

# From Boolean Logic to Fuzzy Logic

Tianyu Gan

The 3rd Middle School of Xuzhou, Xuzhou Jiangsu  
Email: gantianyu\_xz@163.com

Received: Mar. 8<sup>th</sup>, 2016; accepted: Mar. 22<sup>nd</sup>, 2016; published: Mar. 29<sup>th</sup>, 2016

Copyright © 2016 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

Fuzzy mathematics is one of the most important theoretical bases of Artificial Intelligence. Fuzzy logic is the bridge which connects between the theory and application. It is very important to understand and grasp the spirit of fuzzy logic correctly. Starting from the well-known two-valued logic, this paper compares the concept, inference and application of fuzzy logic to those of two-valued logic. It will be helpful to understand and grasp the spirit of fuzzy mathematics.

## Keywords

Fuzzy Inference; Fuzzy Set; Fuzzy Logic; Boolean Logic

---

# 从布尔逻辑到模糊逻辑

甘天宇

徐州市第三中学, 徐州 江苏  
Email: gantianyu\_xz@163.com

收稿日期: 2016年3月8日; 录用日期: 2016年3月22日; 发布日期: 2016年3月29日

---

## 摘要

模糊数学是人工智能的理论基础之一, 模糊逻辑是理论与应用的桥梁。正确理解和掌握模糊逻辑的概念意义重大。本文从人们熟悉的二值逻辑出发, 从概念、推理方法和应用方面分析并对比了模糊逻辑与二值逻辑、多值逻辑的差别与联系, 对于学习模糊数学具有启发和帮助。

## 关键词

模糊推理, 模糊集合, 模糊逻辑, 二值逻辑

## 1. 引言

任何一门学科都必须明确研究的范围。为了确定这个范畴, 数学研究从集合开始入手。最大的集合称为全集, 也叫论域。所谓论域, 就是研究对象的全体构成的集合。对于论域中的对象, 可以根据不同的标准划分为不同的子集。模糊数学为了明确研究范围, 也定义了论域。模糊数学与建立在传统二值逻辑基础上的数学的分化由于子集的定义就显现出来了。

质量互变规律是唯物辩证法的基本规律: 量变引起质变, 质变是量变的积累和飞跃[1] [2]。经典集合论认为集合元素具有确定性、互异性和无序性, 其中的确定性否认了质量互变过程中的渐进性。这种否认量变引起质变造成逻辑悖谬。这可以用模糊数学的创建人扎德举出的一个例子加以说明。

数学上有一种证明命题的方法, 叫做归纳推理证明法。其思路为: 一个命题  $n=1$  是成立, 则可以假设  $n=N$  时命题也是成立的, 这时只要能够证明  $n = N + 1$  命题成立, 则对于  $n$  属于任意自然数, 命题都成立。

我们假设研究论域为所有人。在这个研究范围内建立两个集合“秃子”、“非秃子”。

有  $n$  根头发的人是秃子。这是一个判断句, 构成一个命题。

当  $n = 1$  命题是成立的, 因为无疑, 只有一根头发的人是秃子。

所以可以假设  $n = N$  时命题也是成立的, 即有  $N$  根头发的人是秃子。

那么一个秃子多一根头发能否引起质变, 从而脱离“秃子”这个集合呢? 显然是不可能的。所以有  $N+1$  根头发的人是秃子。

从而可以退出一个结论: 有任意根头发的人是秃子。这是严格按照归纳推理证明的结论, 应该不会有问题。但是这显然又背离了人们的常识, 所以应该算是一个悖谬。那么, 问题究竟出在哪里呢?

显然, 造成这种悖谬的原因首先就是我们思考问题时二值逻辑(或称布尔逻辑, Boolean logic)所处的统治地位, 忽略了质变与量变之间的关系。体现在数学上, 就是经典集合的确定性: 元素要么属于某个集合, 要么不属于某个集合; 或者说命题要么是真, 要么是假。两者只能二选一。这就割裂了量与质之间的联系, 导致由此描述的命题出现悖谬[3]。

## 2. 模糊集合与模糊逻辑

扎德洞悉二值逻辑这种非对即错、非此即彼的确定性用于描述复杂世界的缺陷, 提出了另一种描述集合的方法, 即用隶属函数描述集合[4]。假设研究问题的论域为  $U$ , 要在这个论域中定义一个模糊子集  $F$ , 可以借助一个定义域为  $U$ , 值域为区间  $[0,1]$  的函数

$$\mu_F : U \rightarrow [0,1] \quad (1)$$

来实现。  $\mu_F$  即为函数的映射规则。  $\mu_F(x)$  的大小描述了  $U$  中的元素  $x$  隶属于模糊集合  $F$  的程度。函数值越大, 隶属程度越高。  $\mu_F(x) = 1$ , 说明元素  $x$  完全属于模糊集合  $F$ , 在  $0$  到  $1$  之间则部分隶属于模糊集合  $F$ 。

奇妙的是, 经典集合也可以用隶属函数来描述。例如, 经典集合  $M \subseteq U$  可以用隶属函数描述为

$$\mu_M : U \rightarrow \{0,1\} \quad (2)$$

显而易见, 用隶属函数描述的经典集合与模糊集合的差别关键在于值域的不同(自然其中也隐含着映

射法则的不同): 模糊集合隶属函数的值域是区间 $[0,1]$ , 经典集合隶属函数的值域是二值集合 $\{0,1\}$ 。虽然变化不大, 但是, 模糊集合论承认了量变与质变之间的关系, 具有重要意义。从模糊数学的角度, 我们不能说“元素 $x$ 属于集合 $F$ ”, 而是只能说“元素 $x$ 以0.9的隶属度属于集合 $F$ ”, 从而从根本上否定了经典集合的确定性, 所以“秃子悖谬”也就迎刃而解。

为了更好地理解模糊逻辑, 图1给出了模糊逻辑、多值逻辑及二值逻辑的隶属函数图。

对于相同的论域区间 $[-6,6]$ , 图1(a)只能将区间 $[-6,6]$ 划分为两个子集“Positive”和“Negative”, 区间中的元素要么属于“Positive”, 要么属于“Negative”, 两者必居其一且只居其一。其隶属函数为

$$\mu_{\text{Positive}}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-6, 0), \\ 1, & x \in (0, 6]. \end{cases}$$

$$\mu_{\text{Negative}}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 6], \\ 1, & x \in [-6, 0). \end{cases}$$

图1(b)定义了名字相同的三个集合“Positive”、“Zero”和“Negative”, 区间 $[-6,6]$ 中的每个数, 要么“属于”, 要么“不属于”三个集合中的一个, 属于或不属于的程度是0或者1。

图1(c)定义了三个模糊集合“Positive”、“Zero”和“Negative”, 区间 $[-6,6]$ 中的每个数, 可能隶属于三个模糊集合, 隶属程度在0到1之间, 并且每个数都可能以不同的隶属度同时隶属于三个模糊集合。其隶属函数为

$$\mu_{\text{Positive}}(x) = \exp\left(-\frac{(x-6)^2}{3}\right),$$

$$\mu_{\text{Negative}}(x) = \exp\left(-\frac{(x+6)^2}{3}\right),$$

$$\mu_{\text{Zero}}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{3}\right).$$

模糊集合论建立了质与量之间的联系, 还只是模糊集合论的特色之一。基于模糊集合论建立起来的模糊推理, 为人工智能提供了有效的实现手段, 才是模糊数学得到广泛认可和迅速发展的根本原因。假设 $P, Q$ 代表两个命题,  $P \rightarrow Q$ 表示 $P$ 蕴含 $Q$ , 则 $P, Q$ 和 $P \rightarrow Q$ 是三个关联的命题, 在二值逻辑中, 他们的逻辑值用“0”和“1”表示, 同时用“ $x$ ”命题值不能确定, 则二值逻辑中,  $P$ 蕴含 $Q$ 的逻辑值可以通过表1列出。

$P \rightarrow Q$ 的逻辑值满足下式:

$$(P \rightarrow Q) = (P \wedge Q) \vee (1 - P) \quad (3)$$

或者

$$(P \rightarrow Q) = (P \wedge Q) \quad (4)$$

其中“ $\wedge$ ”表示取小值, “ $\vee$ ”表示取大值。

公式(3)和公式(4)是扎德定义的模糊逻辑推理公式, 所以又称为扎德推理公式[5]。同模糊集合的定义一样, 扎德推理公式也是总结二值逻辑的基础上得出的, 并且二值逻辑推理是模糊逻辑推理的特例, 而模糊逻辑推理是二值逻辑推理的推广。

### 3. 模糊逻辑的应用与特点

模糊逻辑以模糊集合为基础, 建立了质与量之间的关系, 这为我们处理繁纷复杂的世界提供了尽可

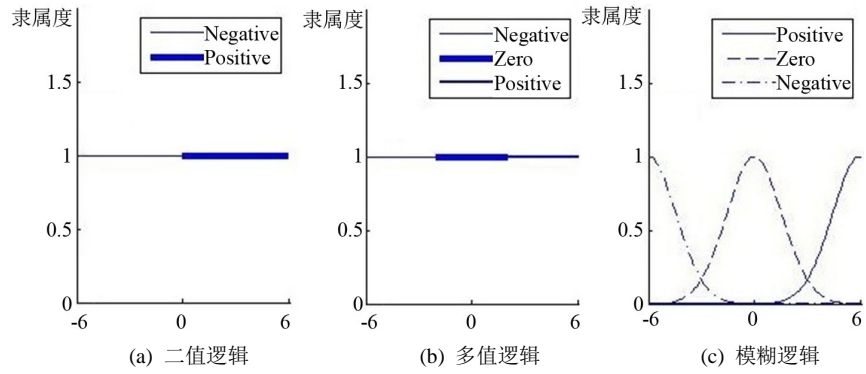


Figure 1. Comparing fuzzy logic to Boolean and multi-value logic  
图1. 模糊逻辑与二值逻辑、多值逻辑对比

Table 1. Boolean logic value  
表1. 二值逻辑真值表

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	x
0	0	x

能有力的工具。正如同我们不能把人分成“秃子”和“非秃子”一样，我们看待事物也不能非黑即白，其中总是存在模糊的过渡地带，有事还会存在很多的评价等级。比如企业对于员工可以有“满意”、“基本满意”、“不满意”、“差劲”等多种评价，相应也会采取多种管理策略。这种策略就是我们常见的条件推理：

$$\begin{aligned} &\text{IF } x \text{ IS } A_1 \text{ THEN } y \text{ IS } f_1(x), \text{ ELSE} \\ &\quad \dots, \text{ ELSE} \\ &\text{IF } x \text{ IS } A_n \text{ THEN } y \text{ IS } f_n(x) \end{aligned}$$

根据模糊集合理论， $x$  可能以不同的隶属度  $w_i$  隶属于不同的模糊集合  $A_i$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。  $x$  隶属度  $w_i$  隶属  $A_i$  时，输出策略  $f_i(x)$ ，所以当我们针对一个当前状态  $x$ ，其应对策略  $y$  自然就是

$$y(x) = \sum_{i=1}^n w_i f_i(x) \tag{5}$$

这正是将人们的经验总结成规律，再利用计算机将这些规律加以实现的过程。

模糊推理在人工智能中占有极大地分量和很高的地位，这一方面是由人们对于智能的认识水平确定的，另一方面也确实得益于模糊逻辑的特点。由于思维的复杂性，科学家们对于智能的认识还比较有限，研究最为透彻的是归纳推理和演绎推理。归纳推理是从大量实例得出普遍规律的推理过程；演绎推理是在已知大前提的条件下退出结论的推理过程。

由于模糊逻辑与布尔逻辑相比具有：1) 将质与量关联；2) 非确定性；3) 多逻辑值这三大特点，从公式(5)可见，只要我们能够总结恰当的“IF...THEN...”规则，就可以获得一个足够复杂的输出。这是布尔逻辑和多值逻辑做不到的。

## 4. 总结

从二值逻辑引发的悖谬出发,回顾了模糊集合和模糊推理的基本知识,并将它们与二值逻辑和多值逻辑对比,得出模糊逻辑是二值和多值逻辑的推广、二值和多值逻辑是模糊逻辑的特例的结论,从而使模糊集合和模糊逻辑简单明了。篇幅所限,本文没有就模糊规则的生成进行详细阐述。

## 参考文献 (References)

- [1] 王利,王光明.量变与质变的辩证关系及现实意义[J].南昌教育学院学报,2013(2):6,8.
- [2] 张淑琼.中学生自主性学习的探索——以《量变与质变辩证关系》为例[J].成都教育学院学报,2003(6):52-53.
- [3] 陈守煜.基于可变模糊集的质变与量变定理——兼论集对分析[J].数学的实践与认识,2009(11):195-201.
- [4] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- [5] Zadeh, L.A. (1968) Fuzzy Algorithms. *Information and Control*, **12**, 94-102.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0019-9958\(68\)90211-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0019-9958(68)90211-8)