Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(1), 39-42
Published Online January 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2017.71006

Hans汉斯

Maps of the $\sin\frac{1}{x}$ Continuum with Every Point Chain Recurrent

Ridi Huang[1], Jingren Zhou[1], Yalin Tang[1], Gengrong Zhang[1,2*]

[1]School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi
[2]College of Mathematics and Computational Science, Hunan First Normal University, Changsha Hunan
Email: *18152853519@163.com

Received: Jan. 2nd, 2017; accepted: Jan. 17th, 2017; published: Jan. 20th, 2017

Abstract

Let S be $\sin\frac{1}{x}$ continuum and $f:S\to S$ be a continuous map, where $S=L_1\cup L_2$, $L_1=\{(x,y)\in R^2 \mid x=0,-1\le y\le 1\}$, $L_2=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, \sin\frac{1}{x},0<x\le 1\right\}$. It is showed that if f is pointwise chain recurrent, then if $\mathrm{Fix}(f)$ is connected, f is identify; if $\mathrm{Fix}(f)$ is disconnected, then f is turbulent while $\mathrm{Fix}(f_1)$ or $\mathrm{Fix}(f_2)$ is nondegenerate disconnected; f is not turbulent while $\mathrm{Fix}(f_1)=L_1$, $\mathrm{Fix}(f_2)=a,a\in L_2$ and $(L_2-\{a\})\cap P(f_2)=\phi$.

Keywords

$\sin\frac{1}{x}$ Continuum, Pointwise Chain Recurrent, Identify, Turbulent

$\sin\frac{1}{x}$连续统上每个点都为链回归点的映射

黄日娣[1]，周敬人[1]，唐亚林[1]，张更容[1,2*]

*通讯作者。

文章引用：黄日娣，周敬人，唐亚林，张更容．$\sin\frac{1}{x}$连续统上每个点都为链回归点的映射[J]．理论数学，2017，7(1): 39-42. http://dx.doi.org/10.12677/pm.2017.71006

[1]广西大学数学与信息科学学院，广西 南宁
[2]湖南第一师范学院数学与计算科学学院，湖南 长沙
Email: *18152853519@163.com

收稿日期：2017年1月2日；录用日期：2017年1月17日；发布日期：2017年1月20日

摘　要

设 S 为 $\sin\frac{1}{x}$ 连续统， $f:S\to S$ 为连续自映射，其中 $S=L_1\cup L_2$， $L_1=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,x=0,-1\le y\le 1\right\}$， $L_2=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,\sin\frac{1}{x},0<x\le 1\right\}$。本文指出：如果 f 为逐点链回归映射，那么，若 $\mathrm{Fix}(f)$ 连通，则 f 为恒等映射；若 $\mathrm{Fix}(f)$ 不连通，则当 $\mathrm{Fix}(f_1)$ 或者 $\mathrm{Fix}(f_2)$ 非退化不连通时， f 含湍流，当 $\mathrm{Fix}(f_1)=L_1$， $\mathrm{Fix}(f_2)=a,a\in L_2$ 且 $(L_2-\{a\})\cap P(f_2)=\phi$ 时， f 不含湍流。

关键词

$\sin\frac{1}{x}$ 连续统，逐点链回归，恒等映射，湍流

1. 预备知识

设 $L_1=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,x=0,-1\le y\le 1\right\}$，$L_2=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,\sin\frac{1}{x},0<x\le 1\right\}$，记 $S=L_1\cup L_2$，我们称 S 为 $\sin\frac{1}{x}$ 连续统。由[1]知， S 为紧的，类弧连通的，但不是弧连通的，也不是局部连通的。 $\sin\frac{1}{x}$ 连续统在拓扑学的综合文章中提到的不少，而且也引起了动力系统研究者的兴趣。本文主要研究 $\sin\frac{1}{x}$ 连续统上逐点链回归的性质。

首先，列举本文的一些符号和定义如下：

设 (X,d) 为紧致度量空间， $f:X\to X$ 为连续映射。若对任意 $x\in X$ 以及某个正整数 n，有 $f^n(x)=x$ 且当 $k=1,2,\cdots,n-1,f^k(x)\ne x$，则称 x 为周期 n 的周期点，其中 $f^0(x)=id,f^j=f\circ f^{j-1}(i\ge 1)$，特别地，如果 $g(x)=x$，则 x 为 f 的不动点，分别用 $\mathrm{Fix}(f)$ 和 $P(f)$ 来表示 f 的不动点集和周期点集。对于任意 $x,y\in X,\varepsilon>0$ x 到 y 的 $\varepsilon-$ 链就是一个有限序列 $x=x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n=y$，其中 $n>0$ 且对于 $0\le i\le n-1,d(f(x_i),x_{i+1})<\varepsilon$，一个点 x 被称为链回归的是指存在从 x 到 x 的 $\varepsilon-$ 链。用 $CR(f)$ 来表示 f 的链回归点集。如果每个点在映射 f 下都是链回归的，则称这个映射 f 为逐点链回归的。下面关于链回归的事实是明显成立的：

(1) 如果 f 是逐点链回归的，则 f 是 X 上的满射。

(2) f 为逐点链回归的当且仅当对于任 $n>0$， g^n 是逐点链回归的。

(3) [2]若 X 是连通的且 $f:X\to X$ 是逐点链回归的，则不存在非空开集 U 使得 $f(\bar{U})\subseteq U$。

链回归是一个系统的重要动力学性质，近年来，在这方面的研究已取得突破性进展，详情可见[2]-[7]。

一个映射 $f:X\to X$ 称为含湍流，是指如果存在非退化闭的连通子集 J 和 K 且 J,K 内部不交使得

$f(J)\cap f(K)\supset J\cap K$。

下面关于链回归的事实是明显成立的：

(1) 如果 f 含湍流，则对于任意 $n>1$， f^n 含湍流。

(2) 如果存在 $p\in F(f), y\in X$ 使得 $y\in(f(y),p), p=f^2(y)$，则 f 含湍流。

文献[3]中证明了紧致区间上的逐点链回归映射 h 必须满足 h^2 为恒等映射或者 h^2 含湍流；文献[6]中证明了 Y 空间中逐点链回归映射 h 必须满足 h 为恒等映射或者 h 恰有一个不动点或者 h^2 为恒等映射或者 h^2 含湍流；文献[7]中证明了区间 $[0,1)$ 上每个点都为链回归点的映射 f，若 $\mathrm{Fix}(f)$ 连通，则 f 为恒等映射，若 $\mathrm{Fix}(f)$，则 f 含湍流。

本文主要证明了以下定理：

设 S 为 $\sin\frac{1}{x}$ 连续统， L_1,L_2 如前所述， $f:S\to S$ 为连续映射，如果 f 为逐点链回归映射，则

(1) 若 $\mathrm{Fix}(f)$ 连通， f 为恒等映射；

(2) 若 $\mathrm{Fix}(f)$ 不连通，则当 $\mathrm{Fix}(f_1)$ 或者 $\mathrm{Fix}(f_2)$ 非退化不连通， f 含湍流，当 $\mathrm{Fix}(f_1)=L_1$，$\mathrm{Fix}(f_2)=a, a\in L_2$ 且 $(L_2-\{a\})\cap P(f_2)=\phi$， f 不含湍流。

2. 主要定理的证明

引理 1 [8]：设 S 为 $\sin\frac{1}{x}$ 连续统， L_1,L_2 如前所述， $f:S\to S$ 为连续映射，则下列之一成立：

(1) $f(L_1)\subset L_1, f(L_2)\subset L_2$；

(2) $f(L_1)\subset L_2, f(L_2)\subset L_2$；

(3) $f(L_1)\subset L_1, f(L_2)\subset L_1$。

引理 2 [9]：设 $f:W\to W$ 为连续映射，则存在唯一的一个连续映射 $\tilde{f}:[0,1)\to[0,1)$ 使得 $\phi\circ\tilde{f}=f\circ\phi$。

引理 3 [7]：设 $X=[0,1), f:X\to X$ 为连续自映射，如果 f 是逐点链回归的，那么，若 $\mathrm{Fix}(f)$ 是连通的，则 f 是恒等映射；若 $\mathrm{Fix}(f)$ 是不连通的，则 f 含湍流。

定理 1：设 S 为 $\sin\frac{1}{x}$ 连续统， L_1,L_2 如前所述， $f:S\to S$ 为连续映射， f 为逐点链回归映射，则 $f(L_1)\subset L_1, f(L_2)\subset L_2$。

证明：由引理 1 可知，若 S 为 $\sin\frac{1}{x}$ 连续统， L_1,L_2 如前所述， $f:S\to S$ 为连续映射，则 $f(L_1)\subset L_1, f(L_2)\subset L_2$，或者对于任意 $i\in\{1,2\}, f(S)\subset L_i$。又因为对于任意 $i\in\{1,2\}, f(S)\subset L_i$， f 不是 S 上的满射，因此 f 不是逐点链回归映射。因此若 f 为逐点链回归映射，则 $f(L_1)\subset L_1, f(L_2)\subset L_2$。

定理 2：设 S 为 $\sin\frac{1}{x}$ 连续统， L_1,L_2 如前所述， $f:S\to S$ 为连续映射， f 为逐点链回归映射，则

(1) 若 $\mathrm{Fix}(f)$ 连通， f 为恒等映射；

(2) 若 $\mathrm{Fix}(f)$ 不连通，则当 $\mathrm{Fix}(f_1)$ 或者 $\mathrm{Fix}(f_2)$ 非退化不连通， f 含湍流，当 $\mathrm{Fix}(f_1)=L_1$，$\mathrm{Fix}(f_2)=a, a\in L_2$ 且 $(L_2-\{a\})\cap P(f_2)=\phi$， f 不含湍流。

证明：由定理 1 可知， $f(L_1)\subset L_1, f(L_2)\subset L_2$。设 L_1 上连续自映射的不动点集为 $\mathrm{Fix}(f_1)$， L_2 上连续自映射的不动点集为 $\mathrm{Fix}(f_2)$，则 $\mathrm{Fix}(f_1)\cap\mathrm{Fix}(f_2)=\phi$，

$$\mathrm{Fix}(f)=\mathrm{Fix}(f_1)\cup\mathrm{Fix}(f_2)$$

情形 1：若 $\mathrm{Fix}(f)$ 连通，即 $\mathrm{Fix}(f_1)\cup\mathrm{Fix}(f_2)$ 连通。若

$\mathrm{Fix}(f_1)=\{(0,x)|x\in[a,b],-1\le a<b\le 1\}$，由于 $\mathrm{Fix}(f_1)\cup\mathrm{Fix}(f_2)$ 连通，则 $\mathrm{Fix}(f_2)=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\middle|\sin\frac{1}{x}\in[a,b]\right\}$。又 $\mathrm{Fix}(f_2)=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\middle|\sin\frac{1}{x}\in[a,b]\right\}=\cup\{(x,y)|y\in[a,b]\}$ 不连通，所以 $\mathrm{Fix}(f_1)\cup\mathrm{Fix}(f_2)$ 不连通，与 $\mathrm{Fix}(f)$ 连通矛盾。故 $\mathrm{Fix}(f_1)=L_1$，从而存在 $a\le 1$ 使得 $\mathrm{Fix}(f_2)=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\middle|x\in(0,a]\right\}$，因此与 $\mathrm{Fix}(f_2)$ 连通。又设同胚映射 $g:[0,1)\to L_2$ 为连续满射，由引理 2 可知存在连续映射 $h:[0,1)\to[0,1)$ 使得 $g\circ h=f_2\circ g$。若 $x'\in\mathrm{Fix}(h)$ 则 $g(x')\in\mathrm{Fix}(f_2)$ 且 $x'\in CR(h)$，因此 $g(x')\in CR(f_2)$。因为 $\mathrm{Fix}(f_2)$ 连通，所以 $\mathrm{Fix}(h)$ 连通，又 f_2 逐点链回归，因此 h 逐点链回归，由引理 3 可知 h 为恒等映射，则 $\mathrm{Fix}(h)=[0,1),\mathrm{Fix}(f_2)=g([0,1))=L_2$。所以 f_2 为恒等映射，故 f 为恒等映射。

情形 2： 若 $\mathrm{Fix}(f)$ 不连通，即 $\mathrm{Fix}(f_1)\cup\mathrm{Fix}(f_2)$ 不连通。

子情形 1： 若 $\mathrm{Fix}(f_1)$ 不连通，即 $f(L_1)\subset L_1$，则 f_1 含湍流，因此 f 含湍流。

子情形 2： 若 $\mathrm{Fix}(f_2)$ 非退化不连通，又设同胚映射 $g:[0,1)\to L_2$ 为连续满射，由引理 2 可知存在连续映射 $h:[0,1)\to[0,1)$ 使得 $g\circ h=f_2\circ g$。若 $x'\in\mathrm{Fix}(h)$，则 $g(x')\in\mathrm{Fix}(f_2)$ 且 $x'\in CR(h)$，因此 $g(x')\in CR(f_2)$。因为 $\mathrm{Fix}(f_2)$ 不连通，所以 $\mathrm{Fix}(h)$ 不连通，又 f_2 逐点链回归，因此 h 逐点链回归，由引理 3 可知 h 含湍流，则 $\mathrm{Fix}(h)=[0,1),\mathrm{Fix}(f_2)=g([0,1))=L_2$。所以 f_2 含湍流，故 f 含湍流。

子情形 3： 若 $\mathrm{Fix}(f_1)=L_1$，$\mathrm{Fix}(f_2)=a,a\in L_2$ 且 $(L_2-\{a\}\cap P(f))=\phi$，反设 f 含湍流，由于 f_1 为恒等映射，所以 f_2 含湍流，则存在闭集 $C,D\subset L_2,\mathrm{int}(C)\cap\mathrm{int}(D)=\phi$ 使得 $C\cup D\subset f_2(C)\cap f_2(D)$，所以 $C\subset f_2(C),D\subset f_2(D)$，因此存在 $a_0\in C$ 使得 $f_2(a_0)=a_0,b_0\in D$，使得 $f_2(b_0)=b_0$，若 $a_0\ne b_0$，因此存在不动点 $a,a_0,b_0\in L_2$，与 $\mathrm{Fix}(f_2)=a$ 矛盾，若 $a_0=b_0=a$，即 $C\cap D=\{a\}$，则 $f(C-\{a\})\supset C-\{a\},f(D-\{a\})\supset D-\{a\}$，故存在 $a_1\in(C-\{a\})$ 使得 $f_2(a_1)=a_1,b_1\in(D-\{a\})$ 使得 $f_2(b_1)=b_1$，因此存在不动点 $a,a_1,b_1\in L_2$，与 $\mathrm{Fix}(f_2)=a$ 矛盾，故与 f 不含湍流。

基金项目

国家自然科学基金(NO: 11461002; 11401288)；广西自然科学基金(NO: 2016GXNSFAA380317)。

参考文献 (References)

[1] Nadler Jr., S.B. (1992) Continuum Theory. Marcel Dekker, Inc., New York.

[2] Block, L. and Franke, J. (1985) The Chain Recurrent Set, Attractors, and Explosions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **5**, 321-327. https://doi.org/10.1017/S0143385700002972

[3] Block, L. and Coven, E.M. (1986) Maps of the Interval with Every Point Chain Recurrent. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **98**, 513-515. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1986-0857952-8

[4] Block, L. and Coppel, W.A. (1991) Dynamics in One Dimension. Springer, Berlin.

[5] Li, T. and Ye, X.D. (1999) Chain Recurrent Point of Tree Map. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **59**, 181-186. https://doi.org/10.1017/S0004972700032809

[6] Guo, W.J., Zeng, F.P. and Hu, Q.Y. (2003) Pointwise Chain Recurrent Maps of the Space Y. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **67**, 79-85. https://doi.org/10.1017/S0004972700033530

[7] Zhang, G.R., Zeng, F.P. and Qin, B. (2007) Maps of the Interval [0,1) with Every Point Chain Recurrent. *Guangxi Sciences*, **14**, 95-97, 102.

[8] 王雅珺，唐亚林，黄日娣，等. $\sin\frac{1}{x}$ 连续统上连续映射 f 的动力性质[J]. 湖南科技学院学报, 2015, 36(10): 5-6.

[9] 熊金城，叶向东，张志强，黄俊. 华沙圈上连续自映射的某些动力性质[J]. 数学学报, 1996(3): 294-299.