Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 374-378
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.36057 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The End of a Complete Minimal Hypersurface in Riemannian Manifold*

Lu Liu, Fuliang Chen

Institute of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang
Email: 812605717@qq.com

Received: Sep. 29th, 2013; revised: Oct. 8th, 2013; accepted: Oct. 12th, 2013

Abstract: In this paper, we study the end of a complete noncompact non-totally geodesic minimal hypersurface. Under certain conditions, we obtain that the hypersurface has only one end.

Keywords: Minimal Hypersurface; End; The First Eigenvalue

黎曼流形中完备极小超曲面的端*

刘　露，陈抚良

江西师范大学数学与信息科学学院，南昌
Email: 812605717@qq.com

收稿日期：2013 年 9 月 29 日；修回日期：2013 年 10 月 8 日；录用日期：2013 年 10 月 12 日

摘　要：本文研究了黎曼流形中完备非紧致非全测地极小超曲面的端。在一定的条件下，我们得出这种超曲面只有一个端。

关键词：极小超曲面；端；第一特征值

1. 引言

设 M 是一个完备非紧致黎曼流形，Ω 是 M 中的一个紧致区域。设 $\lambda_1(\Omega)>0$ 表示的是 Dirchlet 边界问题的第一特征值：

$$\begin{cases}\Delta f=-\lambda f, x\in\Omega\\ f=0, x\notin\Omega\end{cases}$$

这里 Δ 表示 M 的 Laplace-Beltrami 算子，那么通过局部单调性原理，完备非紧致流形 M 的第一特征值 $\lambda_1(M)=\inf\limits_{\Omega}\lambda_1(\Omega)$，这里的下确界取遍 M 上的所有紧致区域。

下面是黎曼流形 M 的 Laplace 算子 Δ 的第一特征值的另一定义：

定义 1：黎曼流形 M 上的 Laplace 算子 Δ 的第一特征值定义为：

$$\lambda_1(M)=\inf_f\frac{\int_M|\nabla f|^2}{\int_M f^2},$$

*基金项目：国家自然科学基金(11226078, 11261038)。

这里 $f \in C_0^{\infty}(M)$。

定义 2： M 是黎曼流形 N 上的一个 n 维极小超曲面，设 f 是 M 上具有紧致支撑集的 Lipschitz 函数，如果

$$\int_M |\nabla f|^2 - \left(\overline{Ric}(e_{n+1}) + |A|^2\right) f^2 \geq 0,$$

那么就称 M 是稳定的。这里 e_{n+1} 是 M 在 N 中的单位法向量，$\overline{Ric}(e_{n+1})$ 是 N 上的在 e_{n+1} 方向的 Ricci 曲率，$|A|$ 是 M 的第二基本形式的长度。

最近，在文[1]中，N. T. Dung 和 K. Seo 得到如下定理。

定理 A： 设 N 是一个 n+1 维黎曼流形，其截面曲率 K_N 满足 $K \leq K_N$，这里 $K \leq 0$ 是一个常数。设 M 是 N 中的一个完备非紧稳定非全测地极小超曲面，如果 $-K(2n-1)(n-1) \leq \lambda_1(M)$，那么 M 只有一个端。

在文[2]中，L. F. Tam and D. T. Zhou 得到具体定理叙述如下：

定理 B： 设 $M^n\ (n \geq 3)$ 是 R^{n+1} 中的一个 $\dfrac{2}{n}$ 稳定的完备浸入极小超曲面，如果：

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^2}\int_{B(2R)\setminus B(R)} |A|^{\frac{2(n-2)}{n}} = 0$$

那么 M 是一个平面或者是一个悬链面。

由定理 B 可知当 R^{n+1} 中的 $\dfrac{2}{n}$ 稳定完备浸入极小超曲面(即 $\delta = \dfrac{2}{n}$)的第二基本形式满足一个积分条件时，这个子流形有一个端或者两个端。

在文[3]中，N. M. B. Neto 和 Q. L. Wang 得到具体定理叙述如下：

定理 C： 设 M^n 是黎曼流形 N^m 中的完备非紧致子流形，且用 A 和 H 分别表示 M 的第二基本形式和平均曲率向量的模长，如果 H 是一个常数并且存在正常数 δ, a, b 和 l 使得

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \delta \int_M f^2 |A|^a, \forall f \in C_0^{\infty}(M), \tag{1.1}$$

并且 $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{\int_{B_R(x)} |A|^b}{R^l} = 0$，那么 $H = 0$。

考虑到在不等式(1.1)中取 $\delta = 1$，$a = 2$，即为欧式空间中极小超曲面的稳定性不等式。一个自然的问题就是在定理 A 中稳定性的条件能否改成不等式(1.1)。本文部分回答了这个问题，具体定理如下：

定理 1： 设 N 是一个 $n+1$ 维黎曼流形，其截面曲率 K_N 满足 $K_1 \leq K_N$，这里 $K_1 \leq 0$ 是一个常数。设 M 是浸入到 N 中的一个完备非紧致非全测地极小超曲面，如果它满足如下条件 $\int_M \left(|\nabla \phi|^2 - \delta |A|^2 \phi^2\right) \geq 0$，其中 $\delta > \dfrac{n-1}{n}$，

且设 $-(n-1)^2 K_1 < \lambda_1(M)$，那么 M 只有一个端。

注：这里部分推广了定理 B：R^{n+1} 中的 $\dfrac{2}{n}$ 稳定完备浸入极小超曲面到一般的黎曼流形中的 δ -稳定极小子流形中，当 δ 与第一特征值满足一定条件时，得出这个子流形只有一个端。

2. 引理部分

引理 1[4]**：** 设 M 是黎曼流形 N 中的一个 n 维完备浸入极小超曲面，如果 N 中的截面曲率都大于等于一个常数 K，那么

$$Ric \geq (n-1)K - \frac{n-1}{n}|A|^2。$$

对于调和 1-形式，有下列 *Kato-type* 不等式成立：

引理 2[5]：设 w 是一个 n 维黎曼流形 M 上的一个调和 1-形式，那么有：

$$\left|\nabla w\right|^2-\left|\nabla\left|w\right|\right|^2\geq\frac{1}{n-1}\left|\nabla\left|w\right|\right|^2$$

3. 定理 1 的证明

我们的方法来自于文[6,7]，下面给出定理 1 的证明。

证明：(反证法)假设 M 至少有两个端，那么 M 上有一个具有有限总能量的非平凡调和函数 u 即 $\int_M\left|\nabla u\right|^2<\infty$ (见[8])。

设 u 是 M 上的非平凡调和函数，根据 Bochner 公式有

$$\frac{1}{2}\Delta\left|\nabla u\right|^2=\sum_{i,j=1}^{n}{u_{ij}}^2+Ric\left(\nabla u,\nabla u\right)\text{。}$$

因为 $\frac{1}{2}\Delta\left|\nabla u\right|^2=\left|\nabla u\right|\Delta\left|\nabla u\right|+\left|\nabla\left|\nabla u\right|\right|^2$，我们有

$$\left|\nabla u\right|\Delta\left|\nabla u\right|+\left|\nabla\left|\nabla u\right|\right|^2=\sum_{i,j=1}^{n}{u_{ij}}^2+Ric\left(\nabla u,\nabla u\right)\text{。}$$

根据引理 1 以及引理 2 不等式有：

$$\left|\nabla u\right|\Delta\left|\nabla u\right|+\frac{n-1}{n}\left|A\right|^2\left|\nabla u\right|^2-\left(n-1\right)K_1\left|\nabla u\right|^2\geq\frac{1}{n-1}\left|\nabla\left|\nabla u\right|\right|^2\text{。}\tag{3.1}$$

因为 M 满足

$$\int_M\left(\left|\nabla\phi\right|^2-\delta\left|A\right|^2\phi^2\right)\geq 0\text{，}\tag{3.2}$$

这里 $\phi\in C_0^\infty\left(M\right)$。

在(3.2)中用 $\left|\nabla u\right|\phi$ 替换 ϕ 得到

$$\int_M\left(\left|\nabla\left(\left|\nabla u\right|\phi\right)\right|^2-\delta\left|A\right|^2\left(\left|\nabla u\right|\phi\right)^2\right)\geq 0\text{。}$$

利用散度定理，我们得到

$$\begin{aligned}
0&\leq-\int_M\left|\nabla u\right|\phi\Delta\left(\left|\nabla u\right|\phi\right)-\delta\int_M\left|A\right|^2\left|\nabla u\right|^2\phi^2\\
&=-\int_M\phi\left|\nabla u\right|^2\Delta\phi-\int_M\phi^2\left(\left|\nabla u\right|\Delta\left|\nabla u\right|+\delta\left|A\right|^2\left|\nabla u\right|^2\right)-2\int_M\left|\nabla u\right|\phi\left\langle\nabla\phi,\nabla\left|\nabla u\right|\right\rangle\\
&=\int_M\left\langle\nabla\left(\phi\left|\nabla u\right|^2\right),\nabla\phi\right\rangle-\int_M\phi^2\left(\left|\nabla u\right|\Delta\left|\nabla u\right|+\delta\left|A\right|^2\left|\nabla u\right|^2\right)-2\int_M\left|\nabla u\right|\phi\left\langle\nabla\left|\nabla u\right|,\nabla\phi\right\rangle\\
&=\int_M\left|\nabla u\right|^2\left|\nabla\phi\right|^2+2\int_M\left|\nabla u\right|\phi\left\langle\nabla\left|\nabla u\right|,\nabla\phi\right\rangle-\int_M\phi^2\left(\left|\nabla u\right|\Delta\left|\nabla u\right|+\delta\left|A\right|^2\left|\nabla u\right|^2\right)-2\int_M\left|\nabla u\right|\phi\left\langle\nabla\left|\nabla u\right|,\nabla\phi\right\rangle\\
&=\int_M\left|\nabla u\right|^2\left|\nabla\phi\right|^2-\int_M\phi^2\left(\left|\nabla u\right|\Delta\left|\nabla u\right|+\delta\left|A\right|^2\left|\nabla u\right|^2\right)
\end{aligned}\tag{3.3}$$

把(3.1)代入(3.3)，我们得到

$$0\leq-\int_{\mathrm{M}}\left|\nabla u\right|^2\left|\nabla\phi\right|^2-\left(n-1\right)K_1\int_M\phi^2\left|\nabla u\right|^2+\left(\frac{n-1}{n}-\delta\right)\int_M\phi^2\left|A\right|^2\left|\nabla u\right|^2-\frac{1}{n-1}\int_M\phi^2\left|\nabla\left|\nabla u\right|\right|^2\tag{3.4}$$

根据定义 1，有

$$\begin{aligned}\lambda_1(M)\int_M \phi^2|\nabla u|^2 &\le \int_M \left|\nabla\left(\phi|\nabla u|\right)\right|^2 = \int_M |\nabla u|^2|\nabla\phi|^2 + \phi^2\left|\nabla|\nabla u|\right|^2 + 2|\nabla u|\phi\left\langle\nabla\phi,\nabla|\nabla u|\right\rangle \\ &\le \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_M |\nabla u|^2|\nabla\phi|^2 + (1+\varepsilon)\int_M \left|\nabla|\nabla u|\right|^2\phi^2\end{aligned} \tag{3.5}$$

这里我们运用了 Schwarz 不等式和 Young 不等式，在(3.5)中 $\varepsilon>0$ 为正常数。

结合不等式(3.4)和(3.5)，我们有

$$\begin{aligned}0 \le &\left\{\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{(n-1)(-K_1)}{\lambda_1(M)}+1\right\}\int_M |\nabla u|^2|\nabla\phi|^2 + \left\{(1+\varepsilon)\frac{(n-1)(-K_1)}{\lambda_1(M)}-\frac{1}{n-1}\right\}\int_M \phi^2\left|\nabla|\nabla u|\right|^2 \\ &+\left(\frac{n-1}{n}-\delta\right)\int_M \phi^2|A|^2|\nabla u|^2\end{aligned} \tag{3.6}$$

现在任意固定 M 上的一点 P，考虑一个以 P 为中心 R 为半径的测地球 $B_P(R)$，选取检验函数 ϕ 满足 $0\le\phi\le1$，且当 ϕ 定义在 $B_P(R)$ 上时 $\phi\equiv1$，当 ϕ 定义在 $M\setminus B_P(2R)$ 上时有 $\phi\equiv0$，及 $|\nabla\phi|\le\frac{1}{R}$。因为 $\lambda_1(M)>-(n-1)^2K_1$，选择一个足够小的 $\varepsilon>0$，使得

$$\frac{1}{n-1}-(1+\varepsilon)\frac{(n-1)(-K_1)}{\lambda_1(M)}>0\text{。} \tag{3.7}$$

又因为 $\delta>\frac{n-1}{n}$，所以

$$\delta-\frac{n-1}{n}>0\text{。} \tag{3.8}$$

把(3.6)的后两项移到不等式的左边，且把 ϕ 代入可得：

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{n-1}-(1+\varepsilon)\frac{(n-1)(-K_1)}{\lambda_1(M)}\right\}\int_{B_R}\left|\nabla|\nabla u|\right|^2+\left(\delta-\frac{n-1}{n}\right)\int_{B_R}|A|^2|\nabla u|^2 \\ &\le\left\{\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{(n-1)(-K_1)}{\lambda_1(M)}+1\right\}\frac{1}{R^2}\int_{B_{2R}}|\nabla u|^2\end{aligned} \tag{3.9}$$

利用(3.7)和(3.8)在(3.9)的两边让 $R\to\infty$,因为 $\int_M|\nabla u|^2<\infty$，我们得到，

$$\int_M\left|\nabla|\nabla u|\right|^2=\int_M|A|^2|\nabla u|^2=0\text{。}$$

于是 $|\nabla u|\equiv0$ 或者 $|A|\equiv0$。又因为 M 不是全测地的即 $|A|\ne0$，所以 $|\nabla u|\equiv0$，于是 u 是一个常数。这与 u 是一个非平凡调和函数相矛盾。因此假设不成立，所以 M 只有一个端。定理 1 得证。

参考文献 (References)

[1] Dung, N.T. and Seo, K. (2012) Stable minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold with pinched negative sectional curvature. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **41**, 447-460.

[2] Tam, L.F. and Zhou, D.T. (2009) Stability properties for the higher dimensional Catenoid in R^{n+1}. *American Mathematical Society*, **137**, 3451-3461.

[3] Neto, N.M.B. and Wang, Q.L. (2012) Some Bernstein-type Rigidity theorems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **389**, 694-700.

[4] Leung, P.F. (1992) An estimate on the Ricci curvature of a submanifold and some applications. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **114**, 1051-1063.

[5] Wang, X. (2001) On conformally compact Einstein manifolds. *Mathematical Research Letters*, **8**, 671-688.

[6] Seo, K. (2010) L^2 harmonic 1-forms on minimal submanifolds in hyperbolic Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **371**, 546-551.
[7] Seo, K. (2010) Rigidity of minimal submanifolds in hyperbolic space. *Archiv der Mathematik*, **94**, 173-181.
[8] Wei, S.W. (2003) The structure of complete minimal submanifolds in complete manifolds of nonpositive curvature. *Houston Journal of Mathematics*, **29**, 675-689.