Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(1), 8-13
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.81002

Hans汉斯

Some Properties of the Strongly *h*-Convex Function

Xinlong Zhang, Qiaoshi Zheng, Jianmiao Ruan*

Department of Mathematics, Zhejiang International Studies University, Hangzhou Zhejiang
Email: *rjmath@163.com

Received: Dec. 14th, 2017; accepted: Dec. 27th, 2017; published: Jan. 4th, 2018

Abstract

The strongly *h*-convex function is a generation of the convex function and the *h*-convex function, and the latter is also a common generalization of the convexity, *s*-convexity, the Godunova-Levin function and the *P*-function. In this paper, we discuss some basic properties of strongly *h*-convex functions, and make some presentations of them involving the notations of sup-multiplicative functions, convergence of sequence, etc.

Keywords

Strongly *h*-Convex Function, *h*-Convex Function, Sup-Multiplicative Function

强*h*-凸函数的若干性质

张欣隆，郑乔诗，阮建苗*

浙江外国语学院数学系，浙江 杭州
Email: *rjmath@163.com

收稿日期：2017年12月14日；录用日期：2017年12月27日；发布日期：2018年1月4日

摘 要

强*h*-凸函数是强凸函数和*h*-凸函数的推广，而后者又是凸函数、*s*-凸函数、Godunova-Levin函数以及*P*-函数等的推广。本文讨论了强*h*-凸函数的一些基本性质，并结合上积函数，函数列收敛等概念，对强*h*-凸函数的性质进行更深入的讨论。

*通讯作者。

文章引用: 张欣隆, 郑乔诗, 阮建苗. 强 *h*-凸函数的若干性质[J]. 理论数学, 2018, 8(1): 8-13.
DOI: 10.12677/pm.2018.81002

关键词

强*h*-凸函数，*h*-凸函数，上积函数

1. 引言

凸型函数在纯粹数学和应用数学等众多领域中具有广泛的应用，譬如它已成为数学规划、对策论、数理经济，最优控制等学科的理论基础和有力工具。2007 年 Varosanec [1]提出了 *h*-凸函数的概念。*h*-凸函数是凸函数、*s*-凸函数[2]、Godunova-Levin 函数[3]以及 *P*-函数[4]等函数类的推广。我们熟知这些函数类在数学的各个分支中有大量的应用，因此 *h*-凸函数引起了学者们广泛的兴趣与关注(如见文献[5] [6] [7]等)。2011 年 Angulo 等[8]在强凸函数[9]和 *h*-凸函数的基础上引进了强 *h*-凸函数。和 *h*-凸函数类似，当 $h(x)$ 取不同值时可分别得到强凸函数[9]、强 *s*-凸函数、强 Godunova-Levin 函数以及强 *P*-函数等(见文献[8])。本文主要结合函数(列)的上积性、单调性、收敛性等概念，对强 *h*-凸函数的性质进行更深入的分析和讨论。

2. *h*-凸函数和强 *h*-凸函数的定义

2007 年 Varosanec [1]引进了一类推广了的凸型函数：*h*-凸函数，即

定义 1：设 I,J 是 $\mathbb{R}$ 内的一个区间，且 $(0,1)\subset J$，函数 $h:J\to[0,\infty)$。若函数 $f:I\to[0,\infty)$ 满足，$\forall x,y\in I,t\in(0,1)$，

$$f(tx+(1-t)y)\le h(t)f(x)+h(1-t)f(y) \tag{1}$$

则称 *f* 为定义在区间 *I* 上的 *h*-凸函数。若(1)式中不等号反向成立，则称 *f* 为 *I* 上 *h*-凹函数。

特别地，当 $h(t)=t$ 时，则 *f* 为凸函数；当 $h(t)=t^s$ $(0<s\le1)$时，*f* 为 *s* 凸函数；$h(t)=\frac{1}{t}$ 时，*f* 为 Godunova-Levin 函数；$h(t)\equiv1$ 时，*f* 为 *p* 函数。

2011 年 Angulo [8]进一步推广了 *h*-凸函数，引入了强 *h*-凸函数的概念。

定义 2：设 $(X,\|\cdot\|)$ 是实赋范线性空间，*I* 是 X 中的一个凸子集，*J* 是 $\mathbb{R}$ 内的一个区间，且 $(0,1)\subset J$，函数 $h:J\to[0,\infty)$。若函数 $f:I\to[0,\infty)$ 满足：存在常数 $c>0$，$\forall x,y\in I,t\in(0,1)$，不等式

$$f(tx+(1-t)y)\le h(t)f(x)+h(1-t)f(y)-ct(1-t)\|x-y\|^2 \tag{2}$$

成立，那么我们就称函数 *f* 是 *I* 上的模 *c* 强 *h*-凸函数。若上述不等式反向成立，那么我们就称函数 *f* 是 *I* 上的模 *c* 强 *h*-凹函数。在不引起混淆的情况下，我们分别简称为 *f* 是 *I* 上的强 *h*-凸函数与强 *h*-凹函数。

类似地，当 $h(t)=t$ 时，我们称 *f* 是 *I* 上的模 *c* 强凸函数；当 $h(t)=t^s$ $(0<s\le1)$时，称 *f* 是 *I* 上的模 *c* 强 *s*-凸函数；当 $h(t)=\frac{1}{t}$ 时，称 *f* 是 *I* 上的模 *c* 强 Godunova-Levin 凸函数；当 $h(t)\equiv1$ 时，称 *f* 是 *I* 上的模 *c* 强 *p* 凸函数。

为方便起见，在下文中我们约定符号 I，I_1，I_2 表示实赋范线性空间 X 中的凸子集(有时它们也会表示特殊的实赋范线性空间-$\mathbb{R}$ 中的区间)，符号 J，J_1，J_2 表示 $\mathbb{R}$ 中包含 $(0,1)$ 的区间。

3. 强 *h*-凸函数的基本性质

受文献[9]的启发，本节主要讨论强 *h*-凸函数的一些基本性质，如可加性，复合函数的性质等，并且也比较了强 *h*-凸函数和 *h*-凸函数两者之间的关系。

定理 1：设非负函数 h 满足 $h(t)\le t$，$t\in(0,1)$，若 f 是 I 上的模 c 强凸函数，则 f 也为 I 上的模 c 强 *h*-凸函数。设非负函数 h 满足 $h(t)\ge t$，$t\in(0,1)$，若 f 是 I 上的模 c 强凹函数，则 f 也为 I 上的模 c 强 *h*-凹函数。

证明：若 $h(t)\le t$，$t\in(0,1)$，且若 f 为定义在 I 上模 c 强凸函数，则 $\forall x,y\in I$，$t\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}f\left(tx-(1-t)y\right)&\le tf\left(x\right)+(1-t)f\left(y\right)-ct(1-t)\|x-y\|^2\\&\le h(t)f\left(x\right)+h(1-t)f\left(y\right)-ct(1-t)\|x-y\|^2\end{aligned}.$$

即 f 为 I 上的模 c 强 *h*-凸函数。

若 $h(t)\ge t$，$t\in(0,1)$，且若 f 为 I 上的非负模 c 强凹函数，则 $\forall x,y\in I$，$t\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}f\left(tx-(1-t)y\right)&\ge tf\left(x\right)+(1-t)f\left(y\right)-ct(1-t)\|x-y\|^2\\&\ge h(t)f\left(x\right)+h(1-t)f\left(y\right)-ct(1-t)\|x-y\|^2\end{aligned}.$$

即 f 为 I 上的模 c 强 *h*-凹函数。

定理 2：设非负函数 h_1,h_2 满足 $h_1(t)\le h_2(t)$，$t\in(0,1)$。若 f 是 I 上的模 c 强 h_2-凸函数，则 f 为 I 上模 c 强 h_1-凸函数；若 f 是 I 上的模 c 强 h_1-凹函数，则 f 为 I 上模 c 强 h_2-凹函数。

证明：若 f 为模为 c 强 h_2-凸函数，则对于任意的 $t\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}f\left(tx-(1-t)y\right)&\le h_2(t)f\left(x\right)+h_2(1-t)f\left(y\right)-ct(1-t)\|x-y\|^2\\&\le h_1(t)f\left(x\right)+h_1(1-t)f\left(y\right)-ct(1-t)\|x-y\|^2\end{aligned}.$$

即 f 为模为 c 的强 h_1-凸函数。同理可证凹函数的情况。

类似定理 2 的证明，我们容易得到下面的结论。

定理 3：设 h 为定义在区间 I 上的非负函数。已知 $c_1>c_2$，若 f 模为 c_1 强 h 凸函数，则 f 为模为 c_2 的强 h 凸函数；若 f 模为 c_1 强 h 凹函数，则 f 为模为 c_2 的强 h 凹函数。

定理 4：设常数 $\lambda>0$。若 f，g 分别为定义在 I 上的模为 c_1，c_2 的强 *h*-凸(凹)函数，则 $f+g$ 为 I 上的模 c_1+c_2 强 *h*-凸(凹)函数，λf 为 I 上的模 λc_1 强 *h*-凸(凹)函数。

证明：若 f，g 分别为 I 上模为 c_1，c_2 的强 *h*-凸函数，则有

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\le h(t)f\left(x\right)+h(1-t)f\left(y\right)-c_1t(1-t)\|x-y\|^2,$$

$$g\left(tx+(1-t)y\right)\le h(t)g\left(x\right)+h(1-t)g\left(y\right)-c_2t(1-t)\|x-y\|^2.$$

因此

$$\begin{aligned}&(f+g)\left(tx+(1-t)y\right)\\&\le h(t)\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)+h(1-t)\left(f\left(y\right)+g\left(y\right)\right)-\left(c_1+c_2\right)t(1-t)\|x-y\|^2\end{aligned},$$

$$\lambda f\left(tx+(1-t)y\right)\le\lambda h(t)f\left(x\right)+\lambda h(1-t)f\left(y\right)-\lambda c_1t(1-t)\|x-y\|^2$$

强*h*-凹函数的情形可类似的证明。

注：特别地，当 $c\to0$ 时，定理1~4恰是Varosanec [1]关于*h*-凸函数性质研究的结论。

4. 上积函数，单调性与强 h-凸函数的关系

定义 3 [1]：若函数 $h:J\to\mathbb{R}$ 满足

$$h(xy)\ge h(x)h(y),\quad x,y\in J$$

那么我们称 h 为 J 上的上积函数。若上述不等号反向，则称 h 为 J 上的下积函数。

定理 5：设 f 为 I 上的模 c 强 h-凸函数，且 h 为 J 上的上积函数。若 $f(0)=0$，则 $\forall x,y\in I,\alpha,\beta>0$，且 $\alpha x+\beta y\in I$，有

$$f(\alpha x+\beta y)\le h(\alpha)f(x)+h(\beta)f(y)-c\alpha\beta\|x-y\|^2 \tag{3}$$

证明：记 $\alpha+\beta=\gamma$。令 $a=\dfrac{\alpha}{\gamma},b=\dfrac{\beta}{\gamma}$，则 $a+b=1$。

$$\begin{aligned}
&f(\alpha x+\beta y)=f(\gamma ax+\gamma by)\\
&\le h(a)f(\gamma x)+h(b)f(\gamma y)-cab\|\gamma x-\gamma y\|^2\\
&=h(a)f(\gamma x+(1-\gamma)\cdot 0)+h(b)f(\gamma y+(1-\gamma)\cdot 0)-cab\gamma^2\|x-y\|^2\\
&\le h(a)h(\gamma)f(x)+h(b)h(\gamma)f(y)-cab\gamma^2\|x-y\|^2\\
&\le h(a\gamma)f(x)+h(b\gamma)f(y)-cab\gamma^2\|x-y\|^2\\
&=h(\alpha)f(x)+h(\beta)f(y)-c\alpha\beta\|x-y\|^2
\end{aligned}.$$

定理 6：设 h 是区间 $[0,1]$ 上的非负函数，且对某个 $\alpha_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，有 $h(\alpha_0)<\dfrac{1}{2}$。若 f 是定义在 I 上的非负函数，且 $\forall\alpha,\beta>0$，$\alpha+\beta<1$，满足不等式

$$f(\alpha x+\beta y)\le h(\alpha)f(x)+h(\beta)f(y)-c\alpha\beta\|x-y\|^2 \tag{4}$$

那么有 $f(0)=0$。

证明：我们用反证法来证明。若 $f(0)\ne 0$，即 $f(0)>0$。将 $x=y=0$ 代入不等式(4)中得到

$$f(0)\le h(\alpha)f(0)+h(\beta)f(0).$$

因为 $\alpha,\beta>0,\alpha+\beta\le 1$，不妨取 $\alpha=\beta=\alpha_0$，那么

$$f(0)\le h(\alpha_0)f(0)+h(\alpha_0)f(0)=2h(\alpha_0)f(0).$$

则有

$$h(\alpha_0)\ge\frac{1}{2}.$$

这与条件 $h(\alpha_0)<\dfrac{1}{2}$ 相矛盾。所以假设不成立，故 $f(0)=0$。

单调性是函数的一个重要性质。下面结合单调性讨论复合函数的强凸性。

定义 4：设 f 是定义在区间 I 上的一个实函数，若存在常数 $c>0$，$\forall x,y\in I$ 有

$$c|x-y|\le|f(x)-f(y)|,$$

则称 f 在 I 上满足逆 Lipschitz 条件，且称 $\delta:=\sup\{c\}$ 为逆 Lipschitz 常数，记为 $f\in\mathrm{L}^{-1}(\delta)$。

定理 7：设 $f:I_1\to[0,\infty)$，$g:I_2\to[0,\infty)$ 满足逆 Lipschitz 条件 $g\in\mathrm{L}^{-1}(\delta)$，且 $g(I_2)\subset I_1\subset\mathbb{R}$。若 g 是凸(凹)函数，f 是单调递增(单调递减)的模 c 强 h-凸函数，那么复合函数 $f\circ g$ 是定义在 I_2 上的模 $c\delta^2$ 强

h-凸函数；若 g 是凸(凹)函数，f 是单调递减(单调递增)模 c 强 h-凹函数，那么复合函数 $f\circ g$ 是定义在 I_2 上的模 $c\delta^2$ 强 h-凹函数。

证明：我们仅证明复合函数是强 h-凸函数情形。不妨设 g 是凸函数，f 是单调递增的模 c 强 h-凸函数，那么，$\forall x,y\in I_2,\alpha\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}&(f\circ g)(\alpha x+(1-\alpha)y)\le f(\alpha g(x)+(1-\alpha)g(y))\\&\le h(\alpha)(f\circ g)(x)+h(1-\alpha)(f\circ g)(y)-c\alpha(1-\alpha)|g(x)-g(y)|^2.\\&\le h(\alpha)(f\circ g)(x)+h(1-\alpha)(f\circ g)(y)-c\delta^2\alpha(1-\alpha)|x-y|^2\end{aligned}$$

定理 8：设函数 $h_i:J_i\to[0,\infty),i=1,2$，且 h_1 是 J_1 上的上积函数，$h_2(J_2)\subseteq J_1$，$h_2(t)\ge t\,(t\in(0,1))$。若函数 f 是定义在 I_1 上的单调递增(单调递减)的模 c 强 h-凸函数，且有 $0\in I_1$，$f(0)=0$，函数 g 为定义在 I_2 上的 h_2-凸(凹)函数，且满足逆 Lipschitz 条件 $g\in\mathrm{L}^{-1}(\delta)$ 与 $g(I_2)\subseteq I_1$，那么复合函数 $f\circ g$ 是 I_2 上的模 $c\delta^2$ 强 h-凸函数。

证明：不失一般性，我们仅考虑 g 是 I_2 上的 h_2-凸函数，f 在 I_1 上单调递增的情形。由假设可知，$\forall x,y\in I_2$，$\alpha\in(0,1)$ 有

$$(f\circ g)(\alpha x+(1-\alpha)y)\le f(h_2(\alpha)g(x)+h_2(1-\alpha)g(y))\tag{5}$$

又因为 $f(0)=0$，则由定理 4 知

$$\begin{aligned}&f(h_2(\alpha)g(x)+h_2(1-\alpha)g(y))\\&\le h_1(h_2(\alpha))f(g(x))+h_1(h_2(1-\alpha))f(g(y))-ch_2(\alpha)h_2(1-\alpha)|g(x)-g(y)|^2\end{aligned}\tag{6}$$

注意到 g 满足逆 Lipschitz 条件 $g\in\mathrm{L}^{-1}(\delta)$ 及 $h_2(\alpha)\ge\alpha\,(\alpha\in(0,1))$，则由(5)与(6)得

$$(f\circ g)(\alpha x+(1-\alpha)y)\le(h_1\circ h_2)(\alpha)(f\circ g)(x)+(h_1\circ h_2)(1-\alpha)(f\circ g)(y)-c\delta^2\alpha(1-\alpha)|x-y|^2.$$

定理得证。

定理 9：设 h 为 J 上的非负上积函数。若 f 为定义在 I 上的模 c 强 h-凸函数，那么 $\forall x_1,\cdots,x_n\in I$，有

$$f\left(\frac{1}{W_n}\sum_{i=1}^n w_ix_i\right)\le\sum_{i=1}^n h\left(\frac{w_i}{W_n}\right)f(x_i),$$

其中 $w_1,\cdots,w_n$ 为任意正数，$W_n=w_1+w_2+\cdots+w_n$。

证明：我们利用数学归纳法来证明。当 $n=2$ 时，注意到 $\frac{w_1}{W_2}+\frac{w_2}{W_2}=1$，根据 f 是模 c 强 h-凸函数的定义，易知道结论成立。假设结论对 $n-1(n>2)$ 成立，则对一般的 $n(n>2)$ 有，

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{1}{W_n}\sum_{i=1}^n w_ix_i\right)=f\left(\frac{w_n}{W_n}x_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{w_i}{W_n}x_i\right)=f\left(\frac{w_n}{W_n}x_n+\frac{W_{n-1}}{W_n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{w_i}{W_{n-1}}x_i\right)\\&\le h\left(\frac{w_n}{W_n}\right)f(x_n)+h\left(\frac{W_{n-1}}{W_n}\right)f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{w_i}{W_{n-1}}x_i\right)-c\frac{w_n}{W_n}\frac{W_{n-1}}{W_n}\left\|x_n-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{w_i}{W_{n-1}}x_i\right\|^2\\&\le h\left(\frac{w_n}{W_n}\right)f(x_n)+\sum_{i=1}^{n-1}\left[h\left(\frac{W_{n-1}}{W_n}\right)h\left(\frac{w_i}{W_{n-1}}\right)f(x_i)\right]\\&\le h\left(\frac{w_n}{W_n}\right)f(x_n)+\sum_{i=1}^{n-1}h\left(\frac{w_i}{W_n}\right)f(x_i)\end{aligned}$$

定理得证。

5. 函数列收敛和强 *h*-凸函数

在本节我们主要讨论当强 *h*-凸函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛时，它的极限函数 $f(x)$ 是否也是强 *h*-凸函数？

定理 10：设函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项分别为模 c_n 的强 *h*-凸函数，$c=\inf\limits_n\{c_n\}>0$。若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上收敛于函数 $f(x)$，$\{h_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 上收敛于函数 $h(x)$，那么 $f(x)$ 是模 c 强 *h*-凸函数。

证明：由于 $\{h_n(x)\}$ 为 $(0,1)$ 上的非负函数列，故其收敛函数 $h(x)$ 也是非负函数。由已知条件可知，$\forall x,y\in I, t\in(0,1)$，

$$\begin{aligned} f_n(tx+(1-t)y) &\le h_n(t)f_n(x)+h_n(1-t)f_n(y)-c_nt(1-t)\|x-y\|^2 \\ &\le h_n(t)f_n(x)+h_n(1-t)f_n(y)-ct(1-t)\|x-y\|^2 \end{aligned}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} f_n(tx+(1-t)y)\le \lim_{n\to\infty}\{h_n(t)f_n(x)+h_n(1-t)f_n(y)\}-ct(1-t)\|x-y\|^2.$$

即

$$f(tx+(1-t)y)\le h(t)f(x)+h(1-t)f(y)-ct(1-t)\|x-y\|^2.$$

推论：设函数列 $\{f_n(x)\}$：的每一项分别为模 c_n 的强 *h*-凸函数，$c=\lim\limits_{n\to\infty}c_n>0$。若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上收敛于函数 $f(x)$，$\{h_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 上收敛于函数 $h(x)$，那么 $f(x)$ 是模 c 强 *h*-凸函数。

基金项目

浙江省自然科学基金(No. LY18A010015)，国家级大学生创新创业训练计划项目(No. 201714275002)，浙江外国语学院 2017 年大学生创新创业训练计划项目。

参考文献 (References)

[1] Varosanec, S. (2007) On *h*-Convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **326**, 303-311. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.02.086

[2] Hudzik, H. and Maligranda, L. (1994) Some Remarks on s_i-Convex Functions. *Aequationes Mathematicae*, **48**, 100-111. https://doi.org/10.1007/BF01837981

[3] Godunova, E.K. and Levin, V.I. (1985) Neravenstva Dlja Funkcii Sirokogo Klassa, Soderzascego Vypuklye, Monotonnye I Nekotorye Drugie Vidy Funkii. Vycislitel. Mat.i Mt Fiz., Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov. MGPI, Moscow, 138-142.

[4] Dragomir, S.S., Pecaric, J. and Persson, L.E. (1995) Some Inequalities of Hadamard Type. *Soochow Journal of Mathematics*, **21**, 335-341.

[5] Burai, P. and Hazy, A. (2011) On Approximately *h*-Convex Functions. *Journal of Convex Analysis*, **18**, 243-252.

[6] Hazy, A. (2011) Bernstein-Doetsch Type Results for *h*-Convex Functions. *Mathematical Inequalities & Applications*, **14**, 499-508. https://doi.org/10.7153/mia-14-42

[7] Latif, M.A. (2010) On Some Inequalities for *h*-Convex Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **4**, 1473-1482.

[8] Angulo, H., Gimenez, J., Moros, M. and Nikodem, K. (2011) On Strongly *h*-Convex Function. *Annals of Functional Analysis*, **2**, 85-91. https://doi.org/10.15352/afa/1399900197

[9] Polyak, B.T. (1966) Existence Theorems and Convergence of Minimizing Sequences in Extremum Problems with Restrictions. *Doklady Mathematics*, **7**, 72-75.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org