Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 80-84
Published Online March 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.52012

New Theorem for the Distributive Lattices

Youxue Xu

Zhanjiang TV University, Zhanjiang Guangdong
Email: 529568449@qq.com

Received: Mar. 5th, 2015; accepted: Mar. 14th, 2015; published: Mar. 19th, 2015

Abstract

This paper discusses the operational properties of generated ideals and generated dual ideals. Then an example is given to point out that the conclusion of a proposition on P10 reference [1] is wrong. Two equivalent conditions for the distributive lattices are given.

Keywords

Distributive Lattice, Generated Ideal, Generated Dual Ideal

分配格的新定理

徐幼学

湛江广播电视大学，广东 湛江
Email: 529568449@qq.com

收稿日期：2015年3月5日；录用日期：2015年3月14日；发布日期：2015年3月19日

摘　要

首先讨论了格的子集生成幻和生成对偶幻的运算性质。然后给出一个反例，指出[1]中一定理有误，并由此获得分配格的两个等价条件。

关键词

分配格，生成幻，生成对偶幻

1. 生成幻及生成对偶幻的运算性质

本文用$\cup(\cap)$表示集合的并(交)，用$\vee(\wedge)$表示格中元的并(交)。

定义 1：若格 L 的子集 X 满足下述性质：

若 $a,b\in X$，则 $a\vee b, a\wedge b\in X$

则 X 对于原来的$\vee$、$\wedge$运算构成一个格，称之为 L 的子格，特别地，子格 J 闭于下时，即若 $a\in J$，则 $\forall b\in L$，有 $a\wedge b\in L$ 时，称为 L 的幻，幻的对偶叫作对偶幻(即闭于上的子格)。

定义 2：格 L 的子集 X 的生成幻和生成对偶幻分别定义为 L 的包含 X 的最小幻和最小对偶幻，并分别用 $J(X)$ 和 $J'(X)$ 表示。

设 X，Y 是格 L 的子集，记

$$X\vee Y=\{x\vee y | x\in X, y\in Y\}$$

$$X\wedge Y=\{x\wedge y | x\in X, y\in Y\}$$

命题 1：设 L 是格，X 和 Y 是 L 的非空子集，那么

(1) $J(X)\wedge J(Y)=J(X)\cap J(Y)$是幻。

(2) $J(X\cup Y)=J(X\vee Y)=J[J(X)\vee J(Y)]=J[J(X)\cup J(Y)]$。

(3) $J'(X)\vee J'(Y)=J'(X)\cap J'(Y)$是对偶幻。

(4) $J'(X\cup Y)=J'(X\wedge Y)=J'[J'(X)\wedge J'(Y)]=J'[J'(X)\cup J'(Y)]$。

证：仅证(3)、(4)两式，(1)、(2)是(3)、(4)的对偶

(3) 设 $a\in J'(X)\vee J'(Y)$，有 $x\in J'(X)$，$y\in J'(Y)$，使 $a=x\vee y$，由于 $J'(X)$，$J'(Y)$ 闭于上知，$x\vee y\in J'(X)$，$x\vee y\in J'(Y)$，故 $a=x\vee y\in J'(X)\cap J'(Y)$，$J'(X)\vee J'(Y)\subseteq J'(X)\cap J'(Y)$。

反之，设 $u\in J'(X)\cap J'(Y)$，则 $u\in J'(X)$，$u\in J'(Y)$，从而 $u=u\vee u\in J'(X)\cap J'(Y)$，$J'(X)\cap J'(Y)\subseteq J'(X)\vee J'(Y)$。

往证 $J'(X)\cap J'(Y)$ 是对偶幻，设 $a,b\in J'(X)\cap J'(Y)$则 $a,b\in J'(X)$，$a,b\in J'(Y)$。由 $J'(X)$，$J'(Y)$ 是子格易知 $a\wedge b\in J'(X)\cap J'(Y)$，$a\vee b\in J'(X)\cap J'(Y)$，故 $J'(X)\cap J'(Y)$ 是子格。又设 $u\in J'(X)\cap J'(Y)$，$v\in L$，由 $u\in J'(X)$，$u\in J'(Y)$ 及 $J'(X)$，$J'(Y)$ 闭于上知，$u\vee v\in J'(X)$，$u\vee v\in J'(Y)$，从而 $u\vee v\in J'(X)\cap J'(Y)$，故 $J'(X)\cap J'(Y)$ 是对偶幻。

(4) 我们只要证：

$$J'(X\cup Y)\underset{(a)}{\subseteq}J'(X\wedge Y)\underset{(b)}{\subseteq}J'[J'(X)\wedge J'(Y)]\underset{(c)}{\subseteq}J'[J'(X)\cup J'(Y)]\underset{(d)}{\subseteq}J'(X\cup Y)$$

(a) 设 $u\in X\cup Y$，则 $u\in X$ 或 $u\in Y$，不妨设 $u\in X$，则对任意 $y\in Y$，有 $u\geq u\wedge y\in X\wedge Y$。由 $J'(X\wedge Y)$ 闭于上知，$u\in J'(X\wedge Y)$，从而 $X\cup Y\subseteq J'(X\wedge Y)$，$J'(X\cup Y)\subseteq J'(X\wedge Y)$。

(b) 显然。

(c) 设 $u\in J'(X)\cap J'(Y)$，则有 $x\in J'(X)$，$y\in J'(Y)$，使 $u=X\wedge Y\in J'[J'(X)\cup J'(Y)]$，故

$$J'[J'(X)\wedge J'(Y)]\subseteq J'[J'(X)\cup J'(Y)]$$

(d) 设 $u\in J'(X)\cup J'(Y)$，有 $u\in J'(X)\subseteq J'(X\cup Y)$，或 $u\in J'(Y)\subseteq J'(X\cup Y)$，故

$$J'[J'(X)\cup J'(Y)]\subseteq J'(X\cup Y)$$

证毕。

命题 2：设 L 是格，X，Y 是 L 的非空子集，则：

(1) $J(X\wedge Y)\subseteq J(X)\wedge J(Y)$。

(2) $J'(X\vee Y)\subseteq J'(X)\vee J'(Y)$。

且上述包含关系均可不取等号。

证：(1)显然 $X\wedge Y\subseteq J(X)\wedge J(Y)$，由命题 1 知 $J(X)\wedge J(Y)$ 是幻，故 $J(X\wedge Y)\subseteq J(X)\wedge J(Y)$。

(2)是(1)的对偶。

例 1：设 $L=\{o,a,b,c,I\}$ 为菱形格，如图 1，令 $X=\{a,b\}$，$Y=\{c\}$ 则

$$J(X)=L,\quad J(Y)=\{o,c\}$$

$$J(X)\wedge J(Y)=\{o,c\}$$

$$J(X\wedge Y)=J\{o\}=\{o\}$$

故 $J(X)\wedge J(Y)\neq J(X\wedge Y)$。

对偶地 $J'(X\wedge Y)=\{I\}\neq\{c,I\}=J'(X)\vee J'(Y)$。

命题 3：设 L 是含有 o，I 的格，X，Y 是 L 的非空子集，则

(1) $J(X)\cup J(Y)\subseteq J(X)\vee J(Y)$。

(2) $J'(X)\cup J'(Y)\subseteq J'(X)\wedge J'(Y)$。

且上述包含关系均可不取等号。

证：(1) 设 $u\in J(X)\cup J(Y)$，不妨设 $u\in J(X)$，因 $o\in J(Y)$，故 $u=u\vee o\in J(X)\vee J(Y)$。$J(X)\cup J(Y)\subseteq J(X)\vee J(Y)$。

(2)是(1)的对偶。

例 2：设 $L=\{o,a,b,I\}$ 是四元格，如图 2，令 $X=\{a\}$，$Y=\{b\}$，则

$$J(X)=\{a,o\},\quad J(Y)=\{b,o\}$$

$$J(X)\vee J(Y)=\{o,a,b,I\}=L$$

$$J(X)\cup J(Y)=\{o,a,b\}$$

故 $J(X)\vee J(Y)\neq J(X)\cup J(Y)$。

对偶地，$J'(X)\wedge J'(Y)=\{o,a,b,I\}\neq\{a,b,I\}=J'(X)\cup J'(Y)$。

2. 分配格的两个等价条件

[1]中 P_{10} 指出：在格 L 中，由它的子集 X，Y 生成的幻的并(交)，易知是由 $x\in X$，$y\in Y$ 所作 $x\vee y\,(x\wedge y)$ 全体生成的幻*。

注*：由 X 生成的幻以 $J(X)$表之，$J(X)\vee J(Y)$ $\left(J(X)\wedge J(Y)\right)$乃是 L 的含(含于)$J(X)$及 $J(Y)$的最小(最大)幻，易证：

(1) $J(X)\vee J(Y)=L$ 的含 $\{x\vee y,x\in X,y\in Y\}$ 的最小幻。

(2) $J(X)\wedge J(Y)=L$ 的含 $\{x\wedge y,x\in X,y\in Y\}$ 的最小幻。

我们指出：[1]中 $J(X)\vee J(Y)$ 就是本文中的 $J\left[J(X)\cup J(Y)\right]$，而(1)式右边＝$J(X\vee Y)$，命题 1 已证得(1)式成立。而 [1] 中的 $J(X)\wedge J(Y)$ 就是本文中的 $J(X)\cap J(Y)$，由命题 1 知 $J(X)\wedge J(Y)=J(X)\cap J(Y)$，因此[1]中的 $J(X)\wedge J(Y)$ 和本文定义的 $J(X)\wedge J(Y)$ 是一致的，但(2)式右边 $=J(X\vee Y)$，于是(2)式为

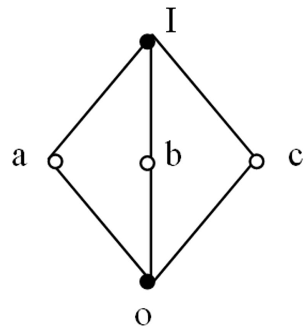

Figure 1. Diamond lattice
图 1. L 菱形格

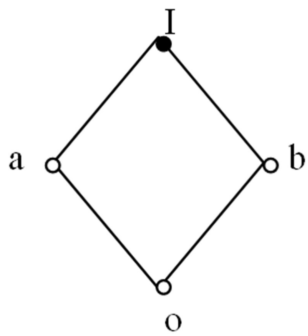

Figure 2. Four elements of lattice
图 2. L 四元格

$$J(X)\wedge J(Y)=J(X\vee Y)$$

这与例 1 是矛盾的。

我们注意到例 1 是一个非分配格的例子，对于分配格，我们有如下定理：

定理：格 L 是分配格的充要条件是

(3) $J(X)\wedge J(Y)=J(X\vee Y)$

或

(4) $J'(X)\wedge J'(Y)=J'(X\vee Y)$

其中 X，Y 是格 L 的任意非空子集。

证：仅证(3)式，(4)是(3)的对偶。

必要性，设 L 是分配格，我们只要证

$$J(X)\wedge J(Y)\subseteq J(X\wedge Y)$$

由命题 1 知，$J(X)\wedge J(Y)=J(X)\cap J(Y)$。设 $u\in J(X)\cap J(Y)$，则 $u\in J(X)$，$u\in J(Y)$。从而存在 $x_i\in X$，$y_j\in Y$，$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,m$。使 $u\le x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n$，$u\le y_1\vee y_2\vee\cdots\vee y_m$，于是

$$\begin{aligned}u=u\wedge u&\le(x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n)\wedge(y_1\vee y_2\vee\cdots\vee y_m)\\&=(x_1\wedge y_1)\vee(x_1\wedge y_m)\vee\cdots\vee(x_n\wedge y_1)\vee\cdots\vee(x_n\wedge y_m)\in J(X\wedge Y)\end{aligned}$$

由 $J(X\wedge Y)$ 闭于下知，$u\in J(X\wedge Y)$，$J(X)\cap J(Y)\subseteq J(X)\wedge J(Y)$，即 $J(X)\wedge J(Y)\subseteq J(X\wedge Y)$。

充分性，设在格 L 内(3)式恒成立，往证 L 是分配格，即对任意 $a,b,c\in L$，要证

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

令 $X = \{a\}$，$Y = \{b, c\}$，则

$$J(X) = \{x | x \le a, x \in L\}$$

$$J(Y) = \{y | y \le b \vee c, y \in L\}$$

$$J(X) \wedge J(Y) = \{u | u \le a \wedge (b \vee c), u \in L\}$$

$$X \wedge Y = \{a \wedge b, a \wedge c\}$$

$$J(X \wedge Y) = \{t | t \le (a \wedge b) \vee (a \wedge c), t \in L\}$$

比较 $J(X) \wedge J(Y)$ 与 $J(X \wedge Y)$ 中最大元得

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

证毕。

基金项目

湛江市科技计划项目(编号：2013A01003)。

参考文献 (References)

[1] 中山 正 (1964) 格论. 董克诚译. 上海科学技术出版社, 上海.