Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 144-148
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.32023 Published Online March 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

General Formula and Judgment Theorem of Three-Dimensinal Original Congruent Number

Yonggang Guan[1], Chunhe Guan[2]

[1]Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing
[2]Fada Middle School, Longjiang
Email: 770578942@qq.com

Received: Dec. 19th, 2012; revised: Feb. 2nd, 2013; accepted: Feb. 19th, 2013

Abstract: Congruent number problem has been extended to three-dimensional space from two-dimensional one by applying fundamental number theory. The general formulas and judgment theorems of three-dimensional original congruent number have been deduced. The relationship between various types of three-dimensional congruent number has been clarified, and the problems associated with the three-dimensional congruent number have been comprehensively resolved.

Keywords: Three-Dimensional Congruent Number; Three-Dimensional Original Congruent Number; Three-Dimensional Formula of the Original Congruent Number; Three-Dimensional Extensive Original Congruent Number; Three-Dimensional Integer Congruent Number

推导三维本原同余数一般公式及其判定定理

关永刚，关春河

[1]清华大学电机系，北京
[2]黑龙江省龙江县发达中学，龙江
Email: 770578942@qq.com

收稿日期：2012 年 12 月 19 日；修回日期：2013 年 2 月 2 日；录用日期：2013 年 2 月 19 日

摘　要：通过运用初等数论方法，把同余数问题从二维空间推广到三维空间。推导出三维本原同余数一般公式及其判定定理。阐明了各类三维同余数之间的关系，全面解决了三维同余数相关问题。

关键词：三维同余数；三维本原同余数；三维本原同余数公式；三维泛本原同余数；三维整同余数

1. 引言

“同余数问题是三大千年数论难题之一[1]。”由于我们推导出了本原同余数一般公式[2]，且又推导出本原同余数的基本判定定理[3]。因此，同余数的核心问题得到解决[4]。把同余数的定义域由正整数扩展到有理数[4]，这是非常合理的。但文献[4]未能清晰地阐明数域扩展后各类同余数之间的关系。我们在文献[5]中完成了这项工作。所以，传统意义上的同余数问题得到彻底的解决。现在，我们进一步研究文献[4]对同余数给出的定义：同余数是三边均为有理数的直角三角形的面积。在此不难看出，同余数与勾股定理密切相关。在文献[6]中，我们利用空间直角坐标系，把传统意义上的勾股定理定义为二维勾股定理，进而推广出三维勾股定理，四维勾股定理。于是，传统意义上的同余数就是与二维勾股数相对应的二维同余数。那么，与三维勾股数，四维勾股数相对应，就应该存在三维同余数，四维同余数。仿照二维同余数的解决方法，我们已经解决了三维同余数的相关问题，推导出以下主要结果。

2. 主要结果

1) 三维同余数定义：三维同余数是四面均为有理数，且有三个直角相邻的直角四面体的体积V。

当V为不含立方因子的有理数F时，称F为三维泛本原同余数。当F又为正整数E时，称E为三维本原同余数。

当V为为正整数m时，称m为三维整同余数，当m又为不含立方因子的正整数E时，称E为三维本原同余数。

2) 三维本原同余数一般公式为：

$$E = \frac{36tk\left(t+k\right)}{W^3}$$

其中：$\left(t,k\right)=1$，$2\nmid t$，$t,k,W \in N^+$。且满足$W_{\max}^3 \| 36tk\left(t+k\right)$。

3) 三维本原同余数基本判定定理：对于一个不含立方因子的正整数E，如果存在一个正整数w，使得方程$6Ew^3 = tk\left(t+k\right)$有满足$\left(t,k\right)=1$的正整数解，那么$E$是三维本原同余数。否则，$E$为非三维本原同余数。

证 首先，建立三维直角坐标系$O\text{-}xyz$，置直角四面体$O\text{-}ABC$于第一卦限。

如图1所示，设四面体面各点坐标依次为：$O\left(0,0,0\right)$，$A\left(x,0,0\right)$，$B\left(0,y,0\right)$，$C\left(0,0,z\right)$，

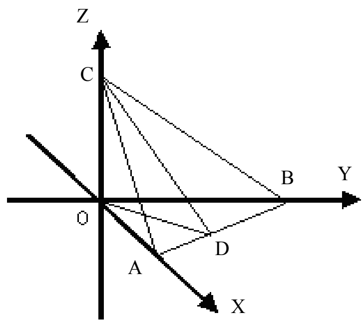

Figure 1. Diagramatic sketch of three-dimensional congruent model
图1. 三维同余数模型示意图。

再令$S_1 = \frac{1}{2}xy$，$S_2 = \frac{1}{2}yz$，$S_3 = \frac{1}{2}xz$。

又过O点作$OD \perp AB$于点D，连结CD。于是推得

$$S_4 = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + z^2\left(x^2+y^2\right)}$$

根据三维勾股定理[6]和三维同余数定义，可得三维同余数的代数定义形式：

V是三维同余数，当且仅当方程组

$$\begin{cases} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_4^2 & (1) \\ V = \frac{1}{6}xyz & (2) \end{cases}$$

有有理数解。

由于方程(1)是二次齐次方程，所以，求方程(1)的有理数解，只需求出它满足$\left(x,y,z\right)=1$，且S_4为整数的整数解[7]。而要想满足S_4为整数，必须首先满足$\sqrt{x^2y^2 + z^2\left(x^2+y^2\right)}$为整数。取$x=t, y=k$。再令$z=t+k$。可推得$\sqrt{x^2y^2+z^2\left(x^2+y^2\right)} = \sqrt{t^2k^2+\left(t+k\right)^2\left(t^2+k^2\right)} = t^2+tk+k^2$。

显然，此时若要满足$(x,y,z)=1$，只需$(t,k)=1$。而且t,k至少有一个为奇数。不失一般性，不妨规定$2\nmid t$。再把$x=t,y=k$，$z=t+k$带入方程(2)，可推得$V=\frac{1}{6}tk(t+k)$。由于V是三维同余数，所以V乘以一个立方数仍然是三维同余数。取这个立方数为6^3。于是可推得$m=6^3V=36tk(t+k)$是三维整同余数。同理，再取$W_{\max}^3\|36tk(t+k)$。即可推得三维本原同余数一般公式：

$$E=m\cdot\frac{1}{W^3}=\frac{36tk(t+k)}{W^3}$$

其中：$(t,k)=1$，$2\nmid t$，$t,k,W\in N^+$。且满足$W_{\max}^3\|36tk(t+k)$。

利用这个公式，我们可以计算出全部的三维本原同余数。限于篇幅，我们只取$t\le 10,k\le 10$。可得如下部分三维本原同余数函数表1。

Table 1. Function table of three-dimensional primitive congruent
表 1. 三维本原同余数函数表

t \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9	1	2	90	5	7	252	12	15	495
3	2	5	-	14	20	-	35	44	-	65
5	5	315	20	30	-	55	70	2340	105	-
7	252	21	35	1386	70	91	-	140	21	5355
9	15	33	-	78	105	-	21	204	-	285

例如：1) 取$t=1,k=1,W=2$，由公式即可解得$E=9$。此时，在表1中，可取$OA=t=1,OB=k=1,$ $OC=t+k=2$。于是推得$S_1=\frac{1}{2}$，$S_2=1$，$S_3=1$，$S_4=\frac{1}{2}\sqrt{1+2^2(1+1)}=\frac{3}{2}$。因此可知，直角四面体*O-ABC*的四个三角形面积均为有理数。所以，$V=\frac{1}{6}tk(t+k)=\frac{1}{3}$是三维同余数。于是即可推得$E=3^3\cdot V=9$为三维本原同余数。

2) 取$t=5,k=7,W=1$，由公式即可解得$E=70$。此时，在图1中，可取$OA=t=5,OB=k=7,$ $OC=t+k=12$。于是推得$S_1=\frac{35}{2}$，$S_2=30$，$S_3=42$，$S_4=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\times 7^2+12^2(5^2+7^2)}=\frac{109}{2}$。因此可知，直角四面体*O-ABC*的四个三角形面积均为有理数。所以，$V=\frac{1}{6}tk(t+k)=70$是三维同余数。于是即可推得$E=V=70$为三维本原同余数。

在三维本原同余数公式中，取$W=6w$，即可推出三维本原同余数判定定理：若方程

$$6Ew^3=tk(t+k) \tag{3}$$

有满足$(t,k)=1$，且$2\nmid t$的正整数解，那么E是三维本原同余数。否则，E为非三维本原同余数。

此定理证明过程简明易得，在此省略。

利用这个定理，就可以对任一不含立方因子的正整数是否为三维本原同余数作出判定。

例如：1是三维本原同余数。

证：因为$E=1,$取$w=1,$推得$6=1\times 2\times 3$。所以，1是三维本原同余数。

由1是三维本原同余数，又可以得出一个推论；

推论1：任一个有理数的立方都是三维同余数。

2是三维本原同余数。

证 因为$E=2$，取$w=1$，推得$6\times2=3\times1\times4$。所以，2 是三维本原同余数。
3 为非三维本原同余数。

证：把$E=3$带入方程(3)。由于w是满足$W_{\max}^3 \| tk(t+k)$自由因子，不妨令$w=w_1\cdot w_2\cdot w_3$，且$w_1^3|t$，$w_2^3|k$，$w_3^3|t+k$。因为$(t,k)=1$，且$2\nmid t$，所以$(w_1,w_2)=(w_2,w_3)=(w_1,w_3)=1$。于是可推知，若$E=3$满足方程(3)，则必须满足下列方程之一有正整数解。

$$9w_1^3+2w_2^3=w_3^3 \tag{4}$$

$$9w_1^3+w_2^3=2w_3^3 \tag{5}$$

$$w_1^3+18w_2^3=w_3^3 \tag{6}$$

$$w_1^3+9w_2^3=2w_3^3 \tag{7}$$

$$w_1^3+2w_2^3=9w_3^3 \tag{8}$$

$$w_1^3+w_2^3=18w_3^3 \tag{9}$$

因为$x^3\equiv0,+1,-1\pmod 9$[1]，于是对方程(4)取$(\bmod 9)$进行模运算，推得$0+2\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix}$。

所以方程(4)没有正整数解。同理，方程(5)、(7)、(8)也没有正整数解。

假设方程(6)有正整数解，因为$(t,k)=1$，且$2\nmid t$，可推得$2\nmid w_1$，$2\nmid w_3$。$3\nmid w_1$，$3\nmid w_3$。令$w_3-w_1=2v$，由方程(6)可得

$$9w_2^3=3w_1^2v+6w_1v^2+4v^3 \tag{10}$$

由于$3\nmid w_1$，因此$3|v$。再令$v=3v_1$，由方程(10)又可得

$$w_2^3=w_1^2v_1+6w_1v_1^2+12v_1^3 \tag{11}$$

显然，此时若要满足方程(11)有正整数解，须满足$v_1=v_2^3$，且$v_2|w_2$。令$w_2=w_4v_2$，由方程(11)又可得

$$w_4^3=w_1^2+6w_1v_1+12v_1^2 \tag{12}$$

此时，方程(12)的左边为$w_4^3=x^2-y^2$型[1]，因此在有理数域一定可以分解质因式。但在方程(12)的右边，由于$\Delta=(6v_1)^2-4\times12v_1^2=-12v_1^2<0$，因此在有理数域一定不能分解质因式。推出矛盾。

所以，方程(6)没有正整数解。同理，方程(9)也没有正整数解。

所以，3 为非三维本原同余数。

同理，4 为非三维本原同余数。

......

在$n\le200$以内不含立方因子的正整数共有 167 个。其中三维本原同余数有且只有 91 个，它们分别是：

1	2	5	7	9	12	13	14	15	19	20	21	22	26	30	31	33	35
37	38	41	43	44	47	49	51	55	57	58	61	62	65	66	68	69	70
73	75	77	78	79	83	84	85	86	90	91	92	97	98	99	100	103	105
109	110	115	116	117	119	126	131	133	138	139	140	145	150	151	153	154	155
156	157	159	161	163	165	169	170	173	174	177	181	182	186	187	188	190	194
195																	

利用三维本原同余数基本判定定理，不但可以对任一个正整数是否为三维整同余数逐一做出判定。而且还可以推出下面两个推论，作为下面三种特殊类型的正整数是三维整同余数的判定依据。

推论 2：当$2\nmid x$，$x,y\in N^+$时，型如$m=3x^3+2y^3$的正整数一定是三维整同余数。

推论 3：当 $2\nmid x$，$x,y\in N^+$ 时，型如 $m=3x^3-2y^3$ 的正整数一定是三维整同余数。

推论 4：当 $2\nmid y$，$x,y\in N^+$ 时，型如 $m=2x^3-3y^3$ 的正整数一定是三维整同余数。

3．结束语

仿二维同余数的解决方法，我们也可以彻底解决三维同余数相应问题。类似地，我们也可以解决四维同余数相应问题。至于同余数问题是否能够推广到五维空间及以上空间，还有待进一步探讨。

参考文献 (References)

[1] 胡作玄. 从毕达哥拉斯到费尔马[M]. 郑州: 河南科学技术出版社, 1998: 104-140.
[2] 关永刚, 关春河. 推导本原同余数公式[J]. 长春师范学院学报, 2005, 24(4): 9-11.
[3] 关永刚, 关春河. 本原同余数的判定[J]. 赤峰学院学报, 2006, 4: 1-4.
[4] 冯祥树. 本原勾股数与本原同余数表的构造[J]. 太行学刊, 1994, 2.
[5] 关永刚, 关春河. 本原同余数的推广[C]. 第八届全国初等数学研讨会论文集, 2012: 8.
[6] 关春河. 空间勾股定理及空间勾股数[J]. 齐齐哈尔大学高师理科学刊, 2007, 27(4): 35-38.
[7] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.