Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(6), 255-258
Published Online November 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.56036

Study on the Solvability of Matrix Equation $AX + X^{\mathrm{T}}B = C$

Linlin Zhao, Jinchan Wang

Department of Mathematics, Dezhou University, Dezhou Shandong
Email: zhaolinlin0635@163.com

Received: Oct. 16th, 2015; accepted: Nov. 2nd, 2015; published: Nov. 6th, 2015

Abstract

The problem of the solvability for the matrix equation $AX + X^{\mathrm{T}}B = C$ is studied by using the matrix decomposition and its Moore-Penrose generalized inverse. Some solvability conditions are obtained and the general expression of its solution is given.

Keywords

Matrix Equation, Solvability, Generalized Inverse

矩阵方程$AX + X^{\mathrm{T}}B = C$的解

赵琳琳，王金婵

德州学院数学科学学院，山东 德州
Email: zhaolinlin0635@163.com

收稿日期：2015年10月16日；录用日期：2015年11月2日；发布日期：2015年11月6日

摘　要

利用矩阵分解，结合矩阵广义逆理论，研究了矩阵方程$AX + X^{\mathrm{T}}B = C$有解的条件，得到了方程有解时解的一般表达式。

文章引用: 赵琳琳, 王金婵. 矩阵方程 $AX + X^{\mathrm{T}}B = C$ 的解[J]. 理论数学, 2015, 5(6): 255-258.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.56036

关键词

矩阵方程，可解性，广义逆

1. 引言

令 $C^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 复矩阵的集合。符号 A^{T}，$A^{\dagger}$，$\mathrm{rank}(A)$ 分别表示矩阵 A 的转置，Moore-Penrose 逆和秩。矩阵方程 $AX+X^{\mathrm{T}}B=C$ 在观察器设计、带有输入约束的控制系统和故障检验等领域中有着广泛的应用。对于上述方程，文献[1]利用矩阵的广义逆给出了 $\boldsymbol{C}$ 为复对称矩阵时它可解的条件；文献[2]利用正则矩阵束得到了它唯一可解的条件；文献[3]研究了方程 $XA+AX^{\mathrm{T}}=0$ 的一般解；文献[4]讨论了算子方程 $AX+X^{*}B=C$ 的可解性质。本文将利用矩阵分解及其广义逆讨论矩阵方程 $AX+X^{\mathrm{T}}B=C$ 的一般可解性及解的表达式。

2. 主要结果

本文以下所有讨论中符号 I 表示适当阶数的单位矩阵，下面我们首先给出两个引理。

引理 2.1 [5]：设 $A\in C^{n\times m},B\in C^{m\times m}$。则方程 $A^{\mathrm{T}}X\pm X^{\mathrm{T}}A=B$ 有解当且仅当

$$B^{\mathrm{T}}=\pm B，\ \left(I-A^{\dagger}A\right)^{\mathrm{T}}B\left(I-A^{\dagger}A\right)=0$$

且其一般解可表示为

$$X=\frac{1}{2}\left(A^{\dagger}\right)^{\mathrm{T}}BA^{\dagger}A+\left(A^{\dagger}\right)^{\mathrm{T}}B\left(I-A^{\dagger}A\right)+\left(I-AA^{\dagger}\right)^{\mathrm{T}}Y+\left(AA^{\dagger}\right)^{\mathrm{T}}ZA$$

其中 $Y\in C^{m\times m}$ 为任意矩阵，Z 满足 $\left(P_2^{\mathrm{T}}ZP_2\right)^{\mathrm{T}}=\mp P_2^{\mathrm{T}}ZP_2$，这里 $P_2=AA^{\dagger}$。

引理 2.2 [6]：设 $A\in C^{n\times m}$，$B\in C^{n\times p}$。则方程 $AX=B$ 有解当且仅当 $\left(I-AA^{\dagger}\right)B=0$，且其一般解可表示为 $X=A^{\dagger}B+\left(I-A^{\dagger}A\right)Y$，其中 $Y\in C^{m\times p}$ 为任意矩阵。

定理 2.1: 设 $A\in C^{m\times n}$，$B\in C^{n\times m}$，$C\in C^{m\times m}$。令 $\tilde{A}=\begin{pmatrix}A+B^{\mathrm{T}}\\A-B^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$。若 $\tilde{A}$ 是行满秩的，则方程 $AX+X^{\mathrm{T}}B=C$ 可解，并且 X 可表示为

$$X=\tilde{A}^{\dagger}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(C+C^{\mathrm{T}}\right)+Z_1\\\frac{1}{2}\left(C-C^{\mathrm{T}}\right)+Z_2\end{pmatrix}+\left(I-\tilde{A}^{\dagger}\tilde{A}\right)Y \tag{1}$$

其中 Z_1,Z_2 为任意矩阵并满足 $Z_1=-Z_1^{\mathrm{T}}$，$Z_2=Z_2^{\mathrm{T}}$，$Y\in C^{n\times m}$ 为任意矩阵。

证明:方程 $AX+X^{\mathrm{T}}B=C$ 等价于

$$B^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}$$

由方程 $AX+X^{\mathrm{T}}B=C$ 和上述方程可得，

$$\left(A+B^{T}\right)X+X^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}+B\right)=C+C^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$$\left(A-B^{\mathrm{T}}\right)X-X^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}-B\right)=C-C^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

方程 $AX+X^{\mathrm{T}}B=C$ 有解等价于方程(2)和(3)有公共解。由引理 2.1 可得，

$$\left(A+B^{\mathrm{T}}\right)X=\frac{1}{2}\left(C+C^{\mathrm{T}}\right)+Z_1，\ 其中\ Z_1=-Z_1^{\mathrm{T}}$$

$$\left(A-B^{\mathrm{T}}\right)X=\frac{1}{2}\left(C-C^{\mathrm{T}}\right)+Z_2\text{，其中 }Z_2=Z_2^{\mathrm{T}}$$

由以上两方程得，

$$\begin{pmatrix} A+B^{\mathrm{T}} \\ A-B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(C+C^{\mathrm{T}}\right)+Z_1 \\ \frac{1}{2}\left(C-C^{\mathrm{T}}\right)+Z_2 \end{pmatrix}$$

由引理 2.2，若 $\tilde{A}$ 是行满秩的，则方程 $AX+X^{\mathrm{T}}B=C$ 可解，并且 X 可由(1)式表示。

定理 2.2： 设 $A\in C^{m\times n}$， $B\in C^{n\times m}$， $C\in C^{m\times m}$ 。若 $C=C^{\mathrm{T}}$，则方程 $AX+X^{\mathrm{T}}B=C$ 可解的充要条件是存在矩阵 Z_1,Z_2 满足 $Z_1=-Z_1^{\mathrm{T}}$， $Z_2=Z_2^{\mathrm{T}}$ 使得

$$\left(I-\tilde{A}\tilde{A}^{\dagger}\right)\begin{pmatrix} C+Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}=0$$

且它的一般解可表示为

$$X=\tilde{A}^{\dagger}\begin{pmatrix} C+Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}+\left(I-\tilde{A}^{\dagger}\tilde{A}\right)Y$$

其中 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} A+B^{\mathrm{T}} \\ A-B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$， $Y\in C^{n\times m}$ 为任意矩阵。

证明: 由定理 2.1 和引理 2.2 易证。

在实践中经常会遇到定束，定义为：若 $A=A^{\mathrm{T}}$， $B=B^{\mathrm{T}}$ 且 B 为正定矩阵，则称 $A+\lambda B^{\mathrm{T}}$ 为定束。对于 n 阶矩阵 A,B 满足 $A=A^{\mathrm{T}}$， $B=B^{\mathrm{T}}$， 由文献([6], p. 152)可知存在非奇异实矩阵 P 使得

$$P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right) \tag{4}$$

$$P^{\mathrm{T}}BP=\mathrm{diag}\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right) \tag{5}$$

由上述性质可得方程 $AX+X^{\mathrm{T}}B=C$ 可解的另一条件。

定理 2.3： 设 $A+\lambda B^{\mathrm{T}}$ 为定束，其中 A,B 均为 n 阶矩阵，则方程 $AX+X^{\mathrm{T}}B=C$ 可解当且仅当

$$\alpha_i+\beta_i\neq 0\text{ 且 }\alpha_i\alpha_j-\beta_i\beta_j\neq 0\text{，}\quad\forall i,j=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

若令 $P^{\mathrm{T}}CP=D=\left(d_{ij}\right)$，则其一般解可表示为

$$X=PYP^{-1} \tag{7}$$

这里 $Y=\left(y_{ij}\right)$， $y_{ij}=\dfrac{\alpha_j d_{ij}-\beta_j d_{ji}}{\alpha_i\alpha_j-\beta_i\beta_j}$， $\forall i,j=1,2,\cdots,n$ 。

证明： 由(4)和(5)式可得，方程 $AX+X^{\mathrm{T}}B=C$ 等价于

$$\left(P^{\mathrm{T}}AP\right)\left(P^{-1}XP\right)+\left(P^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}P^{-\mathrm{T}}\right)\left(P^{\mathrm{T}}BP\right)=P^{\mathrm{T}}CP$$

令 $Y=P^{-1}XP=\left(y_{ij}\right)$， $D=P^{\mathrm{T}}CP=\left(d_{ij}\right)$。则

$$\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Y+Y^{T}\ \mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=D$$

上面的方程可分解为如下的 n 个方程

$$\left(\alpha_i+\beta_i\right)y_{ii}=d_{ii},\ i=1,2,\cdots,n,$$

和如下的 $n\left(n-1\right)/2$ 个二阶系统

$$\alpha_i y_{ij} + \beta_j y_{ji} = d_{ij}，\ \beta_i y_{ij} + \alpha_j y_{ji} = d_{ji}，\ i \neq j$$

由上面的方程可得当(6)式成立时，方程有解且解可由(7)式表示。

3. 结论

通过矩阵分解及其广义逆，研究了矩阵方程 $AX + X^{\mathrm{T}}B = C$ 的可解性,得到了若干可解的条件和解的一般表达式。

基金项目

山东省高等学校科研发展计划项目(J13LI53)。

参考文献 (References)

[1] Piao, F.X., Zhang, Q.L. and Wang, Z.F. (2007) The Solution to Matrix Equation $AX + X^{\mathrm{T}}B = C$. *Journal of the Franklin Institute*, **344**, 1056-1062. http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2007.05.002

[2] Ikramov, K. (2010) Conditions for Unique Solvability of the Matrix Equation $AX + X^{\mathrm{T}}B = C$. *Doklady Mathematics*, **81**, 63-65. http://dx.doi.org/10.1134/S1064562410010187

[3] Teran, F. and Dopico, F. (2011) The Solution of the Equation $XA + AX^{\mathrm{T}} = 0$ and Its Applications to the Theory of Orbits. *Linear Algebra and Its Applications*, **434**, 44-67. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2010.08.005

[4] Braden, H. (1998) The Equation $A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A = B$. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **20**, 295-302. http://dx.doi.org/10.1137/S0895479897323270

[5] Ben-Israel, A. and Greville, T.N.E. (2003) Generelized Inverse Theory and Applications. 2nd Edition, Springer, Berlin.

[6] 赵琳琳. 算子方程 $AX + X^{*}B = C$ 的解[J]. 纯粹数学与应用数学, 2012, 28(4): 469-474.