Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(1), 65-71
Published Online January 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61010

RKM and ADM Decomposition Method for Solving a Class of Two-Order Integral-Differential Equations

Xuejiao Lian, Xueqin Lv

Harbin Normal University, Harbin Heilongjiang
Email: 534628902@qq.com

Received: Jan. 6th, 2016; accepted: Jan. 25th, 2016; published: Jan. 29th, 2016

Abstract

In this paper, we use RKM and ADM decomposition method to solve a class of second-order boundary value problems for integral-differential equations. This method avoids the series solution of the equation with unknown parameters. At the same time, the problem of convergence analysis is also given in this paper. Additionally, some numerical examples are presented to demonstrate the rationality of this algorithm.

Keywords

Two-Order Integral-Differential Equations, Reproducing Kernel Method, ADM Decomposition Method, Convergence Analysis

应用RKM和ADM分解方法解一类二阶积分微分方程

廉雪娇，吕学琴

哈尔滨师范大学，黑龙江 哈尔滨
Email: 534628902@qq.com

收稿日期：2016年1月6日；录用日期：2016年1月25日；发布日期：2016年1月29日

文章引用：廉雪娇，吕学琴．应用 RKM 和 ADM 分解方法解一类二阶积分微分方程[J]．理论数学，2016，6(1)：65-71. http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.61010

摘　要

本文应用RKM和ADM分解方法求解一类二阶带有边值条件的积分微分方程，此方法避免了求解带有未知参数的非线性方程组，同时给出了收敛性分析，并且用算例加以证明方法的有效性。

关键词

二阶积分微分方程，再生核方法，ADM分解方法，收敛性分析

1. 引言

非线性积分微分方程在许多科学领域有着广泛的应用，因此引起了众多学者的广泛研究，例如物理中的在多孔催化剂颗作用下的传热和传质参见文献[1]，生物中细胞中的氧扩散[2]等，其中，带有初边值条件的积分微分方程更是学者研究非线性积分微分方程的热点之一，参见文献[3] [4]。

在本文中我们将运用 RKM 和 ADM 分解方法相结合来求解下面的带有边值条件的积分微分方程，如下

$$\begin{cases} u''(x) = g(x) + \int_0^x k(x,t) f(t,u(t))\mathrm{d}t, \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $g(x) \in C[0,1]$，$x \in [0,1]$，$k(x,t) \in C[0,1]$，并且 $f(t,u(t)) \in C\{[0,1] \times R\}$ 是非线性项，且满足 Lipschitz 条件，即存在常数 l，使得

$$|f(t,u) - f(t,z)| \le l|u - z|。 \tag{1.2}$$

方程(1.1)也可以通过齐次化过程改写为

$$\begin{cases} \overline{u}''(x) = g(x) + \int_0^x k(x,t) f(t,\overline{u}(t))\mathrm{d}t, \quad x \in [0,1] \\ \overline{u}(0) = 0, \overline{u}(0) = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\overline{u}(x) = u(x) - (u(1) - u(0))x - u(0)$，所以方程(1.1)等价于方程(1.3)，因此为了方便叙述，在下面的章节中我们将讨论方程(1.3)，并且仍然用 $u(x)$ 代替 $\overline{u}(x)$。

近些年来，对于(1.3)的形式研究很是广泛，例如

根据 ADM 方法，问题(1.1)可以被写成如下的算子方程形式

$$Lu(x) = g(x) + Nu(x), \quad x \in I. \tag{1.4}$$

其中 $L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 是二阶线性算子，$g(x)$ 是源点函数，$Nu(x) = \int_0^x k(x,t) f(t,u(t))\mathrm{d}t$ 是一个非线性算子。

L 的逆算子定义为

$$L^{-1}[\cdot] = \int_0^x \int_0^k [\cdot]\mathrm{d}s\mathrm{d}k, \tag{1.5}$$

将 $L^{-1}[\cdot]$ 作用在(1.4)的两边，并且用用条件 $u(0) = 0$，我们可以得到

$$u(x) = xc + L^{-1}[g(x)] + L^{-1}[N(u(x))], \tag{1.6}$$

其中 $c = u'(0)$ 是一个需要求解的未知参数。

接下来根据 ADM 分解方法，将解 $u(x)$ 和非线性项 $f(t,u(x))$ 分别分解为

$$u(x)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j(x),\ \ f(t,u)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j, \tag{1.7}$$

其中 A_j 可以通过使用 Adomian 多项式得到，多项式的表达式为

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\left[f\left(t,\sum_{k=0}^{\infty}u_k\lambda^k\right)\right]_{\lambda=0},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{1.8}$$

将(1.7)代入(1.6)中，得到

$$\sum_{j=0}^{\infty}u_j(x)=xc+L^{-1}\left[g(x)\right]+L^{-1}\left[\int_0^x k(x,t)\left(\sum_{j=0}^{\infty}A_j\right)\mathrm{d}t\right]. \tag{1.9}$$

比较(1.9)等式的两边，有

$$\begin{cases}u_0(x,c)=xc+L^{-1}\left[g(x)\right],\\ u_j(x,c)=L^{-1}\left[\int_0^x k(x,t)A_{j-1}\mathrm{d}t\right],\quad j=1,2,\cdots\end{cases} \tag{1.10}$$

则(1.3)的解可以表示为

$$\phi_n(x,c)=\sum_{j=0}^{n}u_j(x,c). \tag{1.11}$$

这里级数解 $\phi_n(x,c)$ 是依赖未知参数 c 的，所以本文为了避免求解带有未知参数 c 的方程组带来的大量的运算，采用了以下方法的运算形式。

2. 新的方法

在这一节中我们首先考虑如下的线性边值问题

$$\begin{cases}u''(x)=g(x);\\ u(0)=0,\ \ u(1)=0.\end{cases} \tag{2.1}$$

此时(2.1)的解可以通过用再生核方法求解，令

$$\begin{cases}Lu(x)=g(x);\\ u(0)=0,\ \ u(1)=0.\end{cases} \tag{2.2}$$

由前面的章节可知(2.1)和(2.2)是等价的，为了应用再生核求解方程(2.2)，需要创建一个满足边值条件的再生核空间 $W_2^3[0,1]$。

定义 2.1 $W_2^3[0,1]=\left\{u\,|\,u''\text{是绝对连续实值函数}, u^{(3)}\in L^2[0,1], u(0)=u(1)=0, x\in[0,1]\right\}$ 并且内积和范数分别为

$$\begin{aligned}&\left\langle u(x),v(x)\right\rangle_{W_2^3}=\int_0^1\left(uv+3u'v'+3u''v''+u'''v'''\right)\mathrm{d}x,\ \ u,v\in W_2^3\\ &\|u\|_{W_2^3}=\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

定理 2.2 $W_2^3[0,1]$ 是再生核空间，即存在一个函数 $R_x(y)$，对于每一个固定的 $x\in[0,1]$，$R_x(y)\in W_2^3[0,1]$，并且对于任意的 $u(y)\in W_2^3[0,1]$，且

$\left\langle u(y),R_x(y)\right\rangle_{W_2^3}=u(x)$，再生核 $R_x(y)$ 定义为

$$R_x(y)=\begin{cases}c_1\mathrm{e}^{-y}+c_2\mathrm{e}^{y}+c_3y\mathrm{e}^{-y}+c_4y\mathrm{e}^{y}+c_5y^2\mathrm{e}^{-y}+c_6y^2\mathrm{e}^{y}, & x<y;\\ d_1\mathrm{e}^{-y}+d_2\mathrm{e}^{y}+d_3y\mathrm{e}^{-y}+d_4y\mathrm{e}^{y}+d_5y^2\mathrm{e}^{-y}+d_6y^2\mathrm{e}^{y}, & x>y,\end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $c_i,d_i\ (i=1,2,3,4,5,6)$ 是待定系数。

定理 2.3 $W_2^3[0,1]=\{u(x)\,|\,u(x)\text{是}[0,1]\text{绝对连续实值函数},u'(x)\in L^2[0,1],x\in[0,1]\}$，同时内积和范数分别定义为

$$\langle u(x),v(x)\rangle_{W_2^1}=u(0)v(0)+\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x,\ \ \|u\|=\langle u,u\rangle_{W_2^1}. \tag{2.5}$$

此时存在唯一的再生核函数 $Q_x(y)\in W_2^1[0,1]$ 并且

$$Q_x(y)=\begin{cases}1+y, & x<y,\\ 1+x, & x>y.\end{cases} \tag{2.6}$$

其中定理 2.2 和定理 2.3 的证明详见文献[5]。

对于方程(1.3)，如果 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上是稠密的，令 $\varphi_x(y)=L^*Q_x(y)$，进而有 $\varphi_i(x)\triangleq\varphi_{x_i}(x)$，其中 L^* 是 L 的共轭算子，即

$$\varphi_i(x)=\varphi_{x_i}(x)=L^*Q_{x_i}(x) \tag{2.7}$$

引理 2.4 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $W_2^3[0,1]$ 中的完全系，通过施密特标准正交化过程得到 $W_2^3[0,1]$ 中的正交系 $\{\overline{\varphi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$。

$$\overline{\varphi}(x)=\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\varphi_k(x);\ \ (\beta_{ii}>0,i=1,2,\cdots) \tag{2.8}$$

其中 β_{ik} 是正交化系数。

定理 2.5 如果 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 是稠密的，则(2.2)的解可以表示为

$$u(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}g(x_k)\overline{\varphi}_i(x)=u_0(x). \tag{2.9}$$

引理 2.4 和定理 2.5 的证明详见文献[6]。

引理 2.6 若令 $u_0(x)=xc+L^{-1}[g(x)]$，即 $u_0(x)$ 也就是(1.6)等式的右端的线性部分，则(1.6)的等价形式可以写成

$$u(x)=u_0(x)+L^{-1}[N(u(x))]. \tag{2.10}$$

其中 $N(u(x))=\int_0^x k(x,t)f(t,u(x))\mathrm{d}t.$

证明 将(2.10)的两边求两阶导数，得到

$$u''(x)=\left[u_0(x)+L^{-1}[N(u(x))]\right]''=u_0''(x)+\left[L^{-1}[N(u(x))]\right]'', \tag{2.11}$$

由上一节知道

$$u_0''(x)=g(x), \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\left[L^{-1}[N(u(x))]\right]''&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left[\int_0^x\int_0^k N(u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}k\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left[\int_0^x F(k)\mathrm{d}k\right]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x N(u(s))\mathrm{d}s=N(u(x)),\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中 $F(k)=\int_0^k N(u(s))\mathrm{d}s$，将(2.12)和(2.13)代入到(2.11)，得到

$$u''(x)=g(x)+N(u(x)).$$

现在方程(1.3)可以写成它的等价形式并使用 ADM 方法可以得到

$$\begin{cases} u(x)=u_0(x)+L^{-1}\left[f(x,u)\right]; \\ u(0)=0,\ u(1)=0. \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\sum_{j=0}^{n} u_j(x)=u_0(x)+L^{-1}\left[\sum_{j=0}^{\infty} A_j\right] \tag{2.15}$$

比较(2.15)等式的左右两边，可以得到

$$\begin{cases} u_0(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}g(x_k)\overline{\varphi_i}(x) \\ u_j(x)=L^{-1}\left[A_{j-1}\right],\ j=1,2,\cdots \\ A_n=\dfrac{1}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\left[f\left(t,\sum_{k=0}^{\infty}u_k\lambda^k\right)\right]_{\lambda=0},\ n=0,1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{2.16}$$

(2.16)给出了方程(1.3)的最终形式，n 次截断得到的级数解为

$$\psi_n(x)=\sum_{j=0}^{n}u_j(x)。 \tag{2.17}$$

3. 收敛性分析

定理 3.1 若非线性方程中的 $f(t,u)$ 满足 Lipschitz 条件(1.2)，并且有 $\delta=\dfrac{lM}{6\sqrt{3}}$，若 $\delta<1$，$\|u_1\|<\infty$，$k(x,t)\in C([0,1]\times[0,1])$，并且 $M=|k(x,t)|$。则级数解 $\psi_n=\sum_{j=0}^{n}u_j$ 即为(1.3)的解，其中 $u_0,u_1,u_2,\cdots$ 是由(2.16)得到的。

证明 由(2.17)得到

$$\begin{aligned}\psi_n&=u_0+\sum_{j=1}^{n}u_j=u_0+\sum_{j=1}^{n}L^{-1}\left[\int_0^x k(x,t)A_{j-1}\mathrm{d}t\right]\\&=u_0+L^{-1}\left[\int_0^x k(x,t)\sum_{j=0}^{n-1}\left[A_{j-1}\right]\mathrm{d}t\right]\end{aligned} \tag{3.1}$$

易知 $\sum_{j=0}^{n}A_j\le f(t,u)$，得到

$$\psi_n\le u_0+L^{-1}\left[\int_0^x k(x,t)f(t,u(x))\mathrm{d}t\right]。 \tag{3.2}$$

对于任意的 u,u^*，考虑

$$\left\|u-u^*\right\|=\left\|u_0-u_0^*+L^{-1}\left[f(t,u)-f(t,u^*)\right]\right\|, \tag{3.3}$$

f 满足 Lipschitz 条件，并且 $\left\|u-u^*\right\|\to 0$，得到

$$\left\|u-u^*\right\|\le\left\|L^{-1}\left[l\left|u-u^*\right|\right]\right\|\le\delta\left\|u-u^*\right\|, \tag{3.4}$$

由上式，得到

$$\|\psi_{n+1}-\psi_n\|\le\delta\|\psi_n-\psi_{n-1}\|\le\delta^2\|\psi_{n-1}-\psi_{n-2}\|\le\cdots\le\delta^n\|\psi_1-\psi_0\|, \tag{3.5}$$

对于任意的 $n,m\in N$， $n>m$， 有

$$\begin{aligned}\|\psi_n-\psi_m\|&=\|(\psi_n-\psi_{n-1})+(\psi_{n-1}-\psi_{n-2})+\cdots+(\psi_{m+1}-\psi_m)\|\\&\le\|\psi_n-\psi_{n-1}\|+\|\psi_{n-1}-\psi_{n-2}\|+\cdots+\|\psi_{m+1}-\psi_m\|\\&\le\delta^m\left(\frac{1-\delta^{n-m}}{1-\delta}\right)\|u_1\|,\end{aligned} \tag{3.6}$$

因为 $\delta<1$，所以 $1-\delta^{n-m}<1$，并且 $\|u_1\|<\infty$，则

$$\|\psi_n-\psi_m\|\le\frac{\delta^m}{1-\delta}\|u_1\|\to 0, \tag{3.7}$$

此时存在 ψ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n=\psi$，因此我们有 $u=\sum\limits_{j=0}^{\infty}u_j$，即 $u=\psi$。证毕。

4. 数值算例

下面考虑如下模型：

$$\begin{cases}u''(x)=g(x)+\int_0^x \mathrm{e}^{-t}u^2(t)\,\mathrm{d}t, & x\in[0,1]\\ u(0)=1, u(1)=\mathrm{e},\end{cases} \tag{4.1}$$

真解 $u(x)=\mathrm{e}^x$，$g(x)=1$，现在我们应用本文的方法，先将上述模型齐次化，令 $\bar{u}(x)=\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}-1)x-1$，则方程组等价于

$$\begin{cases}\bar{u}''=\bar{g}(x)+\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(u(t)+(\mathrm{e}-1)t+1\right)^2\mathrm{d}t, & x\in[0,1]\\ \bar{u}(0)=0,\ \bar{u}(0)=0,\end{cases} \tag{4.2}$$

其中 $\bar{g}(x)=1+\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(2u(x)(\mathrm{e}-1)t-1\right)\mathrm{d}t$，此时真解为 $u(x)=\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}-1)x-1$。

在 $[0,1]$ 上选择 6 个节点进行计算。

为了展示提出新的方法的准确性和有效性，因此定义了如下绝对误差函数

$$e_n(x)=|\psi_n(x)-u(x)|,\quad n=1,2,\cdots \tag{4.3}$$

其中 $u(x)$ 是真解，$\psi_n(x)$ 是用新方法得到的 n 次截断级数解，下面表 1 中将给出文献[7]中应用新方法得到的绝对误差 $|\psi_n(x)-u(x)|$ 和用改进后的 ADM 方法给出的绝对误差 $|\phi_n(x)-u(x)|$ 之间的比较，结果如下表 1。

Table 1. Comparison of the absolute error of Example 4.1 by using new method and modified ADM decomposition method in the paper [7]
表 1. 模型(4.1)中用新方法和改进的 ADM 分解方法得到的绝对误差比较[7]

节点	x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
新的方法	$\|\psi_n-u\|$	0.0000E−00	2.2387E−05	7.1053E−05	3.8104E−04	1.0335E−03
改进的 ADM 方法	$\|\phi_n-u\|$	0.0000E−00	2.5646E−02	6.0235E−02	8.9728E−02	5.6922E−02

5. 结论

本文主要阐述了应用 RKM 方法和 ADM 方法求解一类带有边值问题的积分微分方程，此方法主要优点是避免了求解带有未知参数的方程组，节省了一定的计算量，并且文中给出了收敛性分析和算例，用来佐证方法的有效性。

参考文献 (References)

[1] Rach, R.C., Duan, J.S. and Wazwaz, A.M. (2014) Solving Cupled Lane-Emden Boundary Value Problems in Catalytic Diffusion by the Adomian Decomposition Method. *Journal of Mathematical Chemistry*, **52**, 255-267. http://dx.doi.org/10.1007/s10910-013-0260-6

[2] Lima, P.M. and Morgado, L. (2010) Numerical Modeling of Oxygen Diffusion in Cells with Michaelis-Menten Up-Take Kinetics. *Journal of Mathematical Chemistry*, **48**, 145-158. http://dx.doi.org/10.1007/s10910-009-9646-x

[3] Maleknejad, K., Khalisaraye, I.N. and Alizadeh, M. (2014) On the Solution of the Integro-Differential Equation with an Integral Boundary Condition. *Numerical Algorithms*, **65**, 355-374. http://dx.doi.org/10.1007/s11075-013-9709-8

[4] Yao, H. (2010) New Algorithm for the Numerical Solution of the Integro-Differential Equation with an Integral Boundary Condition. *Numerical Algorithms*, **47**, 1054-1067.

[5] Cui, M. and Lin, Y. (2008) Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space. Nova Science Publisher, New York.

[6] Lv, X. and Shi, S. (2012) The Combined RKM and ADM for Solving Nonlinear Weakly Singular Volterra Integral-Differential Equations. *Abstract and Applied Analysis*, **2012**, Article ID: 258067.

[7] Singh, R., Nelakanti, G. and Kumar, J. (2014) A New Efficient Technique for Solving Two-Point Boundary Value Problems for Integro-Differential Equations. *Journal of Mathematical Chemistry*, **52**, 2030-2051. http://dx.doi.org/10.1007/s10910-014-0363-8