

Counting, Classification and Graphic Design of Sudoku*

Yichao Yang¹, Mengge Li²

¹Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou

²Faculty of Social Sciences, Zhejiang University, Hangzhou

Email: yyc880113@163.com, 445876973@qq.com

Received: Apr. 29th, 2013; revised: May 16th, 2013; accepted: May 27th, 2013

Copyright © 2013 Yichao Yang, Mengge Li. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: The aim of this paper is to study how to count the number of hexagonal sudokus. Firstly, using the method of Grobner basis theory of polynomials, we show the way to count the number of hexagonal sudokus and give an estimate of the number. Secondly, we consider the symmetry properties of hexagonal sudokus under the action of the cyclic group of order 6. Using the famous Burnside lemma in group theory, the number of hexagonal sudokus under the symmetry of rotation group is obtained. Lastly, we discuss the design project of the circular disc with any radius via spelling hexagonal sudokus and introduce the concept of spelling efficiency whilst showing its changing rules.

Keywords: Hexagonal Sudoku; Grobner Basis; Burnside's Lemma; Splicing Efficiency

数独的计数、分类与图案设计*

杨一超¹, 李梦鸽²

¹浙江大学数学系, 杭州

²浙江大学社会科学学部, 杭州

Email: yyc880113@163.com, 445876973@qq.com

收稿日期: 2013年4月29日; 修回日期: 2013年5月16日; 录用日期: 2013年5月27日

摘要: 在本文中, 我们研究六角数独的计数问题。首先, 我们用多项式的 Grobner 基理论方法, 给出计算六角数独的总数的方法, 并给出了总数的一个估计值。其次, 我们考虑六角数独关于旋转群的对称性, 利用群论著名的 Burnside 引理, 给出了旋转对称的等价意义下的六角数独的总数。最后, 我们研究六角数独拼接成可无限延展的圆形几何图形的设计方案, 并提出了拼图效率的概念, 给出了拼图效率的变化规律。

关键词: 六角数独; Grobner 基; Burnside 引理; 拼图效率

1. 引言

“数独”一词来自日语, 意思是“单独的数字”或“只出现一次的数字”。概括来说, 它就是一种填数游戏。但这一概念最初并非来自日本, 而是源自拉丁方, 它是十八世纪的瑞士数学家欧拉发明的。现在最常见的数独是 9×9 的数独, 经常在一些报纸上作为给读者的智力游戏出现, 吸引着“数独迷”们的兴趣, 并有数独填写游戏的比赛。本文中研究的六角数独是众多变形数独中的一种。通过对于规则的重新定义与分析, 我们可以发现其中存在着大量有趣的数学性质^[1]。本文我们主要研究六角数独的计数、分类与图案设计。

在大量查阅文献后, 我们发现仅所有 9×9 的数独就约有 6.671×10^{21} 种, 见文献[2]。因此, 我们讨论六角数

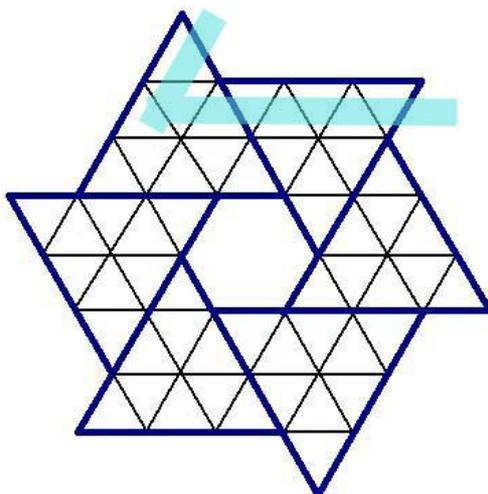
*基金项目: 国家自然科学基金(NO.11271318, NO.11171296)、浙江省自然科学基金(NO.J20100343)和教育部博士点新教师专项基金(NO.20110101110010)。

独的方法是把数独的计数问题转化为多项式方程的解的个数问题, 然后选择利用代数中多项式的 Grobner 基理论, 来计算所有数独的个数。在此过程中, 我们的主要方法是借助电脑来计算多项式环的某一理想的 Grobner 基。

同时, 类比于 4×4 数独在变换下只有 3 种本质不同的数独, 我们发现六角数独同样具有某些对称性质(旋转对称)。因此, 我们可以给出在旋转变换下的不变量。即在已知个数的条件下, 利用有限群的 Burnside 定理来将数独分类, 求出不同数独类的类数和每个数独类所含数独的个数。

我们考虑的六角数独的定义如下:

- 1) 每个三角填入的 9 个数字互不相同
 - 2) 每行填入的 9 个数字互不相同, 如一行的数字不足 9 个, 将和其对应相连的大三角顶角共同组成, 如下图蓝色区域所示。
 - 3) 每“/”型斜边的 9 个数字互不相同, 如不足 9 个, 同 2。
- 每“\”型斜边的 9 个数字互不相同, 如不足 9 个, 同 2。



即每个大三角、水平线、向左的斜线和向右的斜线都不重复的填入数字 1~9, 另外它每级线中的第一和最后一条将和其对应相连的大三角顶角共同组成。

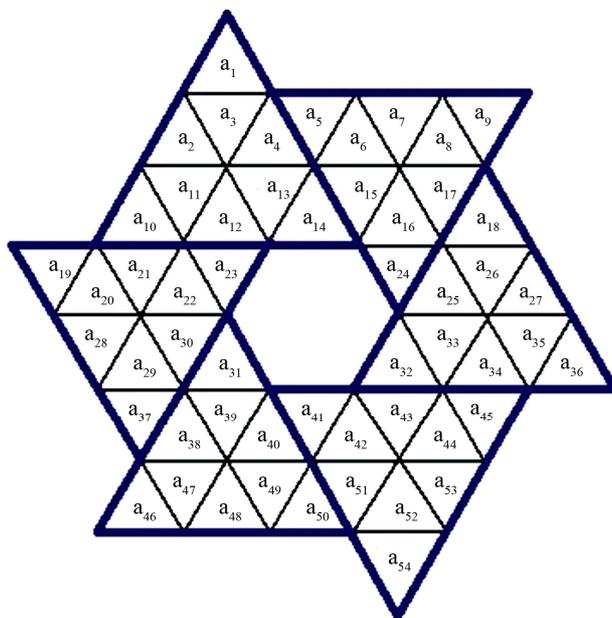
从该数独的几何性质来看, 六角数独的形状十分匀称, 均由正三角形组成, 可拼接成可无限延展的几何图形, 并且其中规则的镶嵌有大小统一的空隙。因此, 我们考虑到可以用该几何图形做成如地砖等具有规则形状的统一图案的物件。通过计算, 我们可以得到最省材料的、规则形状的设计个数的种类, 为可能的产品种类设计提供方法。

因此, 我们的讨论分三部分: 首先, 我们用多项式的 Grobner 基理论方法, 计算出六角数独的总数。在这一层面上, 我们是把六角数独不同方向的数据分布看作不同的。其次, 我们考虑六角数独关于旋转的对称性, 利用群论的 Burnside 引理, 我们给出了旋转对称的等价意义下的六角数独的总数。最后, 我们研究六角数独拼接成可无限延展的圆形几何图形的设计方案。由于该圆形图案所包含六角数独的个数决定于圆盘的半径和面积大小, 所以我们提出了拼图效率的概念, 即单位圆盘面积所含数独的个数, 给出了拼图效率的变化规律。这个规律, 可以成为我们找到最省材料的、规则形状的设计圆盘图案的方案。

2. 数独的计数

对于六角数独, 我们首先根据数独本身的限制条件给出其对应的多项式方程系统(积 - 和系统)。

由于对于填入数独的数字本身没有限制, 我们不妨把对象取自集合 $S = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (注: 这是为了保证多项式方程组解的唯一性。具体请参考下文及文献[3]), 把数独的各个位置标号为 a_1, a_2, \dots, a_{54} 如图所示:



由 6 个三角形的限制, 我们有如下的约束方程:

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} &= (-2) + (-1) + 1 + 2 + \dots + 7 = 25 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} &= (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7 = 10080 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{24} &= 25 \\ a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{15} a_{16} a_{17} a_{24} &= 10080 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{共} \\ \text{计} \\ 12 \\ \text{个} \end{array}$$

由于行的限制, 我们有约束方程:

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_9 &= 25 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_9 &= 10080 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{共} \\ \text{计} \\ 12 \\ \text{个} \end{array}$$

由于 “/” 型斜边的限制, 我们有约束方程:

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_{10} + a_{11} + a_{21} + a_{20} + a_{28} + a_{19} &= (-2) + (-1) + 1 + 2 + \dots + 7 = 25 \\ a_1 a_2 a_3 a_{10} a_{11} a_{21} a_{20} a_{28} a_{19} &= (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7 = 10080 \\ a_5 + a_4 + a_{13} + a_{12} + a_{23} + a_{22} + a_{30} + a_{29} + a_{37} &= 25 \\ a_5 a_4 a_{13} a_{12} a_{23} a_{22} a_{30} a_{29} a_{37} &= 10080 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{共} \\ \text{计} \\ 12 \\ \text{个} \end{array}$$

由于 “\” 型斜边的限制, 我们有约束方程:

$$\left. \begin{aligned} a_9 + a_7 + a_8 + a_{17} + a_{18} + a_{26} + a_{27} + a_{35} + a_{36} &= (-2) + (-1) + 1 + 2 + \dots + 7 = 25 \\ a_9 a_7 a_8 a_{17} a_{18} a_{26} a_{27} a_{35} a_{36} &= (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7 = 10080 \\ a_5 + a_6 + a_{15} + a_{16} + a_{24} + a_{25} + a_{33} + a_{34} + a_{45} &= 25 \\ a_5 a_6 a_{15} a_{16} a_{24} a_{25} a_{33} a_{34} a_{45} &= 10080 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{共} \\ \text{计} \\ 12 \\ \text{个} \end{array}$$

上述共获得 48 个方程。

又由于 a_1, a_2, \dots, a_{54} 取自集合 $S = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 所以我们有以下约束多项式:

$$(a_i + 2)(a_i + 1)(a_i - 1)(a_i - 2) \cdots (a_i - 7) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 54)$$

有了如上的多项式方程组(共 $48 + 54 = 102$ 个方程, 54 个变量), 我们接下来说明怎样用 Grobner 基的理论来求出数独的总数(即方程的所有的解的个数)。

Grobner 基的概念最初是由 B. Buchberger 于 1965 年提出的。粗略的说, 一个多项式理想的 Grobner 基是该理想的一组具有良好性质的生成元。Grobner 基的良好性质使其可以用于解决诸多与多项式理想有关的理论与实际问题, 如多项式方程组求解等。Grobner 基可以从理想的任意有限生成元计算得出。

下面我们首先介绍一下关于多项式环的基本概念, 然后对其上理想的 Grobner 基进行精确的定义:

定义 1: 多项式环 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的一个理想 I 称为根理想若 I 满足 $\sqrt{I} = I$, 其中

$$\sqrt{I} = \{g \in R[x_1, x_2, \dots, x_n] : g^m \in I \text{ 对于某个大于等于 } 1 \text{ 的整数 } m\}$$

定义 2: 多项式环 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的一个理想 I 称为零维理想若 $R[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ 是域 R 上有限维的。

定义 3: 如果一个理想 I 能够有有限个元素生成, 即 $\exists a_1, a_2, \dots, a_s \in I$, 满足 $I = \left\langle \sum_{i=1}^s r_i a_i, r_i \in R[x_1, x_2, \dots, x_n] \right\rangle$, 则称 I 为由 a_1, a_2, \dots, a_s 生成的有限生成理想 $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ 为 I 的生成元。

接下来我们考虑的都是由 54 个变量在有理数域上的多元多项式环 $Q[a_1, a_2, \dots, a_{54}]$ 。在定义 Grobner 基之前, 我们首先定义下述概念。

定义 4: 我们按照字典序 $a_1 < a_2 < \dots < a_{54}$ 对一个多项式的单项式进行从大到小的排列。一个多项式 f 的首项为此多项式经过合并同类项后关于此排列的最大单项式, 记为 $lt(f)$ 。单项式组成的一个集合 S 的首项生成的理想为 S 中每个元素的首项生成的理想, 记作 $Lt(S)$, 即 $Lt(S) = \langle \{lt(f) | f \in S\} \rangle$ 。

现在我们给出 Grobner 基的定义:

定义 5: $Q[a_1, a_2, \dots, a_{54}]$ 中, I 是 Q 的一个理想, S 是其一个生成元集。若 S 的首项生成的理想等于 I 的首项生成的理想, 即 $Lt(S) = Lt(I)$, 则称 S 为 I 的一个 Grobner 基。

例: (1) 当 $I = \langle a_1^2 - 1, a_1^5 - a_1^4 \rangle$ 时, $S = \{a_1 - 1\}$ 为 I 的一个 Grobner 基;

(2) 当 $I = \langle a_1 - 1, a_1 \rangle$ 时, $S = \{a_1 - 1, a_1\}$ 不是 I 的 Grobner 基, 这是因为 $Lt(S) = \langle a_1 \rangle$,

$1 \in I \Rightarrow Lt(I) \supseteq \langle 1 \rangle = Q[a_1, a_2, \dots, a_{54}]$, 所以

$$Lt(I) = Q[a_1, a_2, \dots, a_{54}]。$$

Grobner 基的几点说明:

1) Grobner 基的存在性和求法:

在多项式环 $Q[a_1, a_2, \dots, a_{54}]$ 中, Grobner 基的存在性是可以由 Hilbert 基定理和 Buchberger 算法来保证的。

Hilbert 基定理: 多项式环 $Q[a_1, a_2, \dots, a_{54}]$ 中每个理想 I 都有有限生成元, 即都存在 $g_1, g_2, \dots, g_n \in I$, 使得 $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ 。

既然我们已经知道对于 $Q[a_1, a_2, \dots, a_{54}]$ 中任意一个理想 I , 都有 $g_1, g_2, \dots, g_n \in I$, 使得 $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ 。那么下面的 Buchberger 算法就告诉我们怎样由 g_1, g_2, \dots, g_n 得到理想 I 的 Grobner 基。

详情请参见参考文献[4]。

下面回到我们所研究的数独, 求出上述已给 102 个限制方程所对应多项式生成理想 I 的 Grobner 基。

引理 1.1: 在数独的其他数字都不变的条件下, 每个大三角的顶角的两格(如 a_1 和 a_3)的数字可相互交换并满足数独的规则。

证明: 根据六角数独的规则, 我们可以很容易的发现, a_1 和 a_3 在数独的限制条件中的地位是相等的, 因此结论成立。

引理 1.2: 中间的正六边形的每条边旁的小三角形中的数字和其对顶的小三角形(如 a_5 和 a_{14})中的数字相等。

证明: 对于六角数独中左边两个“/”型数串, 我们有

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_{10} + a_{11} + a_{21} + a_{20} + a_{28} + a_{19} = 25 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_{12} + a_{13} + a_{22} + a_{23} + a_{29} + a_{30} + a_{37} = 25 \quad (2)$$

再对于数独左边两个大三角, 我们有

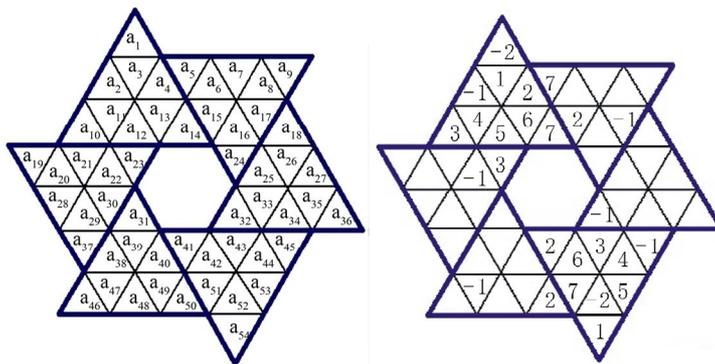
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = 25 \quad (3)$$

$$a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{28} + a_{29} + a_{30} + a_{37} = 25 \quad (4)$$

由((1) + (2)) - ((3) + (4)), 得 $a_{14} = a_5$ 。所以, 中间的正六边形的每条边旁的小三角形中的数字和其对顶的小三角形(如 a_5 和 a_{14}) 中的数字相等。

根据引理 1.1、1.2, 我们通过 Maple 软件编程来计算出我们所需的 Gröbner 基。

首先, 我们令 $a_1 = -2, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = 2, a_{10} = 3, a_{11} = 4, a_{12} = 5, a_{13} = 6, a_{14} = 7$ 。进一步, 当 $a_{32} = -1, a_{43} = 3, a_{44} = 4, a_{53} = 5, a_{41} = 2, a_{42} = 6, a_{51} = 7, a_{52} = -2, a_{54} = 1$ 时, 根据六角数独规则, 我们可以得到如下图所示的数独:



其中, 根据引理 1.2, $a_5 = 7, a_{32} = -1, a_{50} = 2, a_{23} = 3$ 。

由 $a_3 = -1$, 可以得出 a_7, a_8 不为-1; 由 $a_{32} = -1$, 可以得出 $a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}, a_{36}$ 不为-1; 从而可以导出, $a_{17} = -1$ 。

由 $a_{32} = -1, a_{45} = -1, a_2 = -1$, 可以得出 $a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{28}, a_{29}, a_{30}, a_{37}$ 不为-1。

因为 $a_{23} = 3$, 可以得出 $a_{22} = -1$ 。

同理 a_{46}, a_{47} 中有且只有一个为-1。根据引理 1.1, 我们可以得出 a_{46}, a_{47} 可互换。因此, 不妨令 $a_{47} = -1$ 。

上面我们通过增加六角数独的条件, 已经将六角数独的多项式进行了减缩, 以增加计算机运行的效率, 然后通过 Maple 软件的 Gröbner 基程序包进行编程, 得到了由以上 102 个方程对应的多项式所决定的理想 I 的 Gröbner 基的首项(共 39 个), 列举如下:

$$\begin{aligned} & a_6^2, a_7^2, a_8^2, a_9, a_{16}^2, a_{18}, a_{19}^2 a_6, a_7 a_{19}^3, a_{19}^4, a_{20} a_{19} a_6, a_{20}^2 a_6, a_7 a_{20}^2, a_{20}^2 a_{19}^2, \\ & a_{20}^3, a_{21}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{28}, a_{29} a_7 a_6, a_{29} a_{19}^3, a_{29} a_{20}^2, a_{29}^2, a_{30} a_7, a_{30} a_{19}^3, \\ & a_{30} a_{20} a_{19}, a_{30} a_{20}^2, a_{29} a_{30}, a_{30}^2, a_{31}, a_{33}, a_{34}, a_{35}^2, a_{36}, a_{38}, a_{39}, a_{46}, a_{48}, a_{49} \end{aligned}$$

以上我们已经知道怎么求得一个多项式理想 I 的 Grobner 基, 现在我们将根据参考文献[2,4-6], 来建立六角数独的个数 N 与 Grobner 基 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subseteq Q[a_1, a_2, \dots, a_{54}]$ 的首项之间的关系。

引理 1.3: [5](有限性定理)若 $I \subset C[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 是一个理想。那么下面两个条件是等价的:

- 1) $A = C[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ 是复数域 C 上有限维的;
- 2) 理想 I 对应的簇 $V(I)$ (即 I 中所有多项式的零点的集合)是一个有限集。

引理 1.4: [5, 命题 2.7]若 I 是多项式环 $C[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的一个零维理想, 对于每一个 $i=1, 2, \dots, n$, 令 p_i 是 $I \cap C[x_i]$ 的唯一的非零生成元, $p_{i,red}$ 是 p_i 的非平方部分。那么 $\sqrt{I} = I + \langle p_{1,red}, \dots, p_{n,red} \rangle$ 。

引理 1.5: [5, 命题 2.10]若 I 是多项式环 $C[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的一个零维理想, $A = C[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ 。那么 $\dim_C A$ 不小于 $V(I)$ 中点的个数, 其中 $V(I)$ 是理想 I 对应的簇。此外, $\dim_C A$ 与 $V(I)$ 中点的个数相等当且仅当 I 是一个根理想。

引理 1.6: [6, 命题 2.1.6]若 $I = \langle s_1, s_2, \dots, s_m \rangle$ 是多项式环 $C[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的一个理想, 那么 $C[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ 的一组基可以表达成单项式 f 的陪集 $\bar{f} = f + I$ 的形式, 其中 f 满足 $f = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ 且 f 不能被任意的 $lt(s_i)$ 整除, $i=1, 2, \dots, m$ 。

有了上面的引理 1.3~1.6, 我们给出这一节的主要定理。

定理 1.7: 六角数独的个数 N 与 Grobner 基 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \in Q[a_1, a_2, \dots, a_{54}]$ 的首项之间有如下关系:

$$(*) N = \#\{f = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{54}^{i_{54}} \mid f \text{ 不能被任意的 } lt(s_i) \text{ 整除}, i=1, 2, \dots, n\},$$

其中 $lt(s_i)$ 是求多项式 s_i 在字典排序下的首项, $\#$ 是求出集合中的元素个数。

证明: 我们已经把六角数独的限制条件归结为 102 个方程, 即有如下关系:

六角数独的个数 $N = 102$ 个方程的公共解的个数 = 102 个多项式的公共零点

令 I 为由该 102 个多项式生成的理想, 首先我们来证明 I 是一个根理想和零维理想。

由于六角数独的个数总是有限个, 所以理想 I 对应的簇 $V(I)$ 是一个有限集, 由引理 1.3 得,

$A = Q[a_1, a_2, \dots, a_{54}]/I$ 是域 Q 上有限维的, 即 I 是零维理想。其次, 对于任意的 $i=1, 2, \dots, 54$,

$I \cap Q[a_i] = \langle (a_i + 2)(a_i + 1)(a_i - 1) \dots (a_i - 7) \rangle$, 即 $p_i = (a_i + 2)(a_i + 1)(a_i - 1) \dots (a_i - 7)$,

$p_{i,red} = (a_i + 2)(a_i + 1)(a_i - 1) \dots (a_i - 7) = p_i$, 所以由引理 1.4 得,

$$\sqrt{I} = I + \langle p_{1,red}, \dots, p_{n,red} \rangle = I + \langle (a_1 + 2) \dots (a_1 - 7), \dots, (a_{54} + 2) \dots (a_{54} - 7) \rangle = I$$

即 I 是一个根理想。

由于 I 既是一个根理想, 又是一个零维理想, 所以由引理 1.5 得, 102 个多项式的公共零点 = $\dim_Q A$, 其中 $A = Q[a_1, a_2, \dots, a_{54}]/I$ 。

又因为 Grobner 基 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 显然是理想 I 的一组生成元, 所以根据引理 1.6, 我们最后得到

$$\dim_Q A = \#\{f = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{54}^{i_{54}} \mid f \text{ 不能被任意的 } lt(s_i) \text{ 整除}, i=1, 2, \dots, n\},$$

即六角数独的个数 $N = \#\{f = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{54}^{i_{54}} \mid f \text{ 不能被任意的 } lt(s_i) \text{ 整除}, i=1, 2, \dots, n\}$, 定理得证。

在本文中, 我们准备利用容斥原理来求出 N 。□

引理 1.8: (容斥原理)

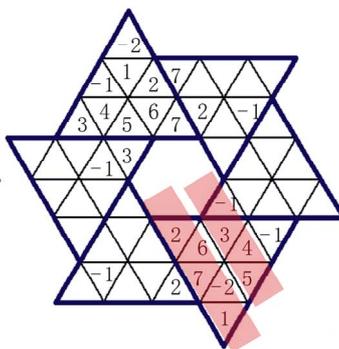
对于一个全集的 n 个有限子集合 A_1, \dots, A_n , 我们有如下计算公式:

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \\ &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_1 \cap A_n| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ & \quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

其中 $|A|$ 指的是集合 A 的元素个数。

为了应用容斥原理, 我们定义下述记号:

$$A_i = \{f = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{54}^{i_{54}} \mid f \text{ 能被任意的 } lt(s_i) \text{ 整除}\}。$$



并且考虑集合 $U = \{f = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_{54}^{i_{54}} \mid f \text{ 能被任意的 } lt(s_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ 。则 $U = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 。

通过选取相应的全集 S , 我们得到 $N = |\bar{U}| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ (这里 \bar{U} 表示集合 U 在全集 S 下的补集)。对于一般的 Grobner 基的首项集 G , 全集 S 的取法如下:

$$S = \{a_1^{i_1} a_2^{i_2} a_3^{i_3} \cdots a_{52}^{i_{52}} a_{53}^{i_{53}} a_{54}^{i_{54}} \mid 0 \leq i_j \leq l_j - 1, j = 1, 2, 3, \dots, 54\}$$

其中如果 a_j 在 Grobner 基的首项中出现, 定义 l_j 为 a_j 出现的最高次数;

如果 a_j 在 Grobner 基的首项中没有出现, 则自动令 $l_j = 1$ 。

例如, 对于上述 $\{-1, 3, 4, 5\} \{2, 6, 7, -2, 1\}$ (其中 $\{-1, 3, 4, 5\} \{2, 6, 7, -2, 1\}$ 标号规则如右图所示) 六角数独的全集

$$S = \{a_6^{i_6} a_7^{i_7} a_8^{i_8} a_{16}^{i_{16}} a_{19}^{i_{19}} a_{20}^{i_{20}} a_{29}^{i_{29}} a_{30}^{i_{30}} a_{35}^{i_{35}} \mid 0 \leq i_1, i_2, i_3, i_4, i_7, i_8, i_9 \leq 1, 0 \leq i_5 \leq 3, 0 \leq i_6 \leq 2\}$$

最后我们根据容斥原理, 经过计算列表如下, 得到在 $\{-1, 3, 4, 5\}$ 的前提下, $\{2, 6, 7, -2, 1\}$ 五元组所对应的每一种排列的数独个数及总数:

数独种类	计数	所乘倍数	个数	数独种类	计数	所乘倍数	个数
{2,6,7,-2,1}	384	$\times 2 \times 2$	1536	{7,2,1,-2,6}	192	$\times 2 \times 2 \times 2$	1536
{2,7,6,-2,1}	384	$\times 2 \times 2$	1536	{1,2,6,-2,7}	208	$\times 2 \times 2 \times 2$	1664
{6,2,7,-2,1}	320	$\times 2 \times 2$	1280	{1,6,2,-2,7}	48	$\times 2 \times 2 \times 2$	384
{6,7,2,-2,1}	528	$\times 2 \times 2$	2112	{2,1,6,-2,7}	16	$\times 2 \times 2 \times 2$	128
{7,2,6,-2,1}	384	$\times 2 \times 2$	1536	{2,6,1,-2,7}	80	$\times 2 \times 2 \times 2$	640
{7,6,2,-2,1}	592	$\times 2 \times 2$	2368	{6,1,2,-2,7}	64	$\times 2 \times 2 \times 2$	512
{1,6,7,-2,2}	48	$\times 2 \times 2 \times 2$	384	{6,2,1,-2,7}	64	$\times 2 \times 2 \times 2$	512
{1,7,6,-2,2}	64	$\times 2 \times 2 \times 2$	512	{7,-2,1,2,6}	0	$\times 2 \times 2 \times 2$	0
{6,1,7,-2,2}	64	$\times 2 \times 2 \times 2$	512	{-2,7,1,2,6}	0	$\times 2 \times 2 \times 2$	0
{6,7,1,-2,2}	136	$\times 2 \times 2 \times 2$	1088	{-2,1,7,2,6}	0	$\times 2 \times 2 \times 2$	0
{7,1,6,-2,2}	96	$\times 2 \times 2 \times 2$	768	{6,-2,1,2,7}	0	$\times 2 \times 2 \times 2$	0
{7,6,1,-2,2}	152	$\times 2 \times 2 \times 2$	1216	{-2,6,1,2,7}	0	$\times 2 \times 2 \times 2$	0
{1,2,7,-1,6}	0	$\times 2 \times 2 \times 2$	0	{-2,1,6,2,7}	0	$\times 2 \times 2 \times 2$	0
{1,7,2,-2,6}	112	$\times 2 \times 2 \times 2$	896	{2,-2,1,6,7}	0	$\times 2 \times 2 \times 2$	0
{2,7,1,-2,6}	56	$\times 2 \times 2 \times 2$	448	{-2,2,1,6,7}	0	$\times 2 \times 2 \times 2$	0
{2,1,7,-2,6}	16	$\times 2 \times 2 \times 2$	128	{-2,1,2,6,7}	0	$\times 2 \times 2 \times 2$	0
{7,1,2,-2,6}	208	$\times 2 \times 2 \times 2$	1664				
总数				总数	23360		

注: 上面我们列举的 33 种情况已经包含了 $\{2, 6, 7, -2, 1\}$ 五元组的所有排列。这是由于, 前 6 种情况分别存在 2 种排列变换(即由引理 1.1 得到的位置 a_{32} 和 a_{34} 之间的对换), 后 27 种情况分别存在 4 种排列变换(即 a_{32} 和 a_{34} 之间的对换和元素 -2 和 1 之间的对换)。

因为 $6 \times 2 + 27 \times 4 = 120$, 所以我们已经考虑了全部 120 种排列。

上面我们已经用 Grobner 基的方法求出了在 $a_{32} = -1, a_{43} = 3, a_{44} = 4, a_{53} = 5$ 时所有的标准六角数独总数为

23,360, 其余 23 类求法类似(共有 $\{-1,3,4,5\}$ 的所有排列 24 类), 因此我们在继续求出

$a_{32} = -1, a_{43} = 3, a_{44} = 5, a_{53} = 4$ 和 $a_{32} = -1, a_{43} = 3, a_{44} = 5, a_{53} = 4$ 时所对应的六角数独个数分别为 47,424 和 384 后, 给出所有标准六角数独的个数 D_1 的估计为:

$$D_1 \approx \frac{23360 + 47424 + 384}{3} \times 24 = 569344$$

我们估计的理由是把所有的标准六角数独分成 4 组, 不同的组以不同的数字填入 a_{32} 这个位置, 每组又分成 2 类, 每一类对于 a_{53} 这个位置有 $C_3^1 = 3$ 种不同方案。如第一组

$\{-1,3,4,5\}, \{-1,3,5,4\}, \{-1,4,5,3\}, \{-1,4,3,5\}, \{-1,5,3,4\}, \{-1,5,4,3\}$ 中, 我们求的是第一类 $\{-1,3,4,5\}, \{-1,3,5,4\}, \{-1,4,5,3\}$, 然后进行估计。

当然, 这样的估计是粗略的, 由于六角数独本身的限制条件, 其对称性不是很好, 所以交换任意两个相邻的位置都会造成一定的结果差异。由于时间的限制, 我们目前还没有算出所有 24 类的标准六角数独的个数, 但是我们会在以后, 继续运用 Grobner 基的方法, 来依次求出剩余 21 类的标准六角数独的个数, 最终得到结果的精确值。

所以现在给出所有六角数独的个数 D 的估计为:

$$D = D_1 \times 9! = D_1 \times 362880 \approx 206603550720 \approx 2.066 \times 10^{11}$$

3. 数独的分类

上面我们已经估计出六角数独的总数 D , 接下来我们利用群论的相关知识(如群在集合上的作用, Burnside's Lemma 等)对六角数独进行分类。

令 G 是一个有限群, 如果 G 有一个元素 g 使得 G 中任一元素都是 g 的某一个幂次, 则称 G 是以 g 为生成元的循环群, 表为 $G = \langle g \rangle$ 。

群的概念是理解自然界对称性结构的最好的工具, 比如图案的旋转、反射、中心对称、轴对称等等, 都可以用群的观点来理解, 这也就是我们下面讨论的主要方法^[7]。

然后我们介绍一下 Burnside's Lemma:

令 G 是一个有限群, X 是一个集合, 记 X^g 为 X 中元素在 $g \in G$ 下的不动点, 即 $X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ 。

Burnside's Lemma 的叙述如下: 群 G 在集合 X 上作用的轨道个数 $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$, 即轨道个数为 G 中元素作用下不动点的平均数。

现在我们利用 Burnside Lemma 来讨论六角数独在对称等价条件下的个数计算。

根据六角数独的特点, 可见六角数独只有按逆时针旋转角度为 $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$ 时才有对称性, 从而产生等价的数独。六角数独没有其他对称性。

(1) 六角数独的群 G 的计算

我们把按逆时针旋转角度为 $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$ 分别表示为 $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$, 令 $G = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ 。根据旋转的定义, G 显然以旋转合成作为乘法, 构成了以 P_1 为生成元的 6 阶循环群, 即 $G = \langle P_1 \rangle$, 也就是说, $G \cong Z_6$ 。

(2) 六角数独不动点 X^g 的计算

首先我们令所有六角数独的总数为 D 。根据 Burnside Lemma 的计算公式, 我们对于 $g \in Z_6$ 分如下 4 种情况分别进行讨论:

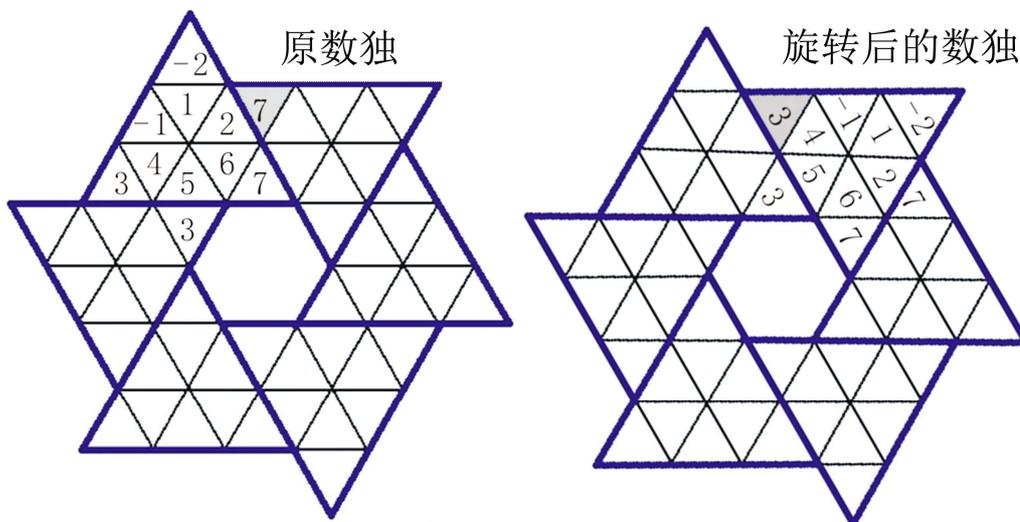
1) $g = [0]$, 即 g 是恒等变换

此时显然所有数独在变换下保持不变, 即所有数独都为不动点, 所以 $\chi_g = D$ 。

2) $g = [1]$ 或 $[5]$, 即 g 是旋转 60° 或 300°

下面我们主要讨论 60° 的情况, 300° 的情况类似。

我们不妨假设原数独是一个标准数独, 即左上角三角形内填入的数字依次是 $-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, 通过对数独旋转 60° 后, 根据引理 1.2, 我们可以发现, 在 a_5 这个位置上, 原数独 $a_5 = 7$, 旋转后的数独 $a_5 = 3$, 这是显然矛盾的, 因此在 $g = [1]$ 这种情况下, $\chi_g = 0$, 即没有不动点, 具体见下图:

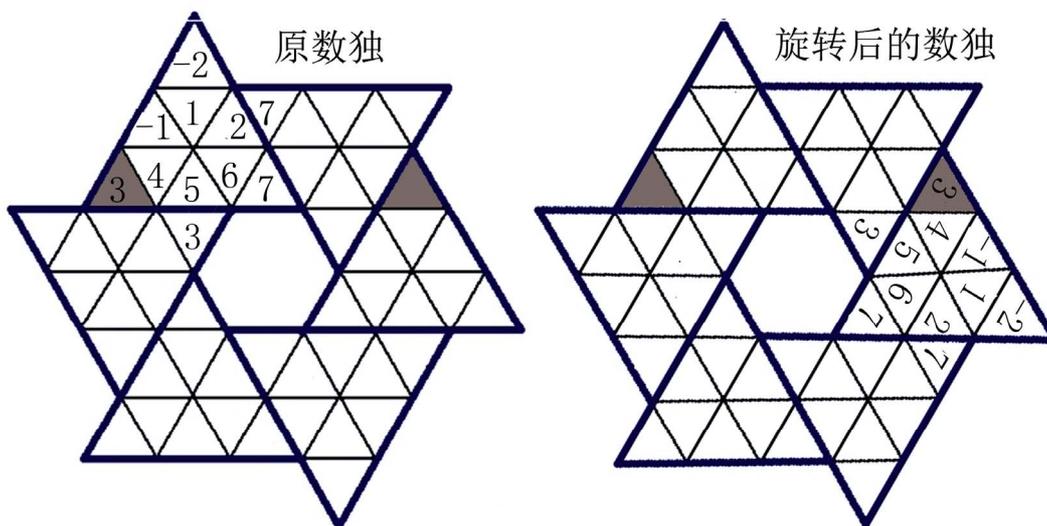


在讨论 $g = [5]$ 时, 我们只需观察 a_{23} 这个位置, 在原图中 $a_{23} = 3$, 在旋转后的数独中 $a_{23} = 7$, 因此在 $g = [5]$ 这种情况下, χ_g 也等于 0。

3) $g = [2]$ 或 $[4]$, 即 g 是旋转 120° 或 240°

同理, 下面我们主要讨论 120° 的情况, 240° 的情况类似。

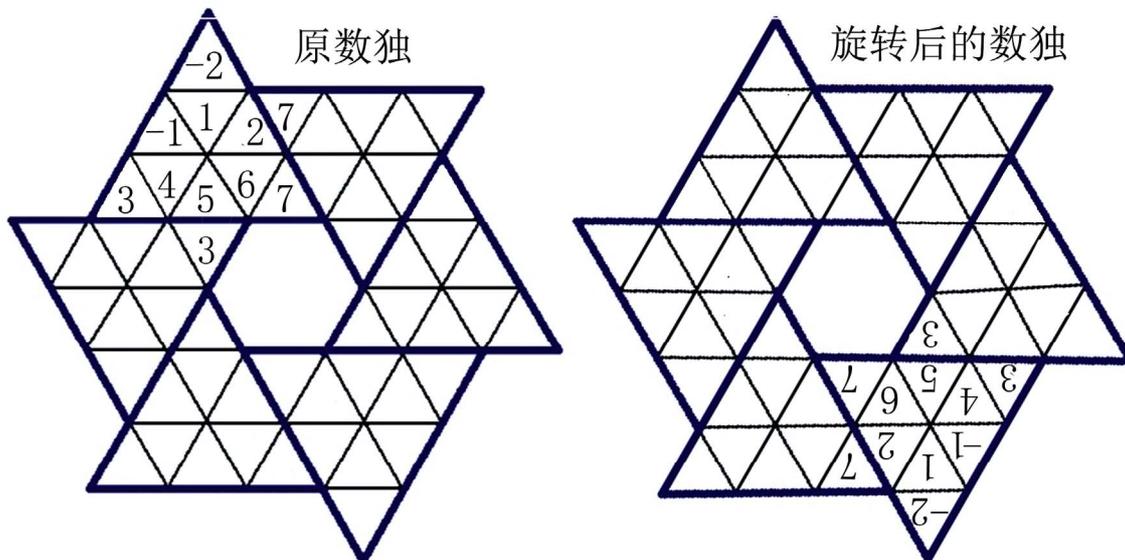
我们仍然假设原数独是一个标准数独, 在旋转 120° 后, 我们观察 a_{10}, a_{18} 这两个位置, 在原数独中, 由于 $a_{10} = 3$, 根据六角数独的填数规则, $a_{18} \neq 3$, 但是在新数独中, 我们发现 $a_{18} = 3$, 这说明在 120° 变换下, 数独不会保持不变, 即当 $g = [2]$ 时, $\chi_g = 0$ 。



在讨论 $g = [4]$ 时, 我们只需观察 a_{10}, a_{50} 这两个位置, 在原图中 $a_{10} = 3, a_{50} \neq 3$, 而在旋转后的数独中 $a_{50} = 3$, 因此在 $g = [4]$ 这种情况下, χ_g 也等于 0。

4) $g = [3]$, 即 g 是旋转 180°

在经过 1, 2, 3 后, 我们只剩下旋转 180° 的情况, 此时我们仍然假设原数独是一个标准数独。在旋转 180° 后, 我们得到旋转后的数独图如下所示:



由于我们要求数独在旋转 180° 后保持不变, 因此, 我们根据比较两数独对应位置上的数字, 得到原数独应该具有如下条件被满足:

- a) $a_{32} = a_{45} = 3, a_{41} = a_{50} = 7, a_{42} = 6, a_{43} = 5, a_{44} = 4, a_{51} = 2, a_{52} = 1, a_{53} = -1, a_{54} = -2$
- b) $a_6 = a_{49}, a_7 = a_{48}, a_8 = a_{47}, a_9 = a_{46}, a_{15} = a_{40}, a_{16} = a_{39}, a_{17} = a_{38}, a_{24} = a_{31}$
- c) $a_{18} = a_{37}, a_{25} = a_{30}, a_{26} = a_{29}, a_{27} = a_{28}, a_{33} = a_{22}, a_{34} = a_{21}, a_{35} = a_{20}, a_{36} = a_{19}$
- d) $a_{18} = a_{24} = a_{31} = a_{37}$

在这些限制条件下, 我们通过第一部分的理论知识, 利用 Maple14 软件, 求出对应的 Grobner 基的首项为 $a_6^2, a_7^3, a_8^2, a_9, a_{15}^4, a_{15}a_{16}, a_{16}^3$ 。

然后通过定理 1.7, 我们利用 Mathematica5.0 软件求得此时的六角数独个数 $N = 72$, 即当 $g = [3]$ 时, 不动点个数 $\chi_g = 72 \times 9! = 72 \times 362880 = 26127360$ (这里 $9!$ 是由于数字重排的因素, 我们一开始假设了原数独为标准数独)。

所以综合 a), b), c), d) 我们得到如下图表:

变换群	不动点个数	变换群	不动点个数
[0]	D	[3]	26,127,360
[1]	0	[4]	0
[2]	0	[5]	0

最后我们应用 Burnside Lemma 的计算公式, 得到六角数独在旋转群 Z_6 下的等价类个数为

$$M = \frac{1}{|Z_6|} \sum_{g \in Z_6} \chi_g = \frac{D + 26127360}{6} \approx 34438279680$$

其中 D 为所有六角数独的总数。在这里代入了第 1 部分最后的 D 的估计值 206,603,550,720。

4. 数独的图案设计

以上我们主要研究了数独的代数组组合性质, 下面我们通过对其图形上的观察, 从对几何图形分析的角度进行一些研究。

命题 3.1: 在数独中, 第 $n(n \geq 2)$ 层数独的个数是 $a_n = 6(n-1)$, 其总数是 $T_n = 3n^2 - 3n + 1$ 。

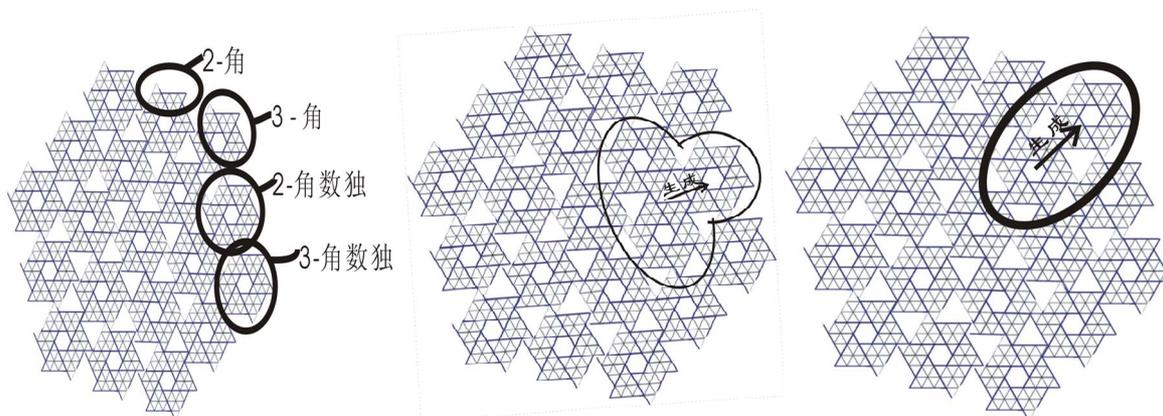
证明: 我们记 v_n 为第 n 层外部角的个数, 下面我们用数学归纳法证明 $v_n = 18 + 12(n-2)$ 。

1) 当 $n=1, 2$ 时, 我们可以看出外部角的个数 $v_1 = 6$, $v_2 = 18$;

2) 当 $n \geq 3$ 时, 假设当 $n=k$ 时等式成立, 即 $v_k = 18 + 12(k-2)$ 。

通过观察我们可以发现, 第二层中的一个数独未与外层数独连接的三个角中, 两个侧角分别可以与相邻数独的相邻的侧角形成一个数独, 中间的角可以单独形成一个数独, 形成的三个数独又可相互连接, 使得两侧的数独有两个未连接的角, 我们称这两个角为 2-角, 该类数独为 2-角数独; 中间的数独有三个未连接的角, 我们称为 3-角, 该类数独为 3-角数独。

其中 2-角, 3-角, 2-角数独, 3 角数独的概念以及如何由第 n 层数独生成第 $n+1$ 层数独如下图所示:



因此, 当 $n=2$ 时, 有 3-角 6 个, 2-角 0 个;

当 $n=3$ 时, 有 3-角 6 个(第 2 层 6 个数独的中间角所生成数独的中间角), 2-角 $\frac{6 \times (3-1)}{2} \times 2 = 12$ 个。

由于 3-角只能由前一层数独的中间角生成, 因此 3-角的个数永远是 6 个。

所以当 $n=k$, 即 $v_k = 18 + 12(k-2)$ 时, 有 3-角 6 个, 2-角数独 $\frac{18 + 12(k-2) - 6 \times 3}{2} = 6(k-2)$ 个。

则当 $n=k+1$ 时,

$$v_{k+1} = 6 \times 3 + \frac{6 \times (3-1) + 2 \times 6(k-2)}{2} \times 2 = 18 + 12 + 12k - 24 = 18 + 12k - 12 = 18 + 12(k+1-2)$$

因此归纳法成立, $v_n = 18 + 12(n-2)$

又由于 3-角的个数永远是 6 个,

$$\text{所以 } a_n = 6 + \frac{18 + 12(n-2) - 6 \times 3}{2} = 6n - 6$$

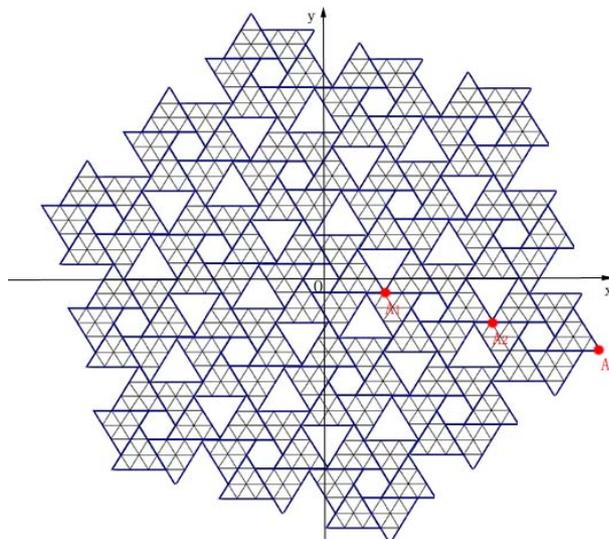
最后通过等差数列(从第 2 项开始)的求和公式, 我们求得前 n 层数独总数为:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + \frac{(a_n + a_2)(n-1)}{2} = \frac{(6n-6+6)(n-1)}{2} + 1 = 3n^2 - 3n + 1$$

命题 3.2: 设六角数独的一个小三角形的边长为 1, 则以正中的六角数独的中心为圆心所形成的圆的半径 $r_n = \sqrt{39n^2 - 33n + 7}$, 面积 $S_n = (39n^2 - 33n + 7)\pi$

证明: 如图建立直角坐标系 $Oxyz$, 使 $O(0,0)$ 为初始数独的中心, 通过观察我们可以发现, 点 A_n 是第 n 层

数独上离点 O 的最远点, 如图所示:



所以 $r_n = |A_n O|$

设点 $A_n(x_n, y_n)$, 由图可知:

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } x_1 = 3 \times 1 + 0.5 = \frac{7}{2}, y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } x_n - x_{n-1} = 6, y_n - y_{n-1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = -\sqrt{3};$$

所以

$$x_n = \frac{7}{2} + 6(n-1) = \frac{12n-5}{2}, y_n = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}(n-1) = -\frac{(2n-1)\sqrt{3}}{2};$$

$$r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{39n^2 - 33n + 7}, S_n = \pi r_n^2 = (39n^2 - 33n + 7)\pi。$$

现在我们定义拼图效率的概念, 即单位圆盘面积所含数独的个数 $\frac{T_n}{S_n}$, 并考虑拼图效率的变化规律。

定理 3.3: 在由六角数独组成的图案中, 当层数 n 为 1(即单个数独)时, 拼图效率 $\frac{T_n}{S_n}$ 最高, 值为 $\frac{1}{13\pi}$; 当层

数 n 为 2 时, 拼图效率 $\frac{T_2}{S_2}$ 最低, 值为 $\frac{1}{13\pi} \times \frac{91}{97}$; 且当层数 n 趋近于 ∞ 时, 使用效率 $\frac{S_n}{T_n}$ 严格递增趋近于 $\frac{1}{13\pi}$ 。

证明: 通过命题 3.1 和 3.2, 我们已经求得

$$T_n = 3n^2 - 3n + 1, S_n = (9n^2 - 33n + 7)\pi$$

$$\text{所以, } \frac{T_n}{S_n} = \frac{3n^2 - 3n + 1}{(9n^2 - 33n + 7)\pi} = \frac{1}{13\pi} \left(1 - \frac{6n-6}{39n^2 - 33n + 7} \right);$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } \frac{T_1}{S_1} = \frac{1}{13\pi}$$

$$\text{而对于任一 } n=2, 3, \dots, \text{ 都有 } 0 < \frac{6n-6}{39n^2 - 33n + 7} < 1, \text{ 所以我们有 } 0 < \frac{T_n}{S_n} < \frac{1}{13\pi};$$

$$\text{计算易得, } \frac{T_n}{S_n} - \frac{T_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{6}{13\pi} \frac{39n^2 - 117n + 65}{(39n^2 - 33n + 7)39(n-1)^2 - 33(n-1) + 7}$$

当 $n=2$ 时, 分子 $39 \times 2^2 - 117 \times 2 + 65 < 0$; 而当 $n \geq 3$ 时, 易见总有分子 $39n^2 - 117n + 65 > 0$, 从而总有 $1 > \frac{T_n}{S_n} > \frac{T_{n-1}}{S_{n-1}}$;

$$\text{所以对 } n \in \mathbb{N}, \text{ 最小值 } \left. \frac{T_n}{S_n} \right|_{\min} = \frac{T_2}{S_2} = \frac{1}{13\pi} \left(1 - \frac{6 \times 2 - 6}{39 \times 2^2 - 33 \times 2 + 7} \right) = \frac{1}{13\pi} \times \frac{91}{97};$$

因此拼图效率最高的是第 1 层, 就是单个六角数独的情形; 第 2 层时的拼图效率是最低的; 而当 n 越来越大时, 拼图效率又会越来越高, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{13\pi} \left(1 - \frac{6n-6}{39n^2-33n+7} \right) = \frac{1}{13\pi}$, 即拼图效率会越来越接近 $\frac{1}{13\pi}$, 但永远不能达到。

5. 计划的进一步研究

作为后继的研究中, 我们将可以侧重于以下 3 个方面:

1) 我们将继续运用 Grobner 基的方法, 来依次求出剩余 21 类的标准六角数独的个数, 来求得所有 24 类的标准六角数独的个数的和 D 的精确值。

2) 通过观察我们可以发现, 六角数独的变换群除了 Z_6 外, 还有一个置换群 S_9 。在同时考虑 Z_6 和 S_9 时, 我们可以先利用数字置换这个等价关系对所有的六角数独进行划分, 达到只考虑标准数独的目的。最后在应用 Burnside 引理的时候, 我们算的是等价意义上的不动点或者不动轨道, 即 $\chi_g = \left| \{x \in X \mid g \cdot \bar{x} = \bar{x}\} \right|$, 其中 X 是所有标准六角数独的集合, \bar{x} 是 $x \in X$ 的数字置换数独等价类, 即 $\bar{x} = \{ \sigma \cdot x \mid \sigma \in S_9 \}$ 。

3) 在研究数独拼图效率的同时, 我们还可以进一步固定圆的半径, 给出里面最多的数独个数。并且我们还可以结合 1 和 2, 给出固定圆的半径的条件下, 等价意义上的所有的数独拼图的个数。这对于图案设计是有意义的。

参考文献 (References)

- [1] 于雷. 北大清华学生爱做的数独游戏[M]. 北京: 中央编译出版社, 2009.
- [2] B. Felgenhauer, F. Jarvis. Mathematics of sudoku (I). Mathematical Spectrum, 2006, 39(1): 15-22.
- [3] E. Arnold, S. Lucas and L. Taalman. Groebner basis representations of sudoku. College Mathematics Journal, 2010, 41: 101-111.
- [4] 王东明. 多项式代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [5] D. Cox, J. Little and D. O. Shea. Using algebraic geometry. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [6] W. W. Adams, P. Loustaunau. An Introduction to grobner bases. In: Graduate Studies in Mathematics, Vol. 3, Providence: American Mathematical Society, 1994.
- [7] 陈辉. 群的结构与对称性[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2008.