Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 249-255
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24038 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

A Priori Estimates for Classical Solutions of Fully Nonlinear Parabolic Equations*

Yi Cao, Zhiguo Wang

College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an
Email: caoyi@snnu.edu.cn

Received: Aug. 14th, 2012; revised: Aug. 29th, 2012; accepted: Sep. 7th, 2012

Abstract: For the fully nonlinear uniformly parabolic equations $u_t - F\left(D_x^2 u\right) = 0$, it is well known that the viscosity solutions are of $C^{2,\alpha}$ if the nonlinear operators are convex (or concave). In this paper, we study the classical solution for the fully nonlinear parabolic equations, where the nonlinear operators F is local $C^{1,\beta}$ almost everywhere for $0 < \beta < 1$. It will be shown the interior $C^{2,\alpha}$ regularity of the classical solutions provided there exists a function ρ that is a continuous modulus of second order derivatives of the classical solution.

Keywords: Nonlinear; Uniformly Parabolic; Classical Solutions

非线性抛物方程古典解的一个先验估计*

曹　毅，王治国

陕西师范大学数学与信息科学学院，西安
Email: caoyi@snnu.edu.cn

收稿日期：2012 年 8 月 14 日；修回日期：2012 年 8 月 29 日；录用日期：2012 年 9 月 7 日

摘　要：给定常数$0<\beta<1$，假定非线性算子 F 几乎处处是局部$C^{1,\beta}$的，本文研究了完全非线性抛物方程$u_t - F\left(D_x^2 u\right) = 0$的古典解的性质。如果上述方程的古典解的二阶导数有一个连续模 ρ，证明了其解的一个内部$C^{2,\alpha}$估计，这里 α 是一个仅依赖于非线性算子 F 的常数。

关键词：完全非线性；一致抛物；古典解

1. 引言

本文中我们用记号$\boldsymbol{S}_n$表示所有 n 阶对称矩阵的集合，$\boldsymbol{N} \in \boldsymbol{S}_n$，并且$\boldsymbol{N} \ge 0$表示$\boldsymbol{N}$是非负定的对称矩阵。$\boldsymbol{D}_x \boldsymbol{u}$表示向量$\left(D_1 u, D_2 u, \cdots D_n u\right)$，$\boldsymbol{D}_x^2 \boldsymbol{u}$表示矩阵$D_{ij} u$，$u_t$表示$\partial u/\partial t$。考虑下面的完全非线性一致抛物方程：

$$u_t - F\left(\boldsymbol{D}_x^2 \boldsymbol{u}\right) = 0. \tag{1.1}$$

本文中我们假定非线性算子F是一致椭圆的，即存在两个正常数$0<\lambda \le \Lambda < \infty$，使得：对任意的$M, N \in \boldsymbol{S}_n, N \ge 0$，有下式成立：

$$\lambda \|N\| \le F\left(M+N\right) - F\left(M\right) \le \Lambda \|N\|. \tag{1.2}$$

如果 F 是凸的，在文献[1]中，王立河给出了方程(1.1)的粘性解 u 的内部$C^{2,\alpha}$估计：

*资助项目：国家自然科学基金资助的项目(NSFC)：11126201。

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(Q_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(Q_1)}+1\right),$$

这里α, C都是仅依赖于非线性算子F和维数n的常数。在椭圆方程的情形中，类似的结论首先被 Evans 证明，后来 Caffarelli 化简了该证明。在上述证明中F的凸性假定是本质的(见[2,3])。本文中我们去掉了凸性假定，仅假设F几乎处处是局部$C^{1,\beta}$的，即对于任意$\boldsymbol{S}_n$中的有界集合D, F是几乎处处可微的，并存在常数K使得

$$\left|F(M)-F(N)-tr\left(F'(N)\right)(M-N)\right| \le K|M-N|^{1+\beta}, \qquad M,N\in \mathrm{D} \tag{1.3}$$

(这里$tr(\boldsymbol{A})$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的迹)。特别的，我们指出，如果F是凸的，那么由 Alexandroff-Buselman-Feller 定理([3,4])，F是几乎处处局部$C^{1,1}$的。在文献[4]中，作者对于椭圆方程得出了与本文类似的结论。

我们将在文中使用下面这些记号：$B_r(x)$表示R^n中以点x为中心，r为半径的开球，并记$B_r=B_r(0)$。$Q_r(x,t)$表示R^{n+1}中的开圆柱$B_r(x)\times\left(t-r^2,t+r^2\right)$，$\partial_p Q_r(x,t)$表示$Q_r(x,t)$的抛物边界，并记$Q_r=Q_r(0,0)$，$D_r(x,t)=Q_1\cap Q_r(x,t)$。$B_r$表示集合$\boldsymbol{S}_n$中半径为$r$的开球，$|E|$表示集合$E$的测度，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$表示向量$\boldsymbol{x}$的转置，$\overline{u_D}$表示$u$在集合$D$上的积分平均值，$\operatorname{osc}_D u$表示$u$在集合$D$上的振幅，即$\operatorname{osc}_D u=\sup_{x,y\in D}|u(x)-u(y)|$。下面给出本文的主要定理：

定理 1.1 假定$0<\beta<1$，F是几乎处处是局部$C^{1,\beta}$的，且$u\in C^2(Q_1)$是方程(1.1)的古典解($Q_1\subset R^{n+1}$)，如果存在单增的连续函数$\rho:[0,\infty)\to[0,\infty)$满足$\lim_{s\to 0}\rho(s)=0$，并且$u$的二阶导数满足

$$\left|D_t^s D_x^r u(X)-D_t^s D_x^r u(Y)\right| \le \rho\left(\delta(X,Y)\right) \qquad (X,Y)\in Q_1 \tag{1.4}$$

其中$2s+r=2$，$\delta(X,Y)$表示两点间的抛物距离；则存在仅依赖于n,λ,Λ的一致常数$0<\alpha<1$使得$u\in C^{2,\alpha}\left(\overline{Q_{1/2}}\right)$，且

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}\left(\overline{Q_{1/2}}\right)} \le C\|u\|_{C^{1,1}\left(\overline{Q_{3/4}}\right)} \tag{1.5}$$

这里常数C仅依赖于n,λ,Λ和函数ρ。

本文的结构安排如下：在第二部分我们说明 Holder 连续性可以被L^p范数所刻画，在第三部分我们通过迭代的方法证明定理 1.1。

2. Holder 连续

我们用(x,t)表示时空R^{n+1}中的点，这里x是n维的，我们也将R^{n+1}中的点记作$X=(x,t_x)$。R^{n+1}中任意两点X和Y之间的抛物距离定义为$\delta(x,y)=\max\left\{|x-y|,\left|t_x-t_y\right|^{1/2}\right\}$。设函数$u$定义在$R^{n+1}$中的开圆柱体$\overline{Q_1}$上，$0<\alpha<1$，如果存在常数$C$使得$[u]\alpha,Q_1 := \sup_{X,Y\in\overline{Q}_1, X\ne Y}\dfrac{|u(x)-u(y)|}{\delta(X,Y)^\alpha}\le C$，我们称$u$是$C^\alpha(Q_1)$的；如果存在常数$C$使得$\sum_{r+2s=2}\left[D_t^s D_x^r u\right]_{\alpha,Q_1}\le C$，则称$u$是$C^{2,\alpha}\left(\overline{Q_1}\right)$的。这是 Holder 连续一般的定义，这里$u$是连续性被它的$L^\infty$范数刻画，而下面的定理说明 Holder 连续也能被L^p范数刻画，这里$p\ge 1$。

引理 2.1[5,6] 假定$u\in L^p(Q_1)$，$p\ge 1$，如果存在常数$0<\alpha<1$和$A>0$使得对任意的$X\in\overline{Q_1}$和任意的$r>0$，都有

$$\frac{1}{\left|D_r(x)\right|}\int_{D_r(x)}\left|u-\bar{u}_{D_{r(X)}}\right|^P \le Ar^{\alpha p}, \tag{2.1}$$

则$u\in C^\alpha\left(\overline{Q_1}\right)$，并且

$$[u]_{\alpha,Q_1} \le C_0 A^{1/p}; \tag{2.2}$$

其中 C_o 是仅依赖于 n 和 α 的常数。(注意这里 $D_r(x)=Q_1\cap Q_r(x),\bar{u}_{D_r(x)}=\frac{1}{|D_r(X)|}\int_{D_r(x)}|u|$)。

推论 2.2 假定 $u\in L^p(Q_1)$， $p\ge 1$，如果存在常数 $0<\alpha<1$， $r_0\le\frac{1}{2}$ 和 $A>0$ 使得对任意的 $X\in\overline{Q_{1/2}}$ 和任意的 $m=1,2,\cdots,$ 存在常数 $a_{X,m}$ 满足

$$\frac{1}{|Q_{r_o m(X)}|}\int_{Q_{r_0 m(X)}}|u-a_{X,m}|^p\le Ar_0^{\alpha mp} \tag{2.3}$$

则 $u\in C^\alpha\left(\overline{Q_{1/2}}\right)$，并且

$$[u]_{\alpha,Q_{1/2}}\le C_1 r_0^{-\frac{n+2}{p}-\alpha}A^{1/p}, \tag{2.4}$$

其中 C_1 仅依赖于 n,α 和 $\|u\|_{L^p(Q_1)}$ 的常数。

证明：只需证存在常数 $A_1>0$ 代替 $A>0$ 使(2.1)对任意的 $X\in\overline{Q_{1/2}}$ 及 $r>0$ 成立，这样由(2.2)式即得(2.4)式。当 $r>r_0$ 且 $A_1\ge\frac{2^{p+1}\|u\|_L^p\,p(Q_1)}{|Q_{r_0}|r_0^{p\alpha}}$ 时，(2.1)显然成立，我们只需证 $r\le r_0$ 的情况。

如果 $r\le r_0$，那么 $D_r(x)=Q_r'(x)$ (因为 $r_0\le 1/2$， $X\in\overline{Q_{1/2}}$)。选择 m 满足 $r_o^{m+1}<r<r_0^m$，容易看出

$$\left|\overline{u_{Q_r(x)}}-a_{X,m}\right|\le\frac{1}{|Q_r(X)|}\int_{Q_r(x)}|u-a_{X,m}|\le\left(\frac{1}{|Q_r(x)|}\int_{Q_r(x)}|u-a_{X,m}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

那么

$$\left(\frac{1}{|Q_r(x)|}\int_{Q_r(x)}\left|u-\overline{u_{Q_r(x)}}\right|^p\right)^{\frac{i}{p}}\le\left(\frac{1}{|Q_r(x)|}\int_{Q_r(x)}|u-a_{X,m}|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left|\overline{u_{Q_r(x)}}-a_{X,m}\right|\le 2\left(\frac{1}{|Q_r(x)|}\int_{Q_r(x)}|u-a_{X,m}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.5}$$

由 $\frac{\left|Q_{r_0^k}(x)\right|}{\left|Q_{r_0^{k+1}}(X)\right|}=\frac{1}{r_0^{n+2}}$ 及(2.3)，得到

$$\left(\frac{1}{|Q_r(X)|}\int_{Q_r(x)}|u-a_{X,m}|^p\right)^{1/p}\le\left(\frac{1}{|Q_r(X)|}\int_{Q_{r_0^m}(x)}|u-a_{X,m}|^p\right)^{1/p}\le\left(Ar_0^{amp}\frac{\left|Q_{r_0^m(X)}\right|}{|Q_r(X)|}\right)^{1/p}\le\left(\frac{Ar_0^{amp}}{r_0^{n+2}}\right)\le A^{1/p}r_0^{-\frac{n+2}{p}-a}r^a$$

选择 $A_1\ge 2^P Ar_0^{-n-2-pa}$，结合(2.5)即得(2.1)。于是，令 $A_1=\max\left\{\frac{2^{p+1}\|u\|_{L^P(Q_1)}^p}{|Q_{r0}|r_0^{pa}},2^P Ar_0^{-n-2-pa}\right\}$，则对任意的 $X\in\overline{Q_{1/2}}$ 和任意的 $r>0$，(2.3)(2.4)成立。

3. 主要定理的证明

在证明主要定理之前，我们先证明下面的引理。

引理 3.1 假定 $u\in C^2(Q_1)$ 是方程(1.1)的解，且对所有的 $M,N\in B_2$，F 满足(1.3)。设 u 的二阶导数在区域 Q_1 中满足 $\left|D_t^s D_x^r u(X)\right|\le 1$，其中 $2s+r=2$；则存在仅依赖于 $\lambda,\wedge,n,\beta,K$ 的正常数 $0<\varepsilon_0<1$ 和仅依赖于 $\lambda,\wedge,n$ 正常数 $0<\delta_0\le 1/4$，使得：如果

$$\mathrm{OSC}_{Q_1}\left|D_t^s D_x^r u\right|\le\varepsilon_0 \tag{3.1}$$

并且存在常数 $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ 和对称矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{M}_1} \in \widetilde{B_2}$，(这里 $\widetilde{B_2}$ 表示 S_{n+1} 中以 2 半径的开球)，满足

$$\widetilde{\boldsymbol{M}_1} = \begin{pmatrix} m^{(1)} & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \boldsymbol{M}_1 \in \boldsymbol{S}_n, \quad \left(\frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} \left| D_t^s D_x^r u - \widetilde{\boldsymbol{M}_1} \right|^2 \right)^{1/2} = 2\varepsilon \le 2\varepsilon_0; \tag{3.2}$$

则存在一个对称矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{M}_2} \in \widetilde{B_2}$，并满足

$$\widetilde{\boldsymbol{M}_2} = \begin{pmatrix} m^{(2)} & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \boldsymbol{M}_2 \in \boldsymbol{S}_n, \quad \left(\frac{1}{|Q_{\delta_0}|} \int_{Q_{\delta_0}} \left| D_t^s D_x^r u - \widetilde{\boldsymbol{M}_2} \right|^2 \right)^{1/2} \le \varepsilon. \tag{3.3}$$

证明：由(3.2)及 F 在集合 B_2 是几乎处处局部可微的，我们可选择 $\widetilde{\boldsymbol{M}_1} \in B_2$ 使

$$\left(\frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} \left| D_t^s D_x^r u - \widetilde{\boldsymbol{M}_1} \right|^2 \right)^{1/2} \le 2\varepsilon \tag{3.4}$$

并且 F 在 $\boldsymbol{M}_1$ 处可微，我们记 $F'(\boldsymbol{M}_1) = (a_{ij})_{n\times n} \in \boldsymbol{S}_n$。由(1.2)可知

$$\lambda I \le (a_{ij})_{n\times n} \le \Lambda I \tag{3.5}$$

我们说

$$\sup_{Q_1} \left| D_t^s D_x^r u(X) - \widetilde{\boldsymbol{M}_1} \right| \le 3\varepsilon_0. \tag{3.6}$$

我们用反正法来证明(3.6)，假定(3.6)错误，由(3.1)得：对所有 $X \in Q_1$，$\left| D_t^s D_x^r u(X) - \widetilde{\boldsymbol{M}_1} \right| > 2\varepsilon_0$，这与(3.4)矛盾。

设 $P_1(x,t) = m^{(1)} t - \frac{1}{2} x^T \boldsymbol{M}_1 x$，$X = (x,t) \in R^{n+1}$，由 Poincare's 不等式，存在仅依赖维数 n 的常数 C 使得

$$\left\| (u-P_1) - \overline{D_x(u-P_1)}_{Q_{1/2}} \cdot x - \overline{(u-P_1)}_{Q_{1/2}} \right\|_{L^2(Q_{1/2})} \le C \left\{ \sum_{r+2s=2} \left\| D_t^s D_u^r u - \widetilde{\boldsymbol{M}_1} \right\|_{L^2(Q_{1/2})} \right\}.$$

令 $h(X)$ 是下面线性方程的解：

$$\begin{cases} h_t - a_{ij} D_{ij} h = 0 & \text{in} \quad Q_{1/2} \\ h = u - P_1 - \overline{D_x(u-P_1)}_{Q_{1/2}} \cdot x - \overline{(u-P_1)}_{Q_{1/2}} & \text{on} \quad \partial_p Q_{1/2} \end{cases}.$$

这里方程的系数 $(a_{ij})_{n\times n} = F'(\boldsymbol{M}_1)$，显然它是满足(3.5)的常数矩阵。由经典 Schauder 估计，可知对任意常数 $0 < \theta < 1$，我们有

$$\left[D_t^s D_u^r h \right]_{\theta, Q_{1/4}} \le C \|h\|_{W_2^{2,1}(Q_{1/2})} \le C \left\| u - P_1 - \overline{D_x(u-P_1)}_{Q_{1/2}} \cdot x - \overline{(u-P_1)}_{Q_{1/2}} \right\|_{W_2^{2,1}(Q_{1/2})} \le C \left\{ \sum_{r+2s=2} \left\| D_t^s D_u^r u - \widetilde{\boldsymbol{M}_1} \right\|_{L^2(Q_1)} \right\};$$

其中 C 是仅依赖于 n，λ，Λ 和 θ 的常数。结合(3.4)，得到：

$$\left[D_t^s D_u^r h \right]_{\theta, Q_{1/4}} \le \hat{C}\varepsilon, \tag{3.7}$$

其中 $\hat{C}$ 仅依赖于 n，λ，Λ 和 θ。令 $\theta = 1/2$，取

$$\delta_0 = \min\left\{ \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{2\hat{C}} \right)^2 \right\}. \tag{3.8}$$

那么对任意的 $X \in Q_{\delta_0}$，

$$\left| D_t^s D_u^r h(X) - D_t^s D_u^r h(0) \right| \le \left[D_t^s D_u^r h \right]_{\theta, Q_{1/4}} \cdot \delta_0^\theta \le \hat{C}\delta_0^\theta \le \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{3.9}$$

设

$$f(X)=F\left(D_x^2u(X)\right)-F(M_1)-a_{ij}\left(D_{ij}u(X)-m_{ij}\right) \tag{3.10}$$

结合(1.3)，我们有

$$\left|f(X)\right|\le K\left|D_x^2u(X)-M_1\right|^{1+\beta},\ X\in Q_1.$$

又由(3.4)及(3.6)，

$$\|f\|_{L^2(Q_1)}\le K\left(\int_{Q_1}\left|D_x^2u-M_1\right|^{2(1+\beta)}\right)^{\frac{1}{2}}\le K(3\varepsilon_0)^\beta\left(\int_{Q_1}\left|D_x^2-M_1\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le K\sqrt{|Q_1|}(3\varepsilon_0)^\beta 2\varepsilon \tag{3.11}$$

令 $v\in W_2^{2,1}\left(Q_{1/2}\right)$ 是下面线性方程的弱解：

$$\begin{cases}v_t-a_{ij}D_{ij}v=f & \text{in}\quad Q_{1/2};\\ v=0 & \text{on}\quad \partial_pQ_{1/2}.\end{cases}$$

则存在依赖于 λ,Λ,n 的常数 C 使得：

$$\|v\|_{W_2^{2,1}(Q_{1/2})}\le C\|f\|_{L^2(Q_{1/2})}\le\sqrt{|Q_1|}CK(3\varepsilon_0)^\beta 2\varepsilon,$$

于是我们可以选择合适的常数 $0<\varepsilon_0<1$ 使

$$\left(\frac{1}{\left|Q_{\delta_0}\right|}\int_{Q_{\delta_0}}\left|D_t^sD_x^rv\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}\varepsilon, \tag{3.12}$$

其中 δ_0 由(3.8)给定。

令 P_2 是下面的线性方程的弱解：

$$\begin{cases}D_tP_2-a_{ij}D_{ij}P_2=F(\boldsymbol{M}_1)-m^1 & \text{in}\quad Q_{1/2};\\ P_2=0 & \text{on}\quad \partial_pQ_{1/2}.\end{cases}$$

因为$\left(\boldsymbol{a}_{ij}\right)_{n\times n}$是常数矩阵，所以 P_2 是二阶多项式，即 $D_t^sD_x^rP_2$ 属于集合 S_{n+1}。

设 $w=P_1+P_2+v+h+\overline{D_x(u-P_1)}_{Q_{1/2}}\cdot x+\overline{(u-P_1)}_{Q_{1/2}}$，那么

$$w_t-a_{ij}D_{ij}w=-a_{ij}m_{ij}+F(\boldsymbol{M}_1)+f=u_t-a_{ij}D_{ij}u\ \text{in}\ Q_{1/2}.$$

又由 $w\big|_{\partial_pQ_{1/2}}=u\big|_{\partial_pQ_{1/2}}$，在区域 $Q_{1/2}$ 中 $w=u$，并且

$$D_t^sD_x^rw=D_t^sD_x^ru=\widetilde{\boldsymbol{M}_1}+D_t^sD_x^rP_2+D_t^sD_x^rv+D_t^sD_x^rh\ \text{in}\ Q_{1/2}.$$

设 $\widetilde{\boldsymbol{M}_2}=\widetilde{\boldsymbol{M}_1}+D_t^sD_x^rP_2-D_t^sD_x^rh(0)$，那么对任意的 $x\in Q_{\delta_0}$，

$$\left|D_t^sD_x^ru(X)-\widetilde{\boldsymbol{M}_2}\right|=\left|D_t^sD_x^rv(X)+D_t^sD_x^rh(X)-D_t^sD_x^rh(0)\right|\le\left|D_t^sD_x^rv(X)\right|+\left|D_t^sD_x^rh(X)-D_t^sD_x^rh(0)\right|.$$

对上式两边在 Q_{δ_0} 上积分，结合(3.9)和(3.12)，得(3.3)。再由 $D_t^sD_x^r\left(Q_{1/2}\right)\subset B_1$ 和 $0<\varepsilon_0<1$，得 $\widetilde{\boldsymbol{M}_2}\in\widetilde{B_2}$。

推论 3.2 设引理 3.1 中的假设都成立，ε_0 和 δ_0 也由引理 3.1 给定。如果(3.1)成立并且存在对称矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{M}_1}\in\widetilde{B_2}$ 满足

$$\left(\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}\left|D_t^sD_x^ru-\widetilde{\boldsymbol{M}_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{\frac{\left|Q_{\delta_0}\right|}{|Q_1|}}\varepsilon_0\delta_0^{\frac{\ln(1/2)}{\ln\delta_0}} \tag{3.13}$$

其中 $2|s|+|r|=2$；那么 $u\in C^{2,\alpha}\left(\overline{Q_{1/2}}\right)$，这里 $\alpha=\dfrac{\ln(1/2)}{\ln\delta_0}$，并有

$$[u]_{\alpha,Q_{1/2}}\le 2C_1\delta_0^{-\frac{n+2}{0}}\varepsilon_0 \tag{3.14}$$

其中 C_1 是推论(2.2)中给定的常数。

证明：由推论 2.2，我们只需证对任意的 $X_0\in\overline{Q_{1/2}},\ k=1,2,\cdots$，存在对称矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{X_{0,k}}\in\widetilde{B_2}$，满足

$$\left(\frac{1}{\left|Q_{\delta_0^k}(X_0)\right|}\int_{Q_{\delta_0^k}(X_0)}\left|D_t^sD_x^ru-\widetilde{\boldsymbol{M}}_{X_{0,k}}\right|^2\right)^{\frac12}\le\varepsilon_0\delta_0^{k\frac{\ln(1/2)}{\ln\delta_0}} \tag{3.15}$$

我们用数学归纳法来证明(3.15)。首先当 $k=1$ 时，因为 $Q_{\delta_0}(X_0)\subset Q_1$，取 $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{X_{0,1}}=\widetilde{\boldsymbol{M}}_1$，由(3.13)既得(3.15)。假设 $k=m$ 时(3.15)成立，并有 $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{X_{0,k}}\in\widetilde{B_2}$。当 $k=m+1$ 时，对于 $X=(x,t_x)\in Q_{\delta_0^m}(X_0)$，设 $y=(x-x_0)/\delta_0^m,\ t_y=\left(t_x-t_{x_0}\right)/\delta_0^{2m};\ v(y,t_y)=u\left(x_0+\delta_0^my,t_{x_0}+\delta_0^{2m}t_y\right)/\delta_0^{2m}$，则 $(y,t_y)\in Q_1$。因为 $D_t^sD_x^ru(X)=D_t^sD_x^rv(Y)$，于是将 u 换成 v，(3.1)也成立，并且 $v_t-F\left(D_y^2v\right)=0$，由归纳假设得存在矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{X_{0,m}}\in\widetilde{B_2}$ 满足

$$\left(\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}\left|D_t^sD_x^rv-\widetilde{\boldsymbol{M}}_{X_{0,m}}\right|^2\right)^{\frac12}\le\left(\frac{1}{\left|Q_{\delta_0^m}(X_0)\right|}\int_{Q_{\delta_0^m}(X_0)}\left|D_t^sD_x^ru-\widetilde{\boldsymbol{M}}_{X_{0,m}}\right|^2\right)^{\frac12}\le\varepsilon_0\delta_0^{m\frac{\ln(1/2)}{\ln\delta_0}}\le\varepsilon_0,$$

我们指出这里 $\delta_0^{\frac{\ln(1/2)}{\ln\delta_0}}=1/2$。

由引理 3.1，存在 $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{X_{0,m+1}}\in\widetilde{B_2}$ 矩阵使得

$$\left(\frac{1}{\left|Q_{\delta_0}\right|}\int_{Q_{\delta_0}}\left|D_t^sD_x^rv-\widetilde{\boldsymbol{M}}_{X_{0,m+1}}\right|^2\right)^{\frac12}\le\frac12\varepsilon_0\delta_0^{m\frac{\ln(1/2)}{\ln\delta_0}},$$

即

$$\left(\frac{1}{\left|Q_{\delta_0^{m+1}}(X_0)\right|}\int_{Q_{\delta_0^{m+1}}(X_0)}\left|D_t^sD_x^ru-\widetilde{\boldsymbol{M}}_{X_{0,m+1}}\right|^2\right)^{\frac12}\le\varepsilon_0\delta_0^{(m+1)\frac{\ln(1/2)}{\ln\delta_0}}.$$

因此，当 $k=m+1$ 时，(3.15)成立。

定理 1.1 的证明 由 $u\in C^2(Q_1)$ 不妨设 $\|u\|_{L^\infty(Q_{3/4})}\le 1$ 令集合 $D=D_t^sD_x^ru(Q_{3/4})$ 其中 $2|s|+|r|=2$。因为 $D_t^sD_x^ru$ 连续，则 D 是 S_n 中的有界集。由 F 是几乎处处局部 $C^{1,\beta}$ 的，则存在常数 K，使(1.3)成立。设 ε_0 和 δ_0 由引理(3.1)给定(注意 ε_0 和 δ_0 仅依赖于 $\lambda,\Lambda,n,\beta,K$)，对任意的 $X_0\in Q_{1/2}$，取 $r_{X_0}>0$ 足够小，使得 $Q_{r_{X_0}}\subset Q_{3/4}$，

$$\left|D_t^sD_x^ru(X)-D_t^sD_x^ru(X_0)\right|\le\frac12\varepsilon_0\delta_0^{\frac{n+2}{2}}\le\varepsilon_0,\ X\in Q_{rx_0}(X_0), \tag{3.16}$$

于是有

$$\left(\frac{1}{\left|Q_{r_{X_0}}(X_0)\right|}\int_{Q_{r_{X_0}}(X_0)}\left|D_t^sD_x^ru-D_t^sD_x^ru(X_0)\right|^2\right)^{1/2}\le\sqrt{\frac{\left|Q_{\delta_0}\right|}{|Q_1|}}\varepsilon_0\delta_0^{\frac{\ln(1/2)}{\ln(\delta_0)}}. \tag{3.17}$$

对于 $X=(x,t_x)\in Q_{r_{X_0}}(X_0)$，设 $y=(x-x_0)/r_{X_0}$ ，$t_y=(t_x-t_{x_0})/r_{X_0}^2$ ，$v(y,t_y)=u(x_0+r_{X_0}y,t_{x_0}+r_{X_0}^2t_y)/r_{X_0}^2$ ，则 $(y,t_y)\in Q_1$ 。当 $Y\in Q_1$ 时，显然有 $D_t^sD_x^rv(Y)=D_t^sD_x^ru(X)$，于是 v 是方程(1.1)的解。由(3.16)、(3.17)易得引理 3.1 的所有条件，(3.1)和(3.13)都对 v 成立，所以由推论 3.4 得：$v\in C^{2,\alpha}\left(\overline{Q_{1/2}}\right)$，这里 $\alpha=\dfrac{\ln(1/2)}{\ln(\delta_0)}$，并且有

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}\left(\overline{Q_{1/2}}\right)}\le C_2\delta_0^{\frac{-(n+2)}{2}}\|v\|_{C^{1,1}\left(\overline{Q_{3/4}}\right)};$$

其中 C_2 只依赖于 n,α 。即 $u\in C^{2,\alpha}\left(\overline{Q_{r_{X_0}/2}(X_0)}\right)$，并且

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}\left(\overline{Q_{r_{X_0}/2}(X_0)}\right)}\le C_2\delta_0^{\frac{-(n+2)}{2}}r_{X_0}^{-\alpha}\|u\|_{C^{1,1}\left(\overline{Q_{3/4}}\right)}.$$

因为 X_0 是任意的，$\overline{Q_{1/2}}$ 被 N 个半径为 r_{X_0} 的球覆盖，其中 N 只依赖于 r_{X_0} ，n 和 ρ ，证毕。

4. 致谢

本文衷心感谢国家自然科学基金的资助以及审稿人的帮助。

参考文献 (References)

[1] L. H. Wang. On the regularity of fully nonlinear parabolic equations: I. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1992, 45: 27-76.
[2] L.C. Evans. Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1982, 35(3): 333-363.
[3] L. A. Caffarelli, X. Cabre. Fully nonlinear elliptic equations. American Mathematical Society, 1995.
[4] 曹毅, 王立周. 完全非线性椭圆方程的古典解[J]. 数学年刊, 2010, 31: 557-564.
[5] G. M. Lieberman. Second order parabolic partial differential equation. Iowa State: Would Scientific, 1996.
[6] 陈亚浙. 二阶抛物型偏微分方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2003.

