{b}}}{1 + k \theta_{\hat{b}}}$ 的最小特征值为 0, 其它特征值均大于 0. 因此由文[16]的引理 3.5 知, $\eta = 0$ 为 $\hat{L}_{\infty}(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}})$ 的最小特征值, 对应的特征函数为 (φ_1, ψ_1) , 其中 φ_1, ψ_1 由定理 3.3 给出, $\hat{L}_{\infty}(\hat{b}, 0, \theta_{\hat{b}})$ 的所有其它特征值均大于零. 由摄动理论^[15]有 $\hat{L}_n(b_n, u_n, v_n)$ 存在特征值 $\eta_n \rightarrow 0$, 且所有其它特征值的实部均大于零. 从而引理 3.5 得证.

引理 3.6 令 $I = \int_{\Omega} \theta_b^2 (\psi_1 - h\varphi_1\theta_b) dx$, 则若 $I > 0$, 对足够大的 n , 有 $\eta_n > 0$ 。这里 η_n 由引理 3.5 给出。

证明 设 η_n 相应的特征函数为 (φ_n, ψ_n) , 且 $\|\varphi_n\|_{\infty} + \|\psi_n\|_{\infty} = \|\varphi_1\|_{\infty} + \|\psi_1\|_{\infty}$, 则 $(\varphi_n, \psi_n) \rightarrow (\varphi_1, \psi_1) (n \rightarrow \infty)$, 且

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi_n + \left(-a + 2a_1u_n + \frac{a_2v_n(1+kv_n)}{(1+mu_n+kv_n)^2} \right) \varphi_n + \frac{a_2u_n(1+mu_n)}{(1+mu_n+kv_n)^2} \psi_n &= \eta_n\varphi_n, \quad x \in \Omega, \\ -\Delta\psi_n + \left(-b_n + \frac{2b_1v_n}{1+hu_n} \right) \psi_n - \frac{hb_1v_n^2}{(1+hu_n)^2} \varphi_n &= \eta_n\psi_n, \quad x \in \Omega, \\ \varphi_n = \psi_n &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.4}$$

在 v_n 所满足的方程两端同乘以 ψ_n , 在 Ω 上积分并利用 Green 公式得

$$-\int_{\Omega} v_n \Delta\psi_n dx = \int_{\Omega} \left(b_n - \frac{b_1v_n}{1+hu_n} \right) v_n \psi_n dx, \tag{3.5}$$

将(3.4)的第二式代入(3.5)得

$$\eta_n \int_{\Omega} v_n \psi_n dx = \int_{\Omega} \left(\frac{b_1v_n^2\psi_n}{1+hu_n} - \frac{b_1hv_n^3\varphi_n}{(1+hu_n)^2} \right) dx. \tag{3.6}$$

又由 $(b_n, u_n, v_n) \rightarrow (\hat{b}, 0, \theta_b)$, $(\varphi_n, \psi_n) \rightarrow (\varphi_1, \psi_1)$, 在(3.6)式两端取极限得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n \int_{\Omega} v_n \psi_n dx = \int_{\Omega} b_1\theta_b^2 (\psi_1 - h\varphi_1\theta_b) dx = b_1I > 0,$$

故对于充分大的 n , 有 $\eta_n > 0$ 。

注 3.3 由于 $I = \int_{\Omega} \theta_b^2 (\psi_1 - h\varphi_1\theta_b) dx = \int_{\Omega} h\theta_b^2 (b_1L_b^{-1}(\theta_b^2\varphi_1) - \varphi_1\theta_b) dx$, 故只要 b_1 适当大, 即可达到 $I > 0$ 。

由引理 3.5 和引理 3.6 知, 如下结论成立。

定理 3.4 如果 $I > 0$, 则由定理 3.3 给出的分歧解渐近稳定。

4. 致谢

非常感谢国家自然科学基金(11001160)和陕西省自然科学基金(2011JQ1015)的大力支持。同时也感谢为本文做出贡献的老师和同学们。

参考文献 (References)

- [1] M. A. Aziz-Alaoui. Study of a Leslie-Gower-type tritrophic population model. *Chaos Solutions Fractals*, 2002, 14(8): 1275-1293.
- [2] 陈滨, 王明新. 带有扩散和 Beddington-DeAngelis 响应函数的捕食模型的正平衡态[J]. *数学年刊*, 2007, 28A(4): 495-506.
- [3] J. R. Beddington. Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency. *Journal of Animal Ecology*, 1975, 44: 331-340.
- [4] D. L. DeAngelis, R. A. Goldstein and R. V. O'Neill. A model for trophic interaction. *Ecology*, 1975, 56(4): 881-892.
- [5] D. T. Dimitrov, H. V. Kojoubarov. Complete mathematical analysis of predator-prey models with linear prey growth and Beddington-DeAngelis functional response. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 162(2): 523-538.
- [6] P. H. Leslie. Some further notes on the use of matrices in population mathematics. *Biometrika*, 1948, 35(1): 213-245.
- [7] M. A. Aziz-Alaoui, M. D. Okiye. Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes. *Applied Mathematics Letters*, 2003, 16(7): 1069-1075.
- [8] L. Nie, Z. Teng, L. Hu and J. Peng. Qualitative analysis of a modified Leslie-Gower and Holling-type II predator-prey model with state dependent impulsive effects. *Nonlinear Analysis Real World Application*, 2010, 11(3): 1364-1373.
- [9] 邹静. 两类离散 Leslie 型捕食与被捕食系统的稳定性与分岔分析[D]. 中南大学, 2011.
- [10] J. Blat, K. J. Brown. Global bifurcation of positive solutions in some systems of elliptic equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1986, 17(6): 1339-1353.
- [11] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [12] Y. Yamada. Stability of steady states for prey-predator diffusion equations with homogeneous Dirichlet conditions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1990, 21(2): 327-345.

- [13] J. Smoller. Shock waves and reaction-diffusion equations. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [14] J. H. Wu. Global bifurcation of coexistence state for the competition model in the chemostat. *Nonlinear Analysis*, 2000, 39(7): 817-835.
- [15] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1980.
- [16] M. Ito. Global aspect of steady-states for competitive-diffusive systems with homogeneous Dirichlet conditions. *Physics D*, 1984, 14(1): 1-28.