Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 388-393
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.36059 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Multicriteria Minimax Theorem on Two-Person Zero-Sum Dynamic Game Problem (I)

Yung-Ling Lai[1], Hang-Chin Lai[2]

[1]Department of Computer Science and Information Engineering, National Chiayi University, Chiayi City
[2]Department of Mathematics, National Tsing Hwa University, Hsinchu City
Email: yllai@mail.ncyu.edu.tw, laihc@mx.nthu.edu.tw

Received: Apr. 16th, 2013; revised: Apr. 30th, 2013; accepted: May 2nd, 2013

Abstract: Considering a minimax problem to a two-person zero-sum dynamic game, we establish the total value function of game losses and gains in a stochastic game system. It could perform a minimax theorem. Moreover, we prove that minimax theorem is established by the stochastic space of their strategy spaces for the two-person zero-sum dynamic game under the law of motion. It is also established that the saddle value function exists under certain natural conditions so that the equilibrium point exists in this dynamic game system. A practical example could be employed to our framework in the context.

Keywords: Minimax Theorem; Upper (Lower) Value Function; Saddle Value Function; Dynamic Game

多样极小极大定理在零和动态对局问题(I)

赖泳伶[1]，赖汉卿[2]

[1]国立嘉义大学资工系，嘉义市
[2]国立清华大学数学系，新竹市
Email: yllai@mail.ncyu.edu.tw, laihc@mx.nthu.edu.tw

收稿日期：2013 年 4 月 16 日；修回日期：2013 年 4 月 30 日；录用日期：2013 年 5 月 2 日

摘　要：考虑一个两人零和动态对局上的极小极大问题。我们将极小极大定理以一个随机对局系统建立损失和获益的总值函数，并证明极小极大定理在某些条件下存在鞍值函数，导出这个动态对局系统存在一平衡点。本文举一个简易的例子，说明协议的对局运作下，说明这个动态对局的架构与极小极大定理的相互关系。

关键词：极小极大定理；上下界数值函数；鞍值函数；动态对局

1. 引言

问题始自樊畿教授[1]提出一个两变量的实数值函数 $f: X\times Y\to\Re$，探求此两函数空间 X 及 Y 在甚么函数的条件下 $f(x,y)$ 能使下列

$$\inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} f(x,y)=\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} f(x,y) \tag{*}$$

等号成立？他举了三个例子说明(*)成立的情形：

1) X 与 Y 为紧致 Hausdorff 空间(不设为线性空间)，且 $f: X\times Y\to\Re$ 为 X 上的下半连续 $(l.s.c.)$，也为 Y 上的上半连续 $(u.s.c.)$，则必存在丨鞍点 $(x_0,y_0)\in X\times Y$ 使(*)等式成立。

2) 若 X 为紧致 Hausdorf 而 Y 为任意集合(无拓扑性与线性)，则 $f: X\times Y\to\Re$ 设为 X 上的下半连续，对任意 $y\in Y$， $f(\cdot,y)$ 为 X 上凸似函数，而对任意 $x\in X$， $f(x,\cdot)$ 为 Y 上的凹似函数，则(*)等式成立。

3) 若 X 与 Y 既无涉有拓扑亦不设有线性之任意集合，则(*)成立的充要条件可给任意 $\varepsilon>0$，及两个有限个点列 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 及 $\{y_j\}_{j=1}^{m}$，此时若存在 $(x_0,y_0)\in X\times Y$ 使满足 $f(x_0,y_j)-f(x_i,y_0)\le\varepsilon$ 或等价于

$$f(x_0,y_j)\le f(x_0,y_0)+\varepsilon\le f(x_i,y_0)。$$

则(*)等式成立。满足上式之 (x_0,y_0) 也称为 $\varepsilon-$鞍点。

在本文中，我们取 X 与 Y 分别表示二个与局者 I 及 II 的随机选取的策略空间，以建立本文之动态对局系统。我们要导出与局者 I 与 II 的条件之总期望值函数满足(*)。更进一层的，我们也可证明分式型之条件总期望值之商可建立(*)知函数在分式型情形亦可成立。本文两人零和之动态对局的主要参考文献，有兴趣者可参考[2-8]，其他非两人零和对局请参考[9-11]。

2. 两人零和的动态对局系统

两人零和之动态系统在离散时间 $n\in N$ 时，可用下面六种元素来表达：

$$(DG)(S_n,A_n,B_n,t_{n+1},u_n,v_n),n\in N$$

其中 S_n 表对局在当时的状况空间， A_n 及 B_n 分别为 I 与 II 分别选取的作用策略空间， t_{n+1} 为从状况 S_n 要移动到 S_{n+1} 之变化的移动机率， u_n 及 v_n 分别为与局者在时间 $n\in N$ 的两个回报空间。

在本文中 X 与 Y 分别为与局者 I 及 II 的随机选取的策略空间。为了数学分析理论说明的方便，我们将 S_n,A_n,B_n 等集合都设为可赋距空间，两人的回报函数也都设为有界 Borel 函数。在整篇论文中，X 与 Y 都设为可列分的随机策略空间，其元素序列 $x=(x_n)\subset X$ 及 $y=(y_n)\subset Y$ 都分别在 X，Y 中为可数稠密于 X 及 Y 的随机变量，其元素定义在前述的 Borel 空间上之函数都属可积分。因此在形成动态对局之架构上，依 Fubini 定理积分序可以变更。同时对于回报函数的有界性，在我们形成条件总期望值时，由优控极限定理，当 n 由 $1,2,\cdots,n$ 变化历经无限时，期望值积分的极限 $n\to\infty$ 可移入被积分内函数来求得。为易于了解本文动态对局的历经过程，我们可用历史性的变异由 $n=1,2,\cdots$ 变化时 $H_1=S_1$ 即为原始状况，而 H_2 则为在 S_1 下与局者 I 作用 A_1，与局者 II 作用 B_1，然后状况由 S_1 依机率再变移到 S_2，依此形成对局过程就列之如下：

$$\begin{aligned}
&H_1=S_1,\\
&H_2=S_1A_1B_1S_2=H_1A_1B_1S_2,\\
&\cdots\\
&H_n=S_1A_1B_1S_2\cdots S_{n-1}A_{n-1}B_{n-1}S_n=H_{n-1}A_{n-1}B_{n-1}S_n
\end{aligned}$$

(这个对局的过程自 $n=1$ 经历到无限)

当随机空间在 $n\in N$ 时回报函数皆设为有界，与局者表成

$$u_n: H_nA_nB_n\to\Re,\ \ v_n: H_nA_nB_n\to\Re_+$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u: H_\infty\to\Re \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}v_n=v: H_\infty\to\Re_+$$

其中 $h\in H_\infty$ 是一随机变数在 $H_n\subset H_\infty$ 中对所有的 $n\in N$ 。

若以 E_{x_n},E_{y_n} 及 $E_{t_{n+1}}$ 表现当时条件期望值算子(operator)，则对于 $x=\{x_n\}\in X_n(\subset X)$， $y=\{y_n\}\in Y_n(\subset Y)$ 该对局系统就随着一机率测度 $P_{xy}(\bullet|s_1)$ 随机变数 $h\in H_\infty$，在此动态对局系统的条件总期望值就表现成：

$$\begin{aligned}
E(u_n;x,y)(s_1)&=\int_{H_\infty}u_n(h)P_{xy}(h|s_1)=E_{x_1}E_{y_1}E_{t_2}\cdots E_{x_{n-1}}E_{y_{n-1}}E_{t_n}E_{x_n}E_{y_n}u_n(s_1)\\
&=E_{xy}u_n(x,y)(s_1),
\end{aligned}$$

同样的对第二与局者(回报函数为 v_n)则为：

$$E(v_n;x,y)(s_1)=\int_{H_\infty} v_n(h)P_{xy}(h|s_1)=E_{x_1}E_{y_1}E_{t_2}\cdots E_{x_{n-1}}E_{y_{n-1}}E_{t_n}E_{x_n}E_{y_n}v_n(s_1)$$
$$=E_{xy}v_n(x,y)(s_1).$$

故由优限收敛定理及 Fubini 定理，对每一个 $s_1\in S_1, x=\{x_n\}\in X$ 及 $y=\{y_n\}\in Y$，我们可得总随机回报期望值函数的极限为

$$U(x,y)(s_1)=\lim_{n\to\infty}E(u_n,x,y)=\lim_{n\to\infty}E_{x_1}E_{y_1}E_{t_2}\cdots E_{x_{n-1}}E_{y_{n-1}}E_{t_n}E_{x_n}E_{y_n}u_n(s_1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}E_{xy}u_n(x,y)(s_1)\in\Re,$$
$$V(x,y)(s_1)=\lim_{n\to\infty}E(v_n,x,y)=\lim_{n\to\infty}E_{x_1}E_{y_1}E_{t_2}\cdots E_{x_{n-1}}E_{y_{n-1}}E_{t_n}E_{x_n}E_{y_n}v_n(s_1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}E_{xy}v_n(x,y)(s_1)\in\Re_+.$$

当我们考虑动态对局系统 (DG) 中，对任意点 $(x,y)\in X\times Y$，与局者 I 的回报函数 u_n 减去参数 θ 乘与局者 II 的回报函数 v_n，为协议的对局函数的动态情形：

$$F_\theta^n(x,y)=(u_n-\theta v_n)(x,y),\qquad n\in N$$

那么与局者 II 的得利函数(gain function)为 $-F_\theta^n$。此即表示两人在任何时间 n，得失之和恒为零。即

$$F_\theta^n(x,y)+\left(-F_\theta^n(x,y)\right)=0\forall n\in N\text{。}$$

在证明最小最大定理之前，先举个实例看两人零和之情形。

3. 实际例子

本例以政府征收税与企业家缴纳税之间，政府在这特殊的一年需要某种产品，政府则做出一种策略 (x)，以生产 x 类的产品会得减免该项产品之税金的 20%(一般规定减免有个限度，此特殊产物至多不能超过 30%)。那么企业家就看自己可行的能力，选择生产特殊产物与否，他就自己衡量，采取策略 y，以自己做好估价才着手生产。懂点数学的人就依照下列方式估算。

I = 政府征收的规定优惠给企业家外，其他就依一般征税。

II = 企业家依政府规定，研发某特殊产品(策略 y)。

u_n = 企业家研发有成的东西外，生产一般产物依规定要缴此部分之总税收。

v_n = 依政府的规定去生产政府亟需的物品，他的产量依规定有所限制，只生产 v_n 按规定减免 θ%。

那么政府按规定他今年可从企业家那边征收的税收共 $F_\theta^n(x,y)=(u_n-\theta v_n)(x,y)$。

企业家实际可少交 $-F_\theta^n(x,y)$。

θ 可用向量分散不同的产业(品)。其他产物的种类，水平及研发出来的东西不一定只有一种，各产品减免的也有限，附加的权数亦不同。这个式子的建立看似简单，实际应用层面很广，有很多经济财政方面的应用价值。

4. 极小极大定理

如第三节，附有参数 θ 的动态对局可设为：

$$(DGP_\theta)(S_n,A_n,B_n,t_{n+1},u_n,v_n,\theta)$$

如 (DG) 对局的理论一样，可设在 $n\in N$ 时第 I 与局者的失(得)设为 $F_\theta^n(x,y)=(u_n-\theta v_n)(x,y)$。

那么第 II 与局者的得(失)为 $-F_\theta^n(x,y)$。

其结果在任何时候 $n\in N$ 他们的得失和均为零。

设我们如自 $s_1 \in S_1$ 到 $n \in N$ 时之条件总期望值，对任意随机策略 $(x,y) \in X \times Y$，可表现其条件总期望值为 $E_{xy} F_\theta^n(x,y)(s_1)$。

若 n 可历经至无限时，与局者 I 所得该是

$$1)\quad \begin{aligned} F_\theta(x,y)(s_1) &= \lim_{n\to\infty} E_{xy} F_\theta^n(x,y)(s_1) = \lim_{n\to\infty} E_{xy}\left(u_n(x,y) - \theta v_n(x,y)\right)(s_1) \\ &= U(x,y)(s_1) - \theta(s_1) V(x,y)(s_1) \end{aligned}$$

θ 是原先约定的参数。因此我们可同时求得其条件期望值的总上下值函数为

$$2)\quad \begin{aligned} \overline{F_\theta}(s_1) &= \lim_{n\to\infty} \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} E_{xy} F_\theta^n(x,y)(s_1) = \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} F_\theta(x,y)(s_1) \\ \underline{F_\theta}(s_1) &= \lim_{n\to\infty} \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} E_{xy} F_\theta^n(x,y)(s_1) = \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} F_\theta(x,y)(s_1) \end{aligned}$$

本文的目的在建构一个二变量之实数函数 $E_{xy}\left(F_\vartheta^n(x,y)(s_1)\right)$ 为目标函数来求出 minimax 定理的成立。即

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} F_\theta^n(x,y)(s_1) &= \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} F_\theta(x,y)(s_1) = \lim_{n\to\infty} \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} F_\theta^n(x,y)(s_1) \\ &= \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} F_\theta(x,y)(s_1) \end{aligned}$$

此处与局者 I 与与局者 II 的条件总期望值所构成之目标值函数。依其策略 $x \in X, y \in Y$ 的极小极大值定理。该问题也可简化成借助于参数函数 $F_\theta(x,y)(s_1)$ 求其上值与下值相等之随机策略函数的极小极大值定理。

理论上由始起 X 与 Y 为两个与局者的随机策略空间，在此动态对局之架构上，如上述所定义的上下值函数 $\overline{F_\theta}(s_1)$ 及 $\underline{F_\theta}(s_1)$ 两值若相等则有鞍点函数的极小极大定理：$\overline{F_\theta}(s_1) = \underline{F_\theta}(s_1) = F*(s_1)$。如果不是一个鞍点 $(x^*, y^*) \in (X,Y)$ 存在使

$$\begin{aligned} F_\theta^*(s_1) &= \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} F_\theta(x,y)(s_1) = \overline{F_\theta}(s_1) = \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} F_\theta(x,y)(s_1) \\ &= F_\theta^*(x^*, y^*) = \underline{F_\theta}(s_1) \end{aligned}$$

则 $\left[\underline{F_\theta}(s_1), \overline{F_\theta}(s_1)\right]$ 为鞍点函数区间的对偶缺陷。为了示明此结果，我们就像极小极大规划问题一样在 minmax $f(x,y)$ 之形成过程，都先设 Y 为紧致集合，而 f 在 Y 上的极大值 y^* 就在 Y 上存在，使其极小极大的规划问题得以解决。在本文 X，Y 虽然无拓扑的假设，但在自然形成之问题上，就得稍做下面的预备工作。为方便计，我们先定义：

a) $y^* \in Y$ 称为 $y \in Y$ 中对任意 $x \in X$，满足

$$\overline{F_\theta}(s_1) = \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} F_\theta(x,y)(s_1) = \inf_{x\in X} F_\theta(x,y^*)(s_1)$$

我们称此 $y^* \in Y$ 为 $F_\theta(x,y)(s_1)$ 在 (DGF_θ) 对局系统中有关 $y \in Y$ 中之极大点。

b) 如同 a)若 $x^* \in X$ 使满足

$$\underline{F_\theta}(s_1) = \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} E_{xy} F_\theta^n(x,y)(s_1) = \sup_{y\in Y} F_\theta(x^*,y)(s_1),$$

则 x^* 称为对任意 $y \in Y$，$F_\theta(x,y)(s_1)$ 之 x 中在对局系统 (DGF_θ) 的极小点。故两人动态对局之函数 $F_\theta(x,y)(s_1)$ 之极小极大定理成立。

为方便计，我们先建立下面亦可察出的下列命题。

命题： 1) $\overline{F_\theta}(s_1) \ge 0 \Leftrightarrow F_\theta(x,y)(s_1) \ge 0$

2) $\underline{F_\theta}(s_1) \le 0 \Leftrightarrow F_\theta(x,y)(s_1) \le 0$

证明： 1) 若 $\overline{F_\theta}(s_1) \ge 0$，则

$$\sup_{y\in Y} F_\theta(x,y)(s_1) \ge F_\theta(x,y)(s_1) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \overline{F_\theta}(s_1) = \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} F_\theta(x,y)(s_1) \ge 0 \Leftrightarrow F_\theta(x,y)(s_1) \ge 0$$

2) 上式中若 $\underline{F_\theta}(s_1) \le 0$，则

$$0 \ge \sup_{y\in Y} F_\theta(x,y)(s_1) \ge \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} F_\theta(x,y)(s_1) \Leftrightarrow \underline{F_\theta}(x,y)(s_1) \le 0 \quad \blacksquare$$

5. (DEF_θ)的鞍点函数

定理：设 $y^* \in Y$ (或 $x^* \in X$)为函数 $F_\theta(x,y)(s_1)$ 在 (DGF_θ) 对局系统中的极大值(或极小值)，$F_\theta(x,y)(s_1)$ 对任意 $x\in X$ 时，y^* 为在 Y 之极大点，(或任意 $y\in Y$ 时称 x^* 在 X 之极小点)。则 $\overline{F_\theta}(s_1) = \underline{F_\theta}(s_1) = F_\theta^*(s_1)$。即不论 $x^*\in X$ 或 $y^*\in Y$ 有一为 $F_\theta(x,y)(s_1)$ 之极小点 $x^*\in X$ 或极大点 $y^*\in Y$，则恒可导出 $F_\theta(x,y)(s_1)$ 的极小极大定理成立。

证明：由定义知 $\overline{F_\theta}(s_1) \ge \underline{F_\theta}(s_1)$。若 $y^*\in Y$ 为函数 $F_\theta(x,y)(s_1)$ 之极大点，则

$$\overline{F_\theta}(s_1) = \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} F_\theta(x,y)(s_1) = \inf_{x\in X} F_\theta(x,y^*)(s_1) \le \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} F_\theta(x,y)(s_1) = \underline{F_\theta}(s_1)$$

故 $\overline{F_\theta}(s_1) = \underline{F_\theta}(s_1) = F_\theta^*(s_1)$。证明极小极大定理等式(*)成立。■

这就示明鞍点 (x^*, y^*) 为极小极大定理的平衡点。用同样的方法可证明 $x^*\in X$ 为函数 $F_\theta(x,y)(s_1)$ 之极小点，亦得同样的结果。

(注) 注意在 $\underline{F_\theta}(s_1) \ge 0$，为方便计算可设存在有一点 x 使 $F_\theta(x,y)(s_1) = 0$。

6. 未来的发展

就原对局系统中所定与局者回报函数 $u_n(x,y)$ 此函数值为实数，但 $V_n(x,y)$ 定位正，则考虑这个分数型的型态如下：由原设与局者 v_n 的回报函数恒不为 0，所以 $V_n(x,y)(s_1) > 0$。则下列分式型之定义恒可合分式定义。

$$W_n(x,y)(s_1) = \frac{u_n(x,y)(s_1)}{v_n(x,y)(s_1)}, (x,y) \in X\times Y$$

该极大极小值问题有待研究。

7. 致谢

感谢评审教授对本文的中文修辞上的帮助，在此致谢他们的用心。

参考文献 (References)

[1] Fan, Ky. (1952) Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **38**, 121-126.

[2] Kimura, Y., Sawasaki, Y. and Tanaka, K. (2000) A perturbation on two-person zero-sum games. *Annals of the International Society of Dynamic Games*, **5**, 279-288.

[3] Lai, H.C. (2004) On a dynamic fractional game. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **294**, 644-654.

[4] Lai, H.C. and Liu, J.C. (2011) A new characterization on optimality and duality for nondifferentiable minimax fractional programming problems. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **12**, 69-80.

[5] Lai, H.C. and Yu, C.Y. (2012) Minimax theorem on a two-person zero-sum dynamic game. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **13**, 709-720.

[6] Lai, H.C. and Yu, C.Y. (2013) Minimax theorem of the ratio of expectation for a two-person zero-sum dynamic game. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **14**, 89-101.

[7] Lawrence, H. (1993) The winners and losers of the zero-sum game: The origins of trading profits price efficiency and market liquidity. Quantitative Research in Finance Spring, Seminar in Wesley Chapel, Florida.

[8] Tanaka, K. and Lai, H.C. (1982) A two-person zero-sum Markov game with a stopped set. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **86**, 54-68.

[9] Lai, H.C. and Tanaka, K. (1982) Non-cooperative n-person game with a stopped set. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **85**, 153-171.
[10] Lai, H.C. and Tanaka, K. (1984) A non-cooperative n-person semi-Markov game with a separable metric state space. *Applied Mathematics & Optimization*, **11**, 23-42.
[11] Lai, H.C. and Tanaka, K. (1984) On an n-person non-cooperative Markov game with a metric state space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **101**, 78-96.