

The Minimal Trees of Steiner Wiener Index with Given Matching Number

Zhongzhu Liu, Li He

Mathematics and Big Data College, Huizhou University, Huizhou Guangdong
Email: zhongzhuliu@126.com

Received: May. 4th, 2017; accepted: May 19th, 2017; published: May 24th, 2017

Abstract

The Steiner distance $d(S)$ of a vertex set S is defined as the minimum number of edges of a tree whose vertex set contains a vertex set S , and the Steiner k -Wiener index $SW_k(G)$ of G is defined as the sum of $d(S)$ among all possible k -vertex set S of G . In this paper, we determine the minimal value of $SW_k(G)$ in the class of trees with given matching number.

Keywords

Steiner Distance, Tree, Matching Number

给定匹配数的Steiner Wiener指数极小树

刘中柱, 何 莉

惠州学院数学与大数据学院, 广东 惠州
Email: zhongzhuliu@126.com

收稿日期: 2017年5月4日; 录用日期: 2017年5月19日; 发布日期: 2017年5月24日

摘 要

本文讨论了给定匹配数的树中 k -Steiner Wiener指数的极小值, 并刻画了极图。图 G 的 k -Steiner Wiener指数定义为图 G 中任意 k -点集 S 的Steiner距离 $d(S)$ 的和, 而点集 S 的Steiner距离 $d(S)$ 是包含点集 S 的最小子树的边的数目。

关键词

Steiner距离, 树, 匹配数

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 $G=(V(G),E(G))$ 是一个简单连通图, 其中 $V(G)$, $E(G)$ 分别是图 G 的点集与边集, 且 $|V(G)|=n>2$, $|E(G)|>1$. 图 G 中任意两点 u, v 间的距离 $d_G(u, v)$ 定义为连通 u, v 的最短路的长度, Wiener 指数 $W(G)$ 定义为:

$$W(G) = \sum_{u, v \in V(G)} d_G(u, v).$$

在化学理论中, 基于分子图的顶点间距离的拓扑指数对刻画分子图以及建立分子结构和特征间的关系有重要作用, 同时被广泛用于预测化合物的物理化学性质和生物活性. Wiener 指数是研究最为广泛的拓扑指数之一, 它用于考察烷烃的沸点与分子结构的关系, 同时也用于分析交通网络与社交网络. 相关的结果参考文献[1]-[16].

在任二点距离的基础上, 提出了图的点集的广义距离: 点集 S 的 Steiner 距离 $d(S)$ 定义为图 G 中包含点集 S 的最小子树的边数, Steiner 距离是经典的组合优化问题, 最早可以追溯到 17 世纪初. 1634 年, 数学家 Fermat 提出这样一个问题: 在欧氏平面上有三个点, 寻找一个点使得由该点连接三个点的距离之和最小. 后经多位数学家扩展补充, 最后以瑞士数学家 Steiner 的名字命名为 Steiner 问题. 由于 Steiner 距离在现代生产生活中应用十分广泛, 因此多年来是研究的热点. 本文讨论图的 Steiner 距离问题.

若 $G[S]$ 是连通图, 则 $d(S)$ 等于 $G[S]$ 生成树的边数, 即 $d(S) = |S| - 1$. Dankelmann, Oellermann, Swart [17] 提出了 k -Steiner 平均距离 μ_k 的概念, 其中

$$\mu_k(G) = \frac{\sum_{|S|=k, S \subseteq V} d(S)}{\binom{n}{k}},$$

随后李学良, 毛亚平, Gutman 在文献[18]中提出了 k -Steiner Wiener 指数 SW_k 的概念, 其中

$$SW_k(G) = \sum_{S \subseteq V(G), |S|=k} d(S)$$

且

$$SW_2(G) = W(G)$$

Dankelmann, Oellermann, Swart 在文献[17]中得到给定点数的树中 μ_k 的上下界, 李学良等人在文献[18]中给出了树的 SW_3 指数计算公式, M. Kovse [19]进一步得到树的 SW_k 的点和边的表达式. 与 Steiner 距离的拓扑指数相关的结果可参考文献[20]-[25]. 由于图 G 的 $SW_k(G)$ 计算是 NP 完全问题[24], 讨论特殊图类的上下界与极图问题显得十分重要, 本文将重点讨论给定匹配数的树的下界与极图.

2. 预备知识

图中不相邻的边的集合称为图的一个匹配, 而边数最多的匹配称为图的最大匹配。设 M 是图 G 的一个最大匹配, 称 M 中元素的个数为图 G 的匹配数, 若 M 饱和图 G 的每个顶点, 称图 G 为完美匹配图。令 $T(n, m)$ 为 n 个顶点, 且匹配数为 m 的树的集合, 其中 $5 < 2m \leq n$ 。

为了进一步讨论 Steiner Wiener 指数, 根据 Steiner 距离的定义, 得到以下引理:

引理 2.1. 若 $u, v \in V(G)$ 是连通图 G 中的任两点, 且 $uv \notin E(G)$, 则 $SW_k(G) \geq SW_k(G + uv)$, 其中 $G + uv$ 是在 G 中增加边 uv 得到的新图。

引理 2.2. 若 $S \subset V(G)$, $G[S]$ 是连通的, 则 $d(S) = |S| - 1$ 。

M. Kovse [19] 给出以下关于树的 Steiner Wiener 指数边的表达式。

引理 2.3. 若 T 是 n 个顶点的树, 则

$$SW_k(T) = (n-1) \binom{n}{k} - \sum_{e \in E(T)} \left[\binom{n_1(e)}{k} + \binom{n_2(e)}{k} \right]$$

其中 $n_1(e), n_2(e)$ 分别是 $T - e$ 后两个连通分支的点数。

证明: 由[19]的结果可知

$$\begin{aligned} SW_k(T) &= \sum_{e \in E(T)} \sum_{l_1 + l_2 = k, 0 < l_1, l_2 < k} \binom{n_1(e)}{l_1} \binom{n_2(e)}{l_2} \\ &= \sum_{e \in E(T)} \left(\sum_{l_1 + l_2 = k, 0 \leq l_1, l_2 \leq k} \left[\binom{n_1(e)}{l_1} \binom{n_2(e)}{l_2} \right] - \binom{n_1(e)}{k} - \binom{n_2(e)}{k} \right) \\ &= \sum_{e \in E(T)} \left(\binom{n}{k} - \binom{n_1(e)}{k} - \binom{n_2(e)}{k} \right) \\ &= (n-1) \binom{n}{k} - \sum_{e \in E(T)} \left[\binom{n_1(e)}{k} + \binom{n_2(e)}{k} \right] \end{aligned}$$

证毕。

3. 主要结果

引理 3.1. 若 $T_1, T_2 \in T(n, m)$, 且 $T_1 \neq T_2$, 如图 1 (Figure 1) 所示, 令 T_1 到 T_2 的变换称为 I-变换, 则对任意正整数 $k \geq 2$, 有

$$SW_k(T_1) \geq SW_k(T_2)$$

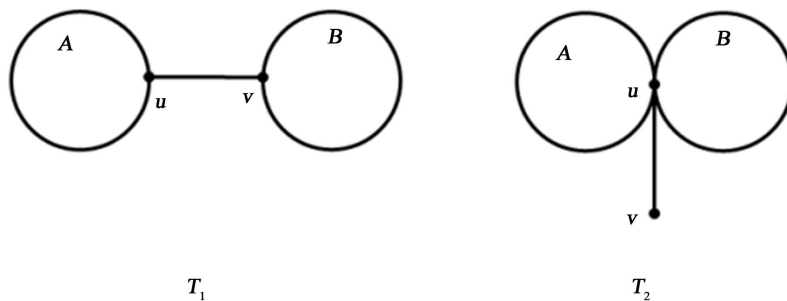


Figure 1. The I-transformation of Lemma 3.1

图 1. 引理 3.1 中的 I-变换

证明: 由于树的每一条边都是割边, 取 $e \in E(T)$, 则不妨设 $T - e$ 的二个连通块的点数分别为 $n_1(e)$, $n_2(e)$, 则有 $n_1(e) + n_2(e) = n$, $n_1(e), n_2(e) \geq 1$, 若 T_1, T_2 中的点与边取相同的标号, 由引理 2.3 可知:

$$SW_k(T_2) - SW_k(T_1) = \sum_{e \in E(T_1)} \left[\binom{n_1(e)}{k} + \binom{n_2(e)}{k} \right] - \sum_{e \in E(T_2)} \left[\binom{n_1(e)}{k} + \binom{n_2(e)}{k} \right]$$

任取边 $e \neq uv$, 则有

$$\sum_{e \in E(T_2), e \neq uv} \left[\binom{n_1(e)}{k} + \binom{n_2(e)}{k} \right] = \sum_{e \in E(T_1), e \neq uv} \left[\binom{n_1(e)}{k} + \binom{n_2(e)}{k} \right]$$

令 $n_1(uv) = n_1, n_2(uv) = n_2$, 由于 $n_1, n_2 \geq 2$, 不妨设 $n_1 \geq n_2$, 从而有

$$\begin{aligned} SW_k(T_2) - SW_k(T_1) &= \binom{n_1}{k} + \binom{n_2}{k} - \binom{n-1}{k} \\ &= \binom{n_1}{k} + \binom{n_2}{k} - \left[\binom{n_1}{k} + \underbrace{\binom{n_1}{k-1} + \dots + \binom{n-2}{k-1}}_{n_2-1} \right] \\ &< \binom{n_2}{k-1} (n_2 - k + 1) - \binom{n_1}{k-1} (n_2 - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

证毕。

引理 3.2. 若 $T_1, T_2 \in T(n, m)$, 且 $T_1 \neq T_2$, 如图 2 (Figure 2) 所示, 令 T_1 到 T_2 的变换称为 II-变换, 对任意正整数 $k \geq 2$, 有

$$SW_k(T_1) \geq SW_k(T_2)$$

证明: 由于树的每一条边都是割边, 取 $e \in E(T)$, 则不妨设 $T - e$ 的二个连通块的点数分别为 $n_1(e)$, $n_2(e)$, 则有 $n_1(e) + n_2(e) = n$, $n_1(e), n_2(e) \geq 1$, 若 T_1, T_2 中的点与边取相同的标号, 由引理 2.3 可知:

$$SW_k(T_1) - SW_k(T_2) = \sum_{e \in E(T_2)} \left[\binom{n_1(e)}{k} + \binom{n_2(e)}{k} \right] - \sum_{e \in E(T_1)} \left[\binom{n_1(e)}{k} + \binom{n_2(e)}{k} \right]$$

任取边 $e \neq wu$, 则有

$$\sum_{e \in E(T_2), e \neq wu} \left[\binom{n_1(e)}{k} + \binom{n_2(e)}{k} \right] = \sum_{e \in E(T_1), e \neq wu} \left[\binom{n_1(e)}{k} + \binom{n_2(e)}{k} \right]$$

令 $n_1(wu) = n_1, n_2(wu) = n_2$, 由于 $n_1, n_2 \geq 2$, 从而有

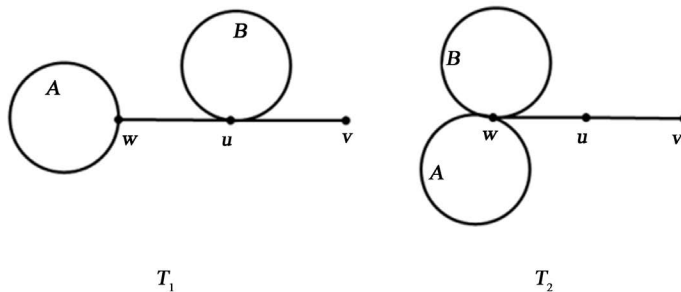


Figure 2. The II-transformation of Lemma 3.2

图 2. 引理 3.2 中的 II-变换

$$SW_k(T_2) - SW_k(T_1) = \binom{n_1}{k} + \binom{n_2}{k} - \binom{n-2}{k} - \binom{2}{k}$$

以下对 k 分情况讨论:

情况 1: 若 $k=1$ 或 $k \geq \min\{n_1, n_2\}$, 显然有 $SW_k(T_2) - SW_k(T_1) \leq 0$.

情况 2: 若 $k=2$, 则有

$$\begin{aligned} SW_2(T_2) - SW_2(T_1) &= \binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} - \binom{n-2}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} [n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) - (n-2)(n-3) - 2] \\ &= -n_1n_2 + 2n - 4 < 0 \end{aligned}$$

情况 3: 若 $3 \leq k \leq \min\{n_1, n_2\}$, 不妨设 $n_1 \geq n_2$, 则有

$$\begin{aligned} SW_k(T_2) - SW_k(T_1) &= \binom{n_1}{k} + \binom{n_2}{k} - \binom{n-2}{k} \\ &= \binom{n_1}{k} + \binom{n_2}{k} - \left[\binom{n_1}{k} + \underbrace{\binom{n_1}{k-1} + \binom{n_1+1}{k-1} + \cdots + \binom{n-3}{k-1}}_{n_2-2} \right] \\ &= \binom{n_1}{k} + \binom{n_2}{k-1} (n_2 - k + 1) - \left[\binom{n_1}{k} + \underbrace{\binom{n_1}{k-1} + \binom{n_1+1}{k-1} + \cdots + \binom{n-3}{k-1}}_{n_2-2} \right] \\ &< \binom{n_2}{k-1} (n_2 - k + 1) - \binom{n_1}{k-1} (n_2 - 2) \leq 0 \end{aligned}$$

综合情况 1、2、3, 得到结果 $SW_k(T_2) - SW_k(T_1) \leq 0$. 证毕.

如图 3 (Figure 3) 所示, 令 $T_{n,m}$ 是对星图 S_{n-m+1} 中的 $m-1$ 个悬挂点分别与一个新的点连边得到的树, 易知 $T_{n,m} \in T(n, m)$, 从而对任一树 $T \in T(n, m)$ 且 $T \neq T_{n,m}$, 可通过引理 3.1 和 3.2 当中的 I-, II-变换, 逐步变换成 $T_{n,m}$, 从而有以下定理:

定理 3.1. 若 $T \in T(n, m)$, 对任意正整数 $k \geq 2$, 有

$$SW_k(T) \geq SW_k(T_{n,m})$$

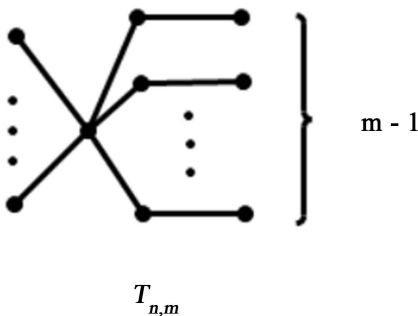


Figure 3. The extremal graph $T_{n,m}$ of Theorem 3.1

图 3. 定理 3.1 中的极图 $T_{n,m}$

基金项目

本文受广东省自然科学基金(No. 2014A030310119)、国家自然科学基金(No. 15BTJ024)和惠州市科技创新基金(No. 2014B020004027)资助。

参考文献 (References)

- [1] da Fonseca, C.M., Ghebleh, M., Kanso, A. and Stevanovic, D. (2014) Counterexamples to a Conjecture on Wiener Index of Common Neighborhood Graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **72**, 333-338.
- [2] Dobrynin, A., Entringer, R. and Gutman, I. (2001) Wiener Index of Trees: Theory and Application. *Acta Applicandae Mathematicae*, **66**, 211-249.
- [3] Du, Z. and Zhou, B. (2010) Minimum Wiener Indices of Trees and Unicyclic Graphs of Given Matching Number. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **63**, 101-112.
- [4] Goddard, W. and Oellermann, O.R. (2011) Distance in Graphs. In: Dehmer, M., Ed., *Structural Analysis of Complex Networks*, Birkhauser, Dordrecht, 49-72. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4789-6_3
- [5] Gutman, I., Furtula, B. and Li, X. (2015) Multicenter Wiener Indices and Their Applications. *Journal of the Serbian Chemical Society*, **80**, 1009-1017. <https://doi.org/10.2298/JSC150126015G>
- [6] Gutman, I., Klavzar, S. and Mohar, B. (1997) Fifty Years of the Wiener Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **35**, 1-159.
- [7] Gutman, I. and Zhang, S. (2006) Graph Connectivity and Wiener Index. *Bulletin Classe des Sciences Mathematiques et Naturales*, **133**, 1-5.
- [8] Yeh, H.-G. and Chang, G.J. (1996) Weighted Connected Domination and Steiner Trees in Distance-Hereditary Graphs. In: *Graph Theory-Combinatorics and Computer Science*, Vol. 1120 of the series *Lecture Notes in Computer Science*, 48-52.
- [9] Jin, Y.L. and Zhang, X.D. (2013) On Two Conjectures of the Wiener Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **70**, 583-589.
- [10] Kovse, M. (2016) Vertex Decomposition of Steiner Wiener Index and Steiner Betweenness Centrality. arxiv: 1605.00260
- [11] Oellermann, O.R. and Tian, S. (1990) Steiner Centers in Graphs. *Journal of Graph Theory*, **14**, 585-597. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190140510>
- [12] Rouvray, D.H. (2002) Harry in the Limelight: The Life and Times of Harry Wiener. In: Rouvray, D.H. and King, R.B. Eds., *Topology in Chemistry—Discrete Mathematics of Molecules*, Horwood, Chichester, 1-15.
- [13] Rouvray, D.H. (2002) The Rich Legacy of Half Century of the Wiener Index. In: Rouvray, D.H. and King, R.B., Eds., *Topology in Chemistry—Discrete Mathematics of Molecules*, Horwood, Chichester, 16-37.
- [14] Wiener, H. (1947) Structural Determination of Paraffin Boiling Points. *Journal of the American Chemical Society*, **69**, 17-20. <https://doi.org/10.1021/Ja01193a005>
- [15] Tutte, W.T. (1947) The Factorization of Linear Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **22**, 107-111. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-22.2.107>
- [16] Xu, K., Liu, M., Das, K.C., Gutman, I. and Furtula, B. (2014) A Survey on Graphs Extremal with Respect to Distance-Based Topological Indices. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **71**, 461-508.
- [17] Dankelmann, P., Oellermann, O.R. and Swart, H.C. (1996) The Average Steiner Distance of a Graph. *Journal of Graph Theory*, **22**, 15-22. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199605\)22:1<15::AID-JGT3>3.0.CO;2-O](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199605)22:1<15::AID-JGT3>3.0.CO;2-O)
- [18] Li, X., Mao, Y. and Gutman, I. (2016) The Steiner Wiener Index of a Graph. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **36**, 455-465.
- [19] Kovse, M. (2016) Vertex Decomposition of the Steiner Wiener Index and the Steiner Betweenness Centrality. arXiv:1605.00260v2 [math.CO].
- [20] Ali, P., Dankelmann, P. and Mukwembi, S. (2012) Upper Bounds on the Steiner Diameter of a Graph. *Discrete Applied Mathematics*, **160**, 1845-1850.
- [21] Caceresa, J., Marquez, A. and Puertasa, M.L. (2008) Steiner Distance and Convexity in Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 726-736.
- [22] Chartrand, G., Oellermann, O.R., Tian, S. and Zou, H.B. (1989) Steiner Distance in Graphs. *Časopis pro Pěstování*

Matematiky, **114**, 399-410.

- [23] Dankelmann, P., Swart, H.C. and Oellermann, O.R. (1997) On the Average Steiner Distance of Graphs with Prescribed Properties. *Discrete Applied Mathematics*, **79**, 91-103.
- [24] Garey, M.R. and Johnson, D.S. (1979) *Computers and Intractability—A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, San Francisco, 208-209.
- [25] 刘中柱, 程晓胜. Steiner Wiener 指数与图的参数[J]. 应用数学进展, 2016, 5(4): 747-453.

期刊投稿者将享受如下服务:

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: pm@hanspub.org