Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(5), 189-206
Published Online September 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55028

On High-Dimensional Ramsey Number

Chuanhui Shan

College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing
Email: S201306040@emails.bjut.edu.cn

Received: Aug. 22nd, 2015; accepted: Sep. 7th, 2015; published: Sep. 11th, 2015

Abstract

Paul Erdös and Noga Alon give a general sense of Ramsey Number Theory. This paper presents a general form of Ramsey Number Theory in the dimensional case and its promotion by using probabilistic methods. The paper shows the lower bound of $R_d(k,k)$ in the case of $k=l$ with equal probabilistic 2-coloring situation, and shows the lower bound of $R_d(l,k)$ in the case of k and l distinguishing with equal probabilistic 2-coloring situation. The paper shows the lower bound of $R_d(k,k,k)$ in the case of $k=l=m$ with equal probabilistic 3-coloring situation, and shows the lower bound of $R_d(l,k,m)$ in the case of k, l and m distinguishing with equal probabilistic 3-coloring situation. And the paper shows the lower bound of $R_d(k,k,\cdots,k)$ in the case of $k_1=k_2=\cdots=k_r$ with equal probabilistic r-coloring situation, and shows the lower bound of $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ in the case of $k_1,k_2,\cdots,k_r$ distinguishing with equal probabilistic r-coloring situation. Finally, we also give the corresponding results of the variety of situations with unequal probabilities.

Keywords

Probabilistic Method, High-Dimensional Ramsey Number Theory, Coloring

高维Ramsey数问题

单传辉

北京工业大学应用数理学院，北京
Email: S201306040@emails.bjut.edu.cn

文章引用：单传辉. 高维 Ramsey 数问题[J]. 理论数学, 2015, 5(5): 189-206. http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55028

收稿日期：2015年8月22日；录用日期：2015年9月7日；发布日期：2015年9月11日

摘 要

Paul Erdös和Noga Alon等人给出了一般意义的Ramsey数理论，本文通过概率方法给出了高维情况下的Ramsey数理论及其推广的一般形式。给出了等概率2-着色情况：当 $k=l$ 时 $R_d(k,k)$ 的下界结果；当 k 与 l 有区分时 $R_d(l,k)$ 的下界结果。给出了等概率3-着色情况：当 $k=l=m$ 时 $R_d(k,k,k)$ 的下界结果；当 k,l,m 有区分时 $R_d(l,k,m)$ 的下界结果。给出了 r-着色情况下：当 $k_1=k_2=\cdots=k_r$ 时 $R_d(k,k,\cdots,k)$ 的下界结果；当 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 有区分时 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 的下界结果。最后又给出了不等概率时上述各种情况下的相应结果。

关键词

概率方法，高维Ramsey数理论，着色

1. 引言

在组合数学中，Ramsey 定理，又称 Ramsey 二染色定理，是解决以下的问题：要找这样一个最小的数 n，使得 n 个人中必定有 k 个人相识或 l 个人互不认识。也可以表述成：

定义 1.1 [1]：Ramsey 数 $R(k,l)$：任意给定正整数 k 和 l 后，总存在一个最小整数 $R(k,l)$，使得每个有 $R(k,l)$ 个顶点的完全图，或者包含有一个有 k 个顶点的图，或者包含一个有 l 个顶点的独立集；其中数 $R(k,l)$ 称为 Ramsey 数。我们知道 $R(3,3)=6$。

关于此类型的 Ramsey 数 $R(k,l)$ 有很多的结论，1947 年 Paul Erdös 给出了等概率情况下的 $R(k,k)$ 的下界问题，对任意的整数 $k\ge 3$，$4^{k-1}>R(k,k)>2^{\frac{k}{2}}$，后一个不等式是 Erdös 证明的，前一个不等式是 Szekeres 给出的。而且 Erdös 还给出了一般化的 Ramsy 定理[2]。当然，Paul Erdös 也给出了一些特殊情况的 Ramsey 数的下界问题和 Ramsey 数的推广问题。Joel Spencer(1987)的一本题为“概率方法十讲”的专著，精辟地概述了概率方法对 Ramsey 理论的应用，给出了不等概率情况下的 $R(k,l)$ 的下界问题[3]。NogaAlon 也做了许多类似的关于 $R(k,l)$ 的工作。本文想通过用概率方法来考虑关于高维 Ramsey 数 $R_d(l,k)$ 的各类问题及其推广。下面简单地介绍一下概率方法和 $R_d(l,k)$ 的概念。

定义 1.2 [4]：概率方法：也称为非构造性方法，它是用来证明一类事物的某些元素具有一定的特性，而无需实际构造那些元素的方法。在一些概率空间，这些元素存在的概率是大于零的。概率方法研究的组合对象和组合结构很有实际意义，例如著名的四色问题，棋盘的完全覆盖问题等很有实用价值。概率方法在解决许多组合数学问题中是一个强有力的工具，许多棘手的问题几乎可以通过运用这种方法的基本知识解决。

定义 1.3 [5]：完全 n-顶点 d-一致超平面：我们考虑顶点集合为 $V=[n]=\{1,\cdots,n\}$，子集 $A\subseteq V$ 是一个维数为 $|A|-1$ 的面，维数为 d 的面(face)简称为 d-面，故 d-面有 $d+1$ 个元素。完全 n-顶点 d-一致超平面(the complete n-vertex d-uniform hypergraph)是指的顶点集合 V 上所有 d-面的集合，d-面也称为完全 n-顶点 d-一致超平面的超边(hyperedges)。

定义 1.4 [5]：高维 Ramsey 数 $R_d(l,k)$：$R_d(l,k)$ 是这样的最小整数 n，对于 n 有以下结论成立。给完

全n-顶点d-一致超平面(the complete n-vertex d-uniform hypergraph)的超边(hyperedges)着红色/蓝色，或者包含一个完全的l-顶点红色超图(a complete l-vertex red hypergraph)或者包含一个完全的k-顶点蓝色超图(a complete k-vertex blue hypergraph)。完全n-顶点d-一致超平面有$\binom{n}{d+1}$个超边。当$d=1$时，完全n-顶点d-一致超平面就是我们传统意义上的完全图，$R_d(l,k)$问题也就是传统意义上的 Ramsey 数问题。

2. 等概率着色下的高维 Ramsey 数

2.1. 等概率 2-着色情况下的 $R_d(l,k)$ 问题

现在考虑$k=l$时的$R_d(k,k)$的存在性的取值问题。我们考虑完全n-顶点d-一致超平面，它有$\binom{n}{d+1}$个超边，那么它的完全的k-顶点超图满足的结论是：

定理 2.1 $R_d(k,k)>\left(2^{\binom{k}{d+1}+k-2}\right)^{\frac{1}{k}}$。

证明：我们设事件X表示任意完全的k-顶点超图没有单色的情况，事件X若是存在的话，那么我们最终要求的$R_d(k,k)$必然要大于我们求出的n的取值要求。我们继续考虑事件X的补事件$\bar{X}$，$\bar{X}$表示至少有一个完全的k-顶点超图是单色的情况，则：

$$p(\bar{X})=p(\text{至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是单色})\le\sum p(k\text{个顶点的完全子图是单色}(\text{红色或蓝色}))$$

而完全的k-顶点超图有$\binom{k}{d+1}$条超边，要让这些超边都是单色，要么都是红色，要么都是蓝色，而取红色或蓝色的概率都是$1/2$，所以$p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是单色}(\text{红色或蓝色}))=2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{d+1}}$，而完全的$k$-顶点超图是单色的总共又有$\binom{n}{k}$个，所以：

上式$=\binom{n}{k}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{d+1}}\right]$，故：

$$\begin{aligned}p(\bar{X})&\le\sum p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是单色}(\text{红色或蓝色}))\\&=\binom{n}{k}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{d+1}}\right]=\binom{n}{k}2\frac{1}{2^{\binom{k}{d+1}}}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{2}{2^{\binom{k}{d+1}}}\end{aligned}$$

又由：

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{2}{2^{\binom{k}{d+1}}}<\frac{n^k}{k(k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{2}{2^{\binom{k}{d+1}}}<\frac{n^k}{2^{k-2}}\cdot\frac{1}{2^{\binom{k}{d+1}}}<\frac{n^k}{2^{\binom{k}{d+1}+k-2}}$$

我们让$\frac{n^k}{2^{\binom{k}{d+1}+k-2}}<1$，即让$n^k<2^{\binom{k}{d+1}+k-2}$，也即$n<\left(2^{\binom{k}{d+1}+k-2}\right)^{\frac{1}{k}}$;所以$n<\left(2^{\binom{k}{d+1}+k-2}\right)^{\frac{1}{k}}$时，$\frac{n^k}{2^{\binom{k}{d+1}+k-2}}<1$成立，此时：

$$p\left(\bar{X}\right)\le\sum p\left(k\text{个顶点的完全子图是单色}\left(\text{红色或蓝色}\right)\right)=\binom{n}{k}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{d+1}}\right]=\binom{n}{k}2\frac{1}{2^{\binom{k}{d+1}}}<1$$

也成立，故此时 $p\left(X\right)>0$ 成立，事件 X 存在，即任意完全的 k-顶点超图没有单色的情况存在，所以 $R_d\left(k,k\right)>\left(2^{\binom{k}{d+1}+k-2}\right)^{\frac{1}{k}}$。证毕。

我们现在再考虑一般的情形，即 k 与 l 有区分时的 $R_d\left(l,k\right)$ 的存在性的取值问题。我们考虑完全 n-顶点 d-一致超平面，它有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边，那么 $R_d\left(l,k\right)$ 满足的结论是：

定理 2.2 如果 $\binom{n}{l}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{d+1}}<1$，则 $R_d\left(l,k\right)>n$。

证明： $R_d\left(l,k\right)$ 是这样的最小整数 n，对于 n 有以下结论成立。给完全 n-顶点 d-一致超平面的超边着红色/蓝色，或者包含一个完全的 l-顶点红色超图或者包含一个完全的 k-顶点蓝色超图。完全 n-顶点 d-一致超平面有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边。我们设事件 X 表示任意完全的 l-顶点超图不是红色或者任意完全的 k-顶点超图不是蓝色的情况，事件 X 若是存在的话，那么我们最终要求的 $R_d\left(l,k\right)$ 必然要大于我们求出的 n 的取值要求。我们继续考虑事件 X 的补事件 $\bar{X}$，$\bar{X}$ 表示至少有一个完全的 l-顶点超图是红色的且至少有一个完全的 k-顶点超图是蓝色的情况，则：

$$\begin{aligned}p\left(\bar{X}\right)&=p\left(\text{至少有一个完全的}l\text{-顶点超图是红色的且至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right)\\&\le p\left(\text{至少有一个完全的}l\text{-顶点超图是红色的}\right)+p\left(\text{至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right)\\&\le\sum p\left(\text{完全的}l\text{-顶点超图是红色的}\right)+\sum p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right)\end{aligned}$$

而完全的 l-顶点超图有 $\binom{l}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是红色，而取红色的概率为 $1/2$，所以 $p\left(\text{完全的}l\text{-顶点超图是红色的}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{l}{d+1}}$；同理完全的 k-顶点超图有 $\binom{k}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是蓝色，而取蓝色的概率都是 $1/2$，所以 $p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{d+1}}$，而完全的 l-顶点超图是红色又有 $\binom{n}{l}$ 个和完全的 k-顶点超图是蓝色的又有 $\binom{n}{k}$ 个，所以：

上式 $=\binom{n}{l}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{d+1}}$，故：

$$p\left(\bar{X}\right)\le\sum p\left(\text{完全的}l\text{-顶点超图是红色的}\right)+\sum p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right)=\binom{n}{l}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{d+1}}$$

又由已知条件知：

$$\binom{n}{l}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{d+1}}<1$$

所以：

$$p\left(\bar{X}\right)\le\sum p\left(\text{完全的}l\text{-顶点超图是红色的}\right)+\sum p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right)$$
$$=\binom{n}{l}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{d+1}}<1$$

故此时 $p\left(X\right)>0$ 成立，事件 X 存在，即任意完全的 l -顶点超图不是红色或者任意完全的 k -顶点超图不是蓝色的情况存在，所以 $R_d\left(l,k\right)>n$ 。证毕。

2.2. 等概率 3-着色情况下的 $R_d\left(l,k,m\right)$ 问题

上面说的是 2-着色时的 $R_d\left(l,k\right)$，现在我们来考虑 3-着色相应的情形，此时 $R_d\left(l,k,m\right)$，对于 n 有以下结论成立。$R_d\left(l,k,m\right)$ 是这样的最小整数 n，对于 n 有以下结论成立。给完全 n -顶点 d -一致超平面的超边着颜色 1、颜色 2 和颜色 3，或者包含一个完全的 l -顶点颜色 1 的超图或者包含一个完全的 k -顶点颜色 2 的超图或者包含一个完全的 m -顶点颜色 3 的超图。

现在考虑 $k=l=m$ 时的 $R_d\left(k,k,k\right)$ 的存在性的取值问题。我们考虑完全 n -顶点 d -一致超平面，它有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边，那么它的完全的 k -顶点超图满足的结论是：

定理 2.3

$$R_d\left(k,k,k\right)>\left(3^{\binom{k}{d+1}+k-3}\right)^{\frac{1}{k}}。$$

证明：我们设事件 X 表示任意完全的 k -顶点超图没有单色的情况，事件 X 若是存在的话，那么我们最终要求的 $R_d\left(k,k,k\right)$ 必然要大于我们求出的 n 的取值要求。我们继续考虑事件 X 的补事件 $\bar{X}$， $\bar{X}$ 表示至少有一个完全的k-顶点超图是单色的情况，则：

$$p\left(\bar{X}\right)=p\left(\text{至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是单色}\right)$$
$$\le\sum p\left(k\text{个顶点的完全子图是单色}\left(\text{颜色1或者颜色2或者颜色3}\right)\right)$$

而完全的 k -顶点超图有 $\binom{k}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是单色，要么都是颜色 1，要么都是颜色 2，要么都是颜色 3，而取颜色 1 或者颜色 2 或者颜色 3 的概率都是 $1/3$，所以

$p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是单色}\left(\text{颜色1或者颜色2或者颜色3}\right)\right)=3\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{d+1}}$，而完全的 k -顶点超图是单色的总共又有 $\binom{n}{k}$ 个，所以：

上式 $=\binom{n}{k}\left[3\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{d+1}}\right]$，故：

$$p\left(\bar{X}\right)\le\sum p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是单色}\left(\text{颜色1或者颜色2或者颜色3}\right)\right)$$
$$=\binom{n}{k}\left[3\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{d+1}}\right]=\binom{n}{k}3\frac{1}{3^{\binom{k}{d+1}}}=\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdots\left(n-k+1\right)}{k!}\cdot\frac{3}{3^{\binom{k}{d+1}}}$$

又由：

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{3}{3^{\binom{k}{d+1}}}$$

$$<\frac{n^k}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{3}{3^{\binom{k}{d+1}}}<\frac{n^k}{3^{k-3}}\cdot\frac{1}{3^{\binom{k}{d+1}}}<\frac{n^k}{3^{\binom{k}{d+1}+k-3}}$$

我们让 $\frac{n^k}{3^{\binom{k}{d+1}+k-3}}<1$，即让 $n^k<3^{\binom{k}{d+1}+k-3}$，也即 $n<\left(3^{\binom{k}{d+1}+k-3}\right)^{\frac{1}{k}}$；所以 $n<\left(3^{\binom{k}{d+1}+k-3}\right)^{\frac{1}{k}}$ 时，$\frac{n^k}{3^{\binom{k}{d+1}+k-3}}<1$ 成立，此时：

$$p(\bar{X})\le\sum p\left(k\text{个顶点的完全子图是单色}(\text{颜色1或者颜色2或者颜色3})\right)=\binom{n}{k}\left[3\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{d+1}}\right]=\binom{n}{k}3\frac{1}{3^{\binom{k}{d+1}}}<1$$

也成立，故此时 $p(X)>0$ 成立，事件 X 存在，即任意完全的 k-顶点超图没有单色的情况存在，所以 $R_d(k,k,k)>\left(3^{\binom{k}{d+1}+k-3}\right)^{\frac{1}{k}}$。证毕。

我们现在再考虑一般的情形，即 k,l,m 有区分时的 $R_d(l,k,m)$ 的存在性的取值问题。我们考虑完全 n-顶点 d-一致超平面，它有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边，那么 $R_d(l,k,m)$ 满足的结论是：

定理 2.4 如果 $\binom{n}{l}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{d+1}}+\binom{n}{m}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{m}{d+1}}<1$，则 $R_d(l,k,m)>n$。

证明：$R_d(l,k,m)$ 是这样的最小整数 n，对于 n 有以下结论成立。给完全 n-顶点 d-一致超平面的超边着颜色 1、颜色 2 和颜色 3，或者包含一个完全的 l-顶点颜色 1 的超图或者包含一个完全的 k-顶点颜色 2 的超图或者包含一个完全的 m-顶点颜色 3 的超图。完全 n-顶点 d-一致超平面有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边。我们设事件 X 表示任意完全的 l-顶点超图不是颜色 1 或者任意完全的 k-顶点超图不是颜色 2 或者任意完全的 m-顶点超图不是颜色 3 的情况，事件 X 若是存在的话，那么我们最终要求的 $R_d(l,k,m)$ 必然要大于我们求出的 n 的取值要求。我们继续考虑事件 X 的补事件 $\bar{X}$，$\bar{X}$ 表示至少有一个完全的 l-顶点超图是颜色 1 的且至少有一个完全的 k-顶点超图是颜色 2 的且至少有一个完全的 m-顶点超图是颜色 3 的情况，则：

$$\begin{aligned}
p(\bar{X})=&\,p(\text{至少有一个完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的}\\
&\text{且至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的}\\
&\text{且至少有一个完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的})\\
\le&\,p(\text{至少有一个完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的})\\
&+p(\text{至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的})\\
&+p(\text{至少有一个完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的})\\
\le&\sum p(\text{完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的})\\
&+\sum p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的})\\
&+\sum p(\text{完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的})
\end{aligned}$$

而完全的 l -顶点超图有 $\binom{l}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 1，而取颜色 1 的概率为1/3，所以 $p(\text{完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的})=\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{l}{d+1}}$；同理完全的 k -顶点超图有 $\binom{k}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 2，而取颜色 2 的概率是1/3,所以 $p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的})=\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{d+1}}$；完全的 m -顶点超图有 $\binom{m}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 3，而取颜色 3 的概率是 1/3，所以 $p(\text{完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的})=\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{m}{d+1}}$。而完全的 l -顶点超图是颜色 1 又有 $\binom{n}{l}$ 个，完全的 k -顶点超图是颜色 2 的又有 $\binom{n}{k}$ 个和完全的 m -顶点超图是颜色 3 的又有 $\binom{n}{m}$，所以：

上式 $=\binom{n}{l}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{d+1}}+\binom{n}{m}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{m}{d+1}}$，故：

$$\begin{aligned}p(\bar{X})&\le\sum p(\text{完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的})\\&\quad+\sum p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的})\\&\quad+\sum p(\text{完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的})\\&=\binom{n}{l}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{d+1}}+\binom{n}{m}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{m}{d+1}}\end{aligned}$$

又由已知条件知：

$$\binom{n}{l}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{d+1}}+\binom{n}{m}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{m}{d+1}}<1$$

所以：

$$\begin{aligned}p(\bar{X})&\le\sum p(\text{完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的})\\&\quad+\sum p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的})\\&\quad+\sum p(\text{完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的})\\&=\binom{n}{l}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{d+1}}+\binom{n}{m}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{m}{d+1}}<1\end{aligned}$$

故此时 $p(X)>0$ 成立，事件 X 存在，即任意完全的 l -顶点超图不是颜色 1 或者任意完全的 k -顶点超图不是颜色 2 或者任意完全的 m -顶点超图不是颜色 3 的情况存在，所以 $R_d(l,k,m)>n$。证毕。

2.3. 等概率 r-着色情况下的 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 问题

现在我们来考虑 r-着色相应的情形，此时 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$，对于 n 有以下结论成立。$R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 是这样的最小整数 n，对于 n 有以下结论成立。给完全 n -顶点 d -一致超平面的超边着颜色 1，颜色 2，…，颜色 r，或者包含一个完全的 k_1 -顶点颜色 1 的超图或者包含一个完全的 k_2 -顶点颜色 2 的超图，…，或者

包含一个完全的 k_r -顶点颜色 r 的超图。

现在考虑 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r$ 时的 $R_d\left(k,k,\cdots,k\right)$ (有 r 个 k)的存在性的取值问题。我们考虑完全 n -顶点 d -一致超平面，它有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边，那么它的完全的 k -顶点超图满足的结论是：

定理 2.5 $R_d\left(k,k,\cdots,k\right) > \left(r^{\binom{k}{d+1}+k-r}\right)^{\frac{1}{k}}$ 。

证明：我们设事件 X 表示任意完全的 k -顶点超图没有单色的情况，事件 X 若是存在的话，那么我们最终要求的 $R_d\left(k,k,\cdots,k\right)$ 必然要大于我们求出的 n 的取值要求。我们继续考虑事件 X 的补事件 $\bar{X}$ ， $\bar{X}$ 表示至少有一个完全的 k -顶点超图是单色的情况，则：

$$\begin{aligned} p\left(\bar{X}\right) &= p\left(\text{至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是单色}\right) \\ &\le \sum p\left(k\text{个顶点的完全子图是单色}\left(\text{颜色1或者颜色2},\cdots,\text{或颜色}r\right)\right) \end{aligned}$$

而完全的 k -顶点超图有 $\binom{k}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是单色，要么都是颜色 1，要么都是颜色 2，…，要么都是颜色 r ，而取颜色 1 或者颜色 2，…，或颜色 r 的概率都是 $1/r$ ，所以 $p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是单色}\left(\text{颜色1或者颜色2},\cdots,\text{或颜色}r\right)\right) = r\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k}{d+1}}$ ，而完全的 k -顶点超图是单色的总共又有 $\binom{n}{k}$ 个，所以：

上式 $= \binom{n}{k}\left[r\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k}{d+1}}\right]$ ，故：

$$\begin{aligned} p\left(\bar{X}\right) &\le \sum p\left(k\text{个顶点的完全子图是单色}\left(\text{颜色1或者颜色2},\cdots,\text{或颜色}r\right)\right) \\ &= \binom{n}{k}\left[r\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k}{d+1}}\right] = \binom{n}{k} r \frac{1}{r^{\binom{k}{d+1}}} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{r}{r^{\binom{k}{d+1}}} \end{aligned}$$

又由：

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{r}{r^{\binom{k}{d+1}}} &< \frac{n^k}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{r}{r^{\binom{k}{d+1}}} \\ &< \frac{n^k}{r^{k-r}}\cdot\frac{1}{r^{\binom{k}{d+1}}} < \frac{n^k}{r^{\binom{k}{d+1}+k-r}} \end{aligned}$$

我们让 $\frac{n^k}{r^{\binom{k}{d+1}+k-r}} < 1$ ，即让 $n^k < r^{\binom{k}{d+1}+k-r}$ ，也即 $n < \left(r^{\binom{k}{d+1}+k-r}\right)^{\frac{1}{k}}$ ；所以 $n < \left(r^{\binom{k}{d+1}+k-r}\right)^{\frac{1}{k}}$ 时， $\frac{n^k}{r^{\binom{k}{d+1}+k-r}} < 1$ 成立，此时：

$$p\left(\bar{X}\right) \le \sum p\left(k\text{个顶点的完全子图是单色}\left(\text{颜色1或者颜色2},\cdots,\text{或颜色}r\right)\right) = \binom{n}{k}\left[r\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k}{d+1}}\right] = \binom{n}{k} r\frac{1}{r^{\binom{k}{d+1}}} < 1$$

也成立，故此时 $p(X)>0$ 成立，事件 X 存在，即任意完全的 k-顶点超图没有单色的情况存在，所以 $R_d(k,k,\cdots,k)>\left(r^{\binom{k}{d+1}+k-r}\right)^{\frac{1}{k}}$。证毕。

我们现在再考虑一般的情形，即 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 有区分时的 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 的存在性的取值问题。我们考虑完全 n-顶点 d-一致超平面，它有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边，那么 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 满足的结论是：

定理 2.6 如果 $\binom{n}{k_1}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_1}{d+1}}+\binom{n}{k_2}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_2}{d+1}}+\cdots+\binom{n}{k_r}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_r}{d+1}}<1$，则 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)>n$。

证明：$R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 是这样的最小整数 n，对于 n 有以下结论成立。给完全 n-顶点 d-一致超平面的超边着颜色 1，颜色 2，…，颜色 r，或者包含一个完全的 k_1-顶点颜色 1 的超图，或者包含一个完全的 k_2-顶点颜色 2 的超图，…，或者包含一个完全的 k_r-顶点颜色 r 的超图。完全 n-顶点 d-一致超平面有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边。我们设事件 X 表示任意完全的 k_1-顶点超图不是颜色 1 或者任意完全的 k_2-顶点超图不是颜色 2，…，或者任意完全的 k_r-顶点超图不是颜色 r 的情况，事件 X 若是存在的话，那么我们最终要求的 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 必然要大于我们求出的 n 的取值要求。我们继续考虑事件 X 的补事件 $\bar{X}$，$\bar{X}$ 表示至少有一个完全的 k_1-顶点超图是颜色 1 的且至少有一个完全的 k_2-顶点超图是颜色 2 的，…，且至少有一个完全的 k_r-顶点超图是颜色 r 的情况，则：

$$
\begin{aligned}
p(\bar{X}) = {} & p(\text{至少有一个完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的} \\
& \quad \text{且至少有一个完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的,} \\
& \quad \cdots,\text{且至少有一个完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的}) \\
\le {} & p(\text{至少有一个完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的}) \\
& + p(\text{至少有一个完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的})+\cdots \\
& + p(\text{至少有一个完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的}) \\
\le {} & \sum p(\text{完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的}) \\
& + \sum p(\text{完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的})+\cdots \\
& + \sum p(\text{完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的})
\end{aligned}
$$

而完全的 k_1-顶点超图有 $\binom{k_1}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 1，而取颜色 1 的概率为 $1/r$，所以 $p(\text{完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的})=\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_1}{d+1}}$；同理完全的 k_2-顶点超图有 $\binom{k_2}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 2，而取颜色 2 的概率是 $1/r$，所以 $p(\text{完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的})=\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_2}{d+1}}$；…；完全的 k_r-顶点超图有 $\binom{k_r}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 r，而取颜色 r 的概率是 $1/r$，所以 $p(\text{完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的})=\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_r}{d+1}}$。而完全的 k_1-顶点超图是颜色 1 又有 $\binom{n}{k_1}$ 个，完全的 k_2-顶点

超图是颜色 2 的又有$\binom{n}{k_2}$个，…，完全的k_r-顶点超图是颜色 r 的又有$\binom{n}{k_r}$，所以：

上式$=\binom{n}{k_1}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_1}{d+1}}+\binom{n}{k_2}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_2}{d+1}}+\cdots+\binom{n}{k_r}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_r}{d+1}}$，故：

$$\begin{aligned}p\left(\bar{X}\right)\le&\sum p\left(\text{完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的}\right)\\&+\sum p\left(\text{完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的}\right)+\cdots\\&+\sum p\left(\text{完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的}\right)\\=&\binom{n}{k_1}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_1}{d+1}}+\binom{n}{k_2}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_2}{d+1}}+\cdots+\binom{n}{k_r}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_r}{d+1}}\end{aligned}$$

又由已知条件知：

$$\binom{n}{k_1}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_1}{d+1}}+\binom{n}{k_2}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_2}{d+1}}+\cdots+\binom{n}{k_r}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_r}{d+1}}<1$$

所以：

$$\begin{aligned}p\left(\bar{X}\right)\le&\sum p\left(\text{完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的}\right)\\&+\sum p\left(\text{完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的}\right)+\cdots\\&+\sum p\left(\text{完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的}\right)\\=&\binom{n}{k_1}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_1}{d+1}}+\binom{n}{k_2}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_2}{d+1}}+\cdots+\binom{n}{k_r}\left(\frac{1}{r}\right)^{\binom{k_r}{d+1}}<1\end{aligned}$$

故此时$p(X)>0$成立，事件 X 存在，即任意完全的k_1-顶点超图不是颜色 1 或者任意完全的k_2-顶点超图不是颜色 2，…，或者任意完全的k_r-顶点超图不是颜色 r 的情况存在，所以$R_d\left(k_1,k_2,\cdots,k_r\right)>n$。证毕。

3. 不等概率着色下的高维 Ramsey 数

3.1. 不等概率 2-着色情况下的 $R_d(l,k)$ 问题

上面都是等概率情况下的情形，下面让我们看看不等概率的情形。

现在考虑$k=l$时的$R_d(k,k)$的存在性的取值问题。我们考虑完全n-顶点d-一致超平面，它有$\binom{n}{d+1}$个超边，那么它的完全的k-顶点超图满足的结论是：

定理 3.1 $R_d(k,k)>\left(\dfrac{2^{k-1}}{p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$。

证明：我们设事件 X 表示任意完全的k-顶点超图没有单色的情况，事件 X 若是存在的话，那么我们最终要求的$R_d(k,k)$必然要大于我们求出的n的取值要求。我们继续考虑事件 X 的补事件$\bar{X}$，$\bar{X}$表示至少有一个完全的k-顶点超图是单色的情况，则：

$$p\left(\bar{X}\right)=p\left(\text{至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是单色}\right)\le\sum p\left(k\text{个顶点的完全子图是单色}\left(\text{红色或蓝色}\right)\right)$$

而完全的k-顶点超图有$\binom{k}{d+1}$条超边，要让这些超边都是单色，要么都是红色，要么都是蓝色，而取红

色的概率为 p_1，取蓝色的概率为 p_2，所以 $p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是单色}(\text{红色或蓝色})) = p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}$，而完全的 k-顶点超图是单色的总共又有 $\binom{n}{k}$ 个，所以：

上式 $= \binom{n}{k}\left[p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}\right]$，故：

$$\begin{aligned} p(\bar{X}) &\le \sum p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是单色}(\text{红色或蓝色})) \\ &= \binom{n}{k}\left[p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}\right] = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}\right) \end{aligned}$$

又由：

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}\right) < \frac{n^k}{k(k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}\right) < \frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}\right)$$

我们让 $\frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}\right) < 1$，即让 $n^k < \frac{2^{k-1}}{p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}}$，也即 $n < \left(\frac{2^{k-1}}{p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$；所以 $n < \left(\frac{2^{k-1}}{p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$ 时，$\frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}\right) < 1$ 成立，此时：

$$p(\bar{X}) \le \sum p(k\text{个顶点的完全子图是单色}(\text{红色或蓝色})) = \binom{n}{k}\left[p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}\right] < \frac{n^k}{2^{k-1}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}\right) < 1$$

也成立，故此时 $p(X) > 0$ 成立，事件 X 存在，即任意完全的 k-顶点超图没有单色的情况存在，所以 $R_d(k,k) > \left(\frac{2^{k-1}}{p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$。证毕。

我们现在再考虑一般的情形，即 k 与 l 有区分时的 $R_d(l,k)$ 的存在性的取值问题。我们考虑完全 n-顶点 d-一致超平面，它有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边，那么 $R_d(l,k)$ 满足的结论是：

定理 3.2 如果 $\binom{n}{l}p_1^{\binom{l}{d+1}} + \binom{n}{k}p_2^{\binom{l}{d+1}} < 1$，则 $R_d(l,k) > n$。

证明：$R_d(l,k)$ 是这样的最小整数 n，对于 n 有以下结论成立。给完全 n-顶点 d-一致超平面的超边着红色/蓝色，或者包含一个完全的 l-顶点红色超图或者包含一个完全的 k-顶点蓝色超图。完全 n-顶点 d-一致超平面有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边。我们设事件 X 表示任意完全的 l-顶点超图不是红色或者任意完全的 k-顶点超图不是蓝色的情况，事件 X 若是存在的话，那么我们最终要求的 $R_d(l,k)$ 必然要大于我们求出的 n 的

取值要求。我们继续考虑事件 X 的补事件 $\bar{X}$，$\bar{X}$ 表示至少有一个完全的 l -顶点超图是红色的且至少有一个完全的 k -顶点超图是蓝色的情况，则：

$$\begin{aligned} p\left(\bar{X}\right) &= p\left(\text{至少有一个完全的}l\text{-顶点超图是红色的且至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right) \\ &\le p\left(\text{至少有一个完全的}l\text{-顶点超图是红色的}\right) + p\left(\text{至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right) \\ &\le \sum p\left(\text{完全的}l\text{-顶点超图是红色的}\right) + \sum p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right) \end{aligned}$$

而完全的 l -顶点超图有 $\binom{l}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是红色，而取红色的概率为 p_1，所以 $p\left(\text{完全的}l\text{-顶点超图是红色的}\right) = p_1^{\binom{l}{d+1}}$；同理完全的 k -顶点超图有 $\binom{k}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是蓝色，而取蓝色的概率都是 p_2，所以 $p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right) = p_2^{\binom{k}{d+1}}$，而完全的 l -顶点超图是红色又有 $\binom{n}{l}$ 个和完全的 k -顶点超图是蓝色的又有 $\binom{n}{k}$ 个，所以：

上式 $= \binom{n}{l} p_1^{\binom{l}{d+1}} + \binom{n}{k} p_2^{\binom{k}{d+1}}$，故：

$$\begin{aligned} p\left(\bar{X}\right) &\le \sum p\left(\text{完全的}l\text{-顶点超图是红色的}\right) + \sum p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right) \\ &= \binom{n}{l} p_1^{\binom{l}{d+1}} + \binom{n}{k} p_2^{\binom{k}{d+1}} \end{aligned}$$

又由已知条件知：

$$\binom{n}{l} p_1^{\binom{l}{d+1}} + \binom{n}{k} p_2^{\binom{k}{d+1}} < 1$$

所以：

$$\begin{aligned} p\left(\bar{X}\right) &\le \sum p\left(\text{完全的}l\text{-顶点超图是红色的}\right) + \sum p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是蓝色的}\right) \\ &= \binom{n}{l} p_1^{\binom{l}{d+1}} + \binom{n}{k} p_2^{\binom{k}{d+1}} < 1 \end{aligned}$$

故此时 $p(X) > 0$ 成立，事件 X 存在，即任意完全的 l -顶点超图不是红色或者任意完全的 k -顶点超图不是蓝色的情况存在，所以 $R_d(l,k) > n$。证毕。

3.2.不等概率 3-着色情况下的 $R_d(l,k,m)$ 问题

上面说的是 2-着色时的 $R_d(l,k)$，现在我们来考虑 3-着色相应的情形，此时 $R_d(l,k,m)$，对于 n 有以下结论成立。$R_d(l,k,m)$ 是这样的最小整数 n，对于 n 有以下结论成立。给完全 n -顶点 d -一致超平面的超边着颜色 1、颜色 2 和颜色 3，或者包含一个完全的 l -顶点颜色 1 的超图或者包含一个完全的 k -顶点颜色 2 的超图或者包含一个完全的 m -顶点颜色 3 的超图。

现在考虑 $k = l = m$ 时的 $R_d(k,k,k)$ 的存在性的取值问题。我们考虑完全 n -顶点 d -一致超平面，它有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边，那么它的完全的 k -顶点超图满足的结论是：

定理 3.3 $R_d(k,k,k) > \left(\dfrac{3^{k-2}}{p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$。

证明：我们设事件 X 表示任意完全的 k-顶点超图没有单色的情况，事件 X 若是存在的话，那么我们最终要求的 $R_d(k,k,k)$ 必然要大于我们求出的 n 的取值要求。我们继续考虑事件 X 的补事件 $\bar{X}$，$\bar{X}$ 表示至少有一个完全的 k-顶点超图是单色的情况，则：

$$\begin{aligned} p(\bar{X}) &= p(\text{至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是单色}) \\ &\le \sum p(k\text{个顶点的完全子图是单色}(\text{颜色1或者颜色2或颜色3})) \end{aligned}$$

而完全的 k-顶点超图有 $\binom{k}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是单色，要么都是颜色 1，要么都是颜色 2，要么都是颜色 3，而取颜色 1 的概率为 p_1，取颜色 2 的概率为 p_2，取颜色 3 的概率为 p_3，所以 $p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是单色}(\text{颜色1或者颜色2或颜色3})) = p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}$，而完全的 k-顶点超图是单色的总共又有 $\binom{n}{k}$ 个，所以：

上式 $= \binom{n}{k}\left[p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}\right]$，故：

$$\begin{aligned} p(\bar{X}) &\le \sum p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是单色}(\text{颜色1或者颜色2或颜色3})) \\ &= \binom{n}{k}\left[p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}\right] = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}\right) \end{aligned}$$

又由：

$$\begin{aligned} &\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}\right) \\ &< \frac{n^k}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}\right) < \frac{n^k}{3^{k-2}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}\right) \end{aligned}$$

我们让 $\frac{n^k}{3^{k-2}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}\right) < 1$，即让 $n^k < \dfrac{3^{k-2}}{p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}}$，也即 $n < \left(\dfrac{3^{k-2}}{p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$；所以 $n < \left(\dfrac{3^{k-2}}{p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$ 时，$\frac{n^k}{3^{k-2}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}\right) < 1$ 成立，此时：

$$\begin{aligned} p(\bar{X}) &\le \sum p(k\text{个顶点的完全子图是单色}(\text{颜色1或者颜色2或颜色3})) \\ &= \binom{n}{k}\left[p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}\right] < \frac{n^k}{3^{k-2}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + p_3^{\binom{k}{d+1}}\right) < 1 \end{aligned}$$

也成立，故此时 $p(X)>0$ 成立，事件 X 存在，即任意完全的 k -顶点超图没有单色的情况存在，所以

$$R_d(k,k,k)>\left(\frac{3^{k-2}}{p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+p_3^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$$ 。证毕。

我们现在再考虑一般的情形，即 k,l,m 有区分时的 $R_d(l,k,m)$ 的存在性的取值问题。我们考虑完全 n -顶点 d -一致超平面，它有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边，那么 $R_d(l,k,m)$ 满足的结论是：

定理 3.4 如果 $\binom{n}{l}p_1^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}p_2^{\binom{k}{d+1}}+\binom{n}{m}p_3^{\binom{m}{d+1}}<1$，则 $R_d(l,k,m)>n$ 。

证明：$R_d(l,k,m)$ 是这样的最小整数 n，对于 n 有以下结论成立。给完全 n -顶点 d -一致超平面的超边着颜色 1、颜色 2 和颜色 3，或者包含一个完全的 l -顶点颜色 1 的超图或者包含一个完全的 k -顶点颜色 2 的超图或者包含一个完全的 m -顶点颜色 3 的超图。完全 n -顶点 d -一致超平面有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边。我们设事件 X 表示任意完全的 l -顶点超图不是颜色 1 或者任意完全的 k -顶点超图不是颜色 2 或者任意完全的 m -顶点超图不是颜色 3 的情况，事件 X 若是存在的话，那么我们最终要求的 $R_d(l,k,m)$ 必然要大于我们求出的 n 的取值要求。我们继续考虑事件 X 的补事件 $\bar{X}$，$\bar{X}$ 表示至少有一个完全的 l -顶点超图是颜色 1 的且至少有一个完全的 k -顶点超图是颜色 2 的且至少有一个完全的 m -顶点超图是颜色 3 的情况，则：

$$\begin{aligned}p(\bar{X})=&\,p(\text{至少有一个完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的}\\&\quad\text{且至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的}\\&\quad\text{且至少有一个完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的})\\\le&\,p(\text{至少有一个完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的})\\&+p(\text{至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的})\\&+p(\text{至少有一个完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的})\\\le&\sum p(\text{完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的})\\&+\sum p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的})\\&+\sum p(\text{完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的})\end{aligned}$$

而完全的 l -顶点超图有 $\binom{l}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 1，而取颜色 1 的概率为 p_1，所以 $p(\text{完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的})=p_1^{\binom{l}{d+1}}$；同理完全的 k -顶点超图有 $\binom{k}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 2，而取颜色 2 的概率是 p_2，所以 $p(\text{完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的})=p_2^{\binom{k}{d+1}}$；完全的 m -顶点超图有 $\binom{m}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 3，而取颜色 3 的概率是 p_3，所以 $p(\text{完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的})=p_3^{\binom{m}{d+1}}$。而完全的 l -顶点超图是颜色 1 又有 $\binom{n}{l}$ 个，完全的 k -顶点超图是颜色 2 的又有 $\binom{n}{k}$ 个和完全的 m -顶点超图是颜色 3 的又有 $\binom{n}{m}$，所以：

上式 $=\binom{n}{l}p_1^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}p_2^{\binom{k}{d+1}}+\binom{n}{m}p_3^{\binom{m}{d+1}}$，故：

$$\begin{aligned}p\left(\bar{X}\right)&\le\sum p\left(\text{完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的}\right)\\&\quad+\sum p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的}\right)\\&\quad+\sum p\left(\text{完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的}\right)\\&=\binom{n}{l}p_1^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}p_2^{\binom{k}{d+1}}+\binom{n}{m}p_3^{\binom{m}{d+1}}\end{aligned}$$

又由已知条件知：

$$\binom{n}{l}p_1^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}p_2^{\binom{k}{d+1}}+\binom{n}{m}p_3^{\binom{m}{d+1}}<1$$

所以：

$$\begin{aligned}p\left(\bar{X}\right)&\le\sum p\left(\text{完全的}l\text{-顶点超图是颜色1的}\right)\\&\quad+\sum p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是颜色2的}\right)\\&\quad+\sum p\left(\text{完全的}m\text{-顶点超图是颜色3的}\right)\\&=\binom{n}{l}p_1^{\binom{l}{d+1}}+\binom{n}{k}p_2^{\binom{k}{d+1}}+\binom{n}{m}p_3^{\binom{m}{d+1}}<1\end{aligned}$$

故此时 $p(X)>0$ 成立，事件 X 存在，即任意完全的 l -顶点超图不是颜色 1 或者任意完全的 k -顶点超图不是颜色 2 或者任意完全的 m -顶点超图不是颜色 3 的情况存在，所以 $R_d(l,k,m)>n$ 。证毕。

3.3.不等概率 r-着色情况下的 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 问题

现在我们来考虑 r-着色相应的情形，此时 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$，对于 n 有以下结论成立。$R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 是这样的最小整数 n，对于 n 有以下结论成立。给完全 n -顶点 d -一致超平面的超边着颜色 1，颜色 2，…，颜色 r，或者包含一个完全的 k_1 -顶点颜色 1 的超图或者包含一个完全的 k_2 -顶点颜色 2 的超图，…，或者包含一个完全的 k_r -顶点颜色 r 的超图。

现考虑 $k_1=k_2=\cdots=k_r$ 时的 $R_d(k,k,\cdots,k)$ (有 r 个 k)的存在性的取值问题。我们考虑完全 n -顶点 d -一致超平面，它有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边，那么它的完全的 k -顶点超图满足的结论是：

定理 3.5 $R_d(k,k,\cdots,k)>\left(\dfrac{r^{k-r+1}}{p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$。

证明：我们设事件 X 表示任意完全的 k -顶点超图没有单色的情况，事件 X 若是存在的话，那么我们最终要求的 $R_d(k,k,\cdots,k)$ 必然要大于我们求出的 n 的取值要求。我们继续考虑事件 X 的补事件 $\bar{X}$， $\bar{X}$ 表示至少有一个完全的 k -顶点超图是单色的情况，则：

$$\begin{aligned}p\left(\bar{X}\right)&=p\left(\text{至少有一个完全的}k\text{-顶点超图是单色}\right)\\&\le\sum p\left(k\text{个顶点的完全子图是单色}\left(\text{颜色1或者颜色2},\cdots,\text{或颜色}r\right)\right)\end{aligned}$$

而完全的k-顶点超图有$\binom{k}{d+1}$条超边，要让这些超边都是单色，要么都是颜色1，要么都是颜色2，…，要么都是颜色r，而取颜色1的概率为p_1，取颜色2的概率为p_2，…，取颜色r的概率为p_r，所以$p\left(\text{完全的}k\text{-顶点超图是单色}\left(\text{颜色1或者颜色2},\cdots,\text{或颜色}r\right)\right)=p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}$，而完全的$k$-顶点超图是单色的总共又有$\binom{n}{k}$个，所以：

上式$=\binom{n}{k}\left(p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}\right)$，故：

$$
\begin{aligned}
p\left(\bar{X}\right)&\le\sum p\left(k\text{个顶点的完全子图是单色}\left(\text{颜色1或者颜色2},\cdots,\text{或颜色}r\right)\right)\\
&=\binom{n}{k}\left(p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}\right)\\
&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}\right)
\end{aligned}
$$

又由：

$$
\begin{aligned}
&\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}\right)\\
&<\frac{n^k}{k(k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}\right)\\
&<\frac{n^k}{r^{k-r+1}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}\right)
\end{aligned}
$$

我们让$\frac{n^k}{r^{k-r+1}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}\right)<1$，即让$n^k<\frac{r^{k-r+1}}{p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}}$，也即$n<\left(\frac{r^{k-r+1}}{p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$；所以$n<\left(\frac{r^{k-r+1}}{p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$时，$\frac{n^k}{r^{k-r+1}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}\right)<1$成立，

此时：

$$
\begin{aligned}
p\left(\bar{X}\right)&\le\sum p\left(k\text{个顶点的完全子图是单色}\left(\text{颜色1或者颜色2},\cdots,\text{或颜色}r\right)\right)\\
&=\binom{n}{k}\left(p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}\right)<\frac{n^k}{r^{k-r+1}}\cdot\left(p_1^{\binom{k}{d+1}}+p_2^{\binom{k}{d+1}}+\cdots+p_r^{\binom{k}{d+1}}\right)<1
\end{aligned}
$$

也成立，故此时$p(X)>0$成立，事件X存在，即任意完全的k-顶点超图没有单色的情况存在，所以

$R_d(k,k,\cdots,k) > \left(\dfrac{r^{k-r+1}}{p_1^{\binom{k}{d+1}} + p_2^{\binom{k}{d+1}} + \cdots + p_r^{\binom{k}{d+1}}}\right)^{\frac{1}{k}}$。证毕。

我们现在再考虑一般的情形，即 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 有区分时的 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 的存在性的取值问题。我们考虑完全 n-顶点 d-一致超平面，它有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边，那么 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 满足的结论是：

定理 3.6 如果 $\binom{n}{k_1}p_1^{\binom{k_1}{d+1}} + \binom{n}{k_2}p_2^{\binom{k_2}{d+1}} + \cdots + \binom{n}{k_r}p_r^{\binom{k_r}{d+1}} < 1$，则 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r) > n$。

证明：$R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 是这样的最小整数 n，对于 n 有以下结论成立。给完全 n-顶点 d-一致超平面的超边着颜色 1，颜色 2，⋯，颜色 r，或者包含一个完全的 k_1-顶点颜色 1 的超图或者包含一个完全的 k_2-顶点颜色 2 的超图，⋯，或者包含一个完全的 k_r-顶点颜色 r 的超图。完全 n-顶点 d-一致超平面有 $\binom{n}{d+1}$ 个超边。我们设事件 X 表示任意完全的 k_1-顶点超图不是颜色 1 或者任意完全的 k_2-顶点超图不是颜色 2，⋯，或者任意完全的 k_r-顶点超图不是颜色 r 的情况，事件 X 若是存在的话，那么我们最终要求的 $R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ 必然要大于我们求出的 n 的取值要求。我们继续考虑事件 X 的补事件 $\bar{X}$，$\bar{X}$ 表示至少有一个完全的 k_1-顶点超图是颜色 1 的且至少有一个完全的 k_2-顶点超图是颜色 2 的，⋯，且至少有一个完全的 k_r-顶点超图是颜色 r 的情况，则：

$$\begin{aligned}
p(\bar{X}) = {} & p(\text{至少有一个完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的} \\
& \quad \text{且至少有一个完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的,} \\
& \quad \cdots,\text{且至少有一个完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的}) \\
\le {} & p(\text{至少有一个完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的}) \\
& + p(\text{至少有一个完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的}) + \cdots \\
& + p(\text{至少有一个完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的}) \\
\le {} & \sum p(\text{完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的}) \\
& + \sum p(\text{完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的}) + \cdots \\
& + \sum p(\text{完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的})
\end{aligned}$$

而完全的 k_1-顶点超图有 $\binom{k_1}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 1，而取颜色 1 的概率为 p_1，所以 $p(\text{完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的}) = p_1^{\binom{k_1}{d+1}}$；同理完全的 k_2-顶点超图有 $\binom{k_2}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 2，而取颜色 2 的概率是 p_2，所以 $p(\text{完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的}) = p_2^{\binom{k_2}{d+1}}$；⋯；完全的 k_r-顶点超图有 $\binom{k_r}{d+1}$ 条超边，要让这些超边都是颜色 r，而取颜色 r 的概率是 p_r，所以 $p(\text{完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的}) = p_r^{\binom{k_r}{d+1}}$。而完全的 k_1-顶点超图是颜色 1 又有 $\binom{n}{k_1}$ 个，完全的 k_2-顶点超图是颜色 2 的又有 $\binom{n}{k_2}$ 个，⋯，完全的 k_r-顶点超图是颜色 r 的又有 $\binom{n}{k_r}$，所以：

上式$=\binom{n}{k_1}p_1^{\binom{k_1}{d+1}}+\binom{n}{k_2}p_2^{\binom{k_2}{d+1}}+\cdots+\binom{n}{k_r}p_r^{\binom{k_r}{d+1}}$，故：

$$\begin{aligned}p\left(\bar{X}\right)&\le\sum p\left(\text{完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的}\right)\\&\quad+\sum p\left(\text{完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的}\right)+\cdots\\&\quad+\sum p\left(\text{完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的}\right)\\&=\binom{n}{k_1}p_1^{\binom{k_1}{d+1}}+\binom{n}{k_2}p_2^{\binom{k_2}{d+1}}+\cdots+\binom{n}{k_r}p_r^{\binom{k_r}{d+1}}\end{aligned}$$

又由已知条件知：

$$\binom{n}{k_1}p_1^{\binom{k_1}{d+1}}+\binom{n}{k_2}p_2^{\binom{k_2}{d+1}}+\cdots+\binom{n}{k_r}p_r^{\binom{k_r}{d+1}}<1$$

所以：

$$\begin{aligned}p\left(\bar{X}\right)&\le\sum p\left(\text{完全的}k_1\text{-顶点超图是颜色1的}\right)\\&\quad+\sum p\left(\text{完全的}k_2\text{-顶点超图是颜色2的}\right)+\cdots\\&\quad+\sum p\left(\text{完全的}k_r\text{-顶点超图是颜色}r\text{的}\right)\\&=\binom{n}{k_1}p_1^{\binom{k_1}{d+1}}+\binom{n}{k_2}p_2^{\binom{k_2}{d+1}}+\cdots+\binom{n}{k_r}p_r^{\binom{k_r}{d+1}}<1\end{aligned}$$

故此时$p(X)>0$成立，事件X存在，即任意完全的k_1-顶点超图不是颜色 1 或者任意完全的k_2-顶点超图不是颜色 2，…，或者任意完全的k_r-顶点超图不是颜色r的情况存在，所以$R_d(k_1,k_2,\cdots,k_r)>n$。证毕。

致　谢

阴东升副教授在本文的选题和本文的方法方面给予了很大的指导和帮助，本人在此表示深深地感激之情。同时也感谢《理论数学》各位老师对本文提出的宝贵建议。

参考文献 (References)

[1] Bona, M. (2011) A walk through combinatorics. World Scientific, Hackensack. http://dx.doi.org/10.1142/8027

[2] Erdös, P. (1947) Some remarks on the theory of graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **53**, 292-294.

[3] Spencer, J. (1994) Ten lectures on the probabilistic method. 2nd Edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611970074

[4] Erdös, P. and Spencer, J. (1974) Probabilistic methods in combinatorics. Academic Press, Waltham.

[5] Linial, N. and Morgenstern, A. (2013) On high-dimensional acyclic tournaments. arXiv:1302.1684v1[math.CO].