Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(5), 580-583
Published Online September 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.85077

K-Convexity of Convex Sets in Banach Spaces

Jing Zhang

Northeast Forestry University, Harbin Heilongjiang
Email: 277263141@qq.com

Received: Sep. 7th, 2018; accepted: Sep. 23rd, 2018; published: Sep. 30th, 2018

Abstract

This paper breaks through the shackles of the unit ball, and generalizes the convexity theory of Banach space to the convex set which is not empty internally. It is more extensive than the k-convexity research of Banach Spaces.

Keywords

Convexity Theory, K-Convexity, Banach Spaces

Banach空间上凸集的k凸性

张　晶

东北林业大学，黑龙江　哈尔滨
Email: 277263141@qq.com

收稿日期：2018年9月7日；录用日期：2018年9月23日；发布日期：2018年9月30日

摘　要

本文突破了单位球的束缚，把Banach空间的凸性理论推广到内部不空的凸集上，它比Banach空间的*k*凸性研究更具有广泛性。

关键词

凸性理论，*k*凸性，Banach空间

文章引用: 张晶. Banach 空间上凸集的 k 凸性[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 580-583.
DOI: 10.12677/pm.2018.85077

1. 引言

1977 年，Sullian 引入了 k 一致凸空间的概念，开始了对 Banach 空间的 k 凸性的研究[1]。Banach 空间的各种 k 凸性有一个共同的特点，即以 Banach 空间的单位球作为研究对象[2]。本文把 Banach 空间的凸性理论推广到内部不空的凸集上。首先，引入下面定义[3]

定义 1：设 A 为 Banach 空间 X 上的一个内部不空的凸集，当 $x_1,x_2\in\partial A$ 时 $(x_1\neq x_2)$，有 $\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\in\operatorname{int}(A)$ 成立，则称 A 是严格凸集。

定义 2：设 A 为 Banach 空间 X 上的一个内部不空的凸集，任意 $x\in\partial A$，$y\in\overline{A}$，当 $f(x)\geq\sup f(\operatorname{int}A)$ 时(f 为实泛函)，集合 $\{y:f(y)=f(x)\}$ 张成的实子空间维数不超过 k，则称 A 是 k 严格凸集。

由集合的 k 严格凸的定义易证 k 严格凸集是 $k+1$ 严格凸集，严格凸集是 1 严格凸集。

定义 3：设 A 是线性空间 X 上的一个凸集，$x_0\in A$ 称为 A 的 k 端点。如果 $\{x_i\}_{i=1}^{k+1}\subset A$，$0<t_i<1$，$\sum_{i=1}^{k+1}t_i=1$，$x=\sum_{i=1}^{k+1}t_i$ 时，存在不全为 0 的 $k+1$ 个实数 $r_1,r_2,\cdots,r_{k+1}$，使得 $\sum_{i=1}^{k+1}r_ix_i=0$ 成立。

2. 主要结果

定理 1：设 A 为 Banach 空间 X 上的一个凸集，$0\in\operatorname{int}A$，则下列条件等价：

1) 当 $\mu_A\left(\sum_{i=1}^{k+1}x_i\right)=\sum_{i=1}^{k+1}\mu_A(x_i), x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in\partial A$ 时，存在不全为 0 的 $k+1$ 个实数 $r_1,r_2,\cdots,r_{k+1}$，使得 $\sum_{i=1}^{k+1}r_ix_i=0$ 成立。其中 μ_A 是 A 上的 Minkowski 泛函。

2) 任意 $x\in\partial(A)$，则 x 是 A 的 k 端点。

3) A 是 k 严格凸集。

证明：1)⟹2)假设 2)的结论不成立，则存在 $z_0\in\partial(A)$，

及 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in A$，$0<t_i<1$，$\sum_{i=1}^{k+1}t_i=1$，使得 $z_0=\sum_{i=1}^{k+1}t_ix_i$，

但不存在一组不全为 0 的实数 $r_1,r_2,\cdots,r_{k+1}$，使得 $\sum_{i=1}^{k+1}r_ix_i=0$ 成立。

令 μ_A 为 A 上的 Minkowski 泛函，且 $0\in\operatorname{int}(A)$，故 μ_A 为 X 上的连续泛函，且 $\operatorname{int}(A)=\{x:\mu_A(x)<1\}$，且有 $\overline{\operatorname{int}(A)}=\overline{A}$ 成立。所以

$$1=\mu_A(z_0)=\mu_A\left(\sum_{i=1}^{k+1}t_ix_i\right)\leq\sum_{i=1}^{k+1}t_i\mu_A(x_i)\leq\sum_{i=1}^{k+1}t_i=1$$

所以 $\sum_{i=1}^{k+1}t_i\mu_A(x_i)=1$，因此 $\mu_A(x_i)=1$，$i=1,2,\cdots,k+1$，现在我们证明 $\mu_A\left(\sum_{i=1}^{k+1}x_i\right)=\sum_{i=1}^{k+1}\mu_A(x_i)$，假设 $\mu_A\left(\sum_{i=1}^{k+1}x_i\right)<\sum_{i=1}^{k+1}\mu_A(x_i)$，我们有

$$\begin{aligned}\mu_A(z_0)&=\mu_A\left((t_1+\cdots+t_{k+1})^k z_0\right)=\mu_A\left((t_1+\cdots+t_{k+1})^k\left(\sum_{i=1}^{k+1}t_ix_i\right)\right)\\&=\mu_A\left(t_1^{k+1}x_1+\cdots+t_{k+1}^{k+1}x_{k+1}+\cdots+k!t_1t_2\cdots t_{k+1}(x_1+\cdots+x_{k+1})\right)\\&<t_1^{k+1}+\cdots+t_{k+1}^{k+1}+\cdots+k!t_1t_2\cdots t_{k+1}(k+1)\\&=(t_1+\cdots+t_{k+1})^k(t_1+\cdots+t_{k+1})=1\end{aligned}$$

又 $\mu_A(z_0)=1$，即 $1<1$，矛盾。故 $\mu_A\left(\sum_{i=1}^{k+1}x_i\right)=\sum_{i=1}^{k+1}\mu_A(x_i)$ 成立。但不存在一组不全为 0 的实数 $r_1,r_2,\cdots,r_{k+1}$，使得 $\sum_{i=1}^{k+1}r_ix_i=0$，同 1)矛盾，故 2)成立。

2)⟹3)任意 $x\in\partial(A)$，及实泛函 f，满足 $f(x)\geq\sup f(\operatorname{int}A)$，任取 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in\{y:f(y)=f(x)\}$，令 $z=\frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k+1}x_i\right)$，易证 $z\in\{y:f(y)=f(x)\}$，则 $z\in\partial A$ (事实上，假设 $z\in\operatorname{int}A$，则存在 $r\in R$，且 $r>1$， s.t $rz \in \text{int}(A)$，由 $f(x) \ge \sup f(\text{int} A)$，$\overline{\text{int} A} = \bar{A}$ 知 $f(x) \ge \sup f(A)$，$r(z) \in A$，故 $f(x) = f(z) \ge f(rz)$，故 $1 \ge r$，矛盾)通过 2)知 z 是 A 的 k 端点。故不存在一组不全为 0 的实数 $r_1, r_2, \cdots, r_{k+1}$，使得 $\sum_{i=1}^{k+1} r_i x_i = 0$，故 $\{y = f(y) = f(x)\}$ 张成的实线性子空间维数不超过 k。故 3)成立。

3)⟹1)假设 1)不成立，则存在 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1} \in \partial A$，使得 $\mu_A\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} \mu_A(x_i)$，但不存在一组不全为 0 的实数 $r_1, r_2, \cdots, r_{k+1}$，使得 $\sum_{i=1}^{k+1} r_i x_i = 0$，令 $x_0 = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} x_i \Rightarrow \mu_A(x_0) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} \mu_A(x_i) = 1$，故 $x_0 \in \partial A$。由分离定理存在实泛函 f，使得 $f(x_0) \ge \sup f(\text{int} A)$，故 $f(x_i) = f(x_0), i = 1, 2, \cdots, k+1$，因此 $\{x_i\}_{i=1}^{k+1} \subset \{y : f(y) = f(x_0)\}$。由 3)知 $\{y = f(y) = f(x_0)\}$ 张成的实线性子空间维数不超过 k，矛盾。故 1)成立。

定义 4 设 A 是 Banach 空间 X 上的一个内部不空的凸集，如果对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任意 $x, y \in \partial(A)$，当 $B_\delta\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \not\subset A$ 时，有 $\|x - y\| < \varepsilon$ 成立。则称 A 为一致凸集。

下面我们给凸集加上限制条件把一致凸集的概念推广到 k 一致凸集。

定义 5 设A是 Banach 空间 X 上的一个内部不空的有界凸集，如果对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任意 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1} \in \partial(A)$，当 $B_\delta\left(\frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1})\right) \not\subset A$ 时，有

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = \sup\left\{\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{k+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k+1}(x_1) & f_{k+1}(x_1) & \cdots & f_{k+1}(x_{k+1}) \end{matrix}\right\| : f_i \in S(X^*)\right\} < \varepsilon$$

成立。则称 A 为 k 一致凸集。

从 k 一致凸集的定义不难验证 1 一致凸集即为一致凸集，有界的一致凸集为 1-一致凸集。

定理 2 设 A 是 Banach 空间 X 上的 k 一致凸集，则 A 为 $k+1$ 一致凸集。

证明：由 k 一致凸集的定义不难验证 A 为 k 一致凸集当且仅当属于 A 边界的 $(k+1)$ 个元列 $\left\{\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k+1}^{(n)}\right) \mid n = 1, 2, \cdots\right\}$，当 $B_{\delta_n}\left(\frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1})\right) \not\subset A$ 时，其中 $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ 成立。则有 $A\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k+1}^{(n)}\right) \to 0 (n \to \infty)$ 成立。

设 $\left\{\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k+2}^{(n)}\right) \mid n = 1, 2, \cdots\right\}$ 是属于 A 边界的 $(k+2)$ 个元列，且存在实数列 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\delta_n \to 0 (n \to \infty)$，$B_{\delta_n}\left(\frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1})\right) \not\subset A$ 成立，则存在实数列 $\{\delta_n'\}_{n=1}^{\infty}$，$\delta_n' \to 0 (n \to \infty)$，使得 $B_{\delta_n'}\left(\frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1})\right) \not\subset A$ 成立。(事实上，假设上述结论不成立，则存在 $\delta > 0$，使得 $B_\delta\left(\frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1})\right) \subset A$ 成立。即 $\frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}) \in \text{int}(A)$，不失一般性，不妨令 $0 \in \text{int}(A)$，令 μ_A 为 A 上的 Minkowski 泛函，则 μ_A 连续且 $\text{int}(A) = \{x : \mu_A < 1\}$，则

$$\mu_A\left(\frac{1}{k+2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+2})\right) = \mu_A\left(\frac{k+1}{k+2}\left(\frac{x_1^{(n_k)} + \cdots + x_{k+1}^{(n_k)}}{k+1}\right) + \frac{1}{k+2}x_{k+2}^{(n_k)}\right)$$

$$= \frac{k+1}{k+2}\mu_A\left(\frac{1}{k+1}\left(x_1^{(n_k)} + \cdots + x_{k+2}^{(n_k)}\right) + \frac{1}{k+2}x_{k+2}^{(n_k)}\right) = m < 1$$

成立。

令 $y_{n_k}=\frac{1}{k+2}\left(x_1^{(n_k)}+\cdots+x_{k+2}^{(n_k)}\right)$，由 μ_A 的连续性知，存在 0 点的领域 $B_{\delta_1}(0)$，使得 $\mu_A\left(B_{\delta_1}(0)\right)<\frac{1}{2}(1-m)$，取 y_{n_k} 的领域 $y_{n_k}+B_{\delta_1}(0)$，当 $y\in y_{n_k}+B_{\delta_1}(0)$ 时，$\mu_A(y)\le\mu_A\left(y-y_{n_k}\right)+\mu_A\left(y_{n_k}\right)\le\frac{1}{2}(1-m)+m<1$，故 $y_{n_k}+B_{\delta_1}(0)\subset\operatorname{int}(A)\subset A$。这与存在实数列 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\delta_n\to 0(n\to\infty)$，$B_{\delta_n}\left(\frac{1}{k+1}(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1})\right)\not\subset A$ 矛盾。)由 A 的 k 一致凸性知 $A\left(x_1^{(n)},\cdots,x_{k+1}^{(n)}\right)\to 0(n\to\infty)$，同理当 $(1\le i\le k+2)$ 时，$A\left(x_1^{(n)},\cdots,x_{i-1}^{(n)},x_{i+1}^{(n)},\cdots,x_{k+1}^{(n)}\right)\to 0(n\to\infty)$。

由 A 的有界性知，存在 $M>0$，使得对任意 $f\in S\left(X^*\right)$，$x\in A$，有 $\left|f(x)\right|\le M$ 成立。

故由行列式的性质知，$A\left(x_1^{(n)},\cdots,x_{k+1}^{(n)}\right)\le\sum_{i=1}^{k+2}MA\left(x_1^{(n)},\cdots,x_{i-1}^{(n)},x_{i+1}^{(n)},\cdots,x_{k+1}^{(n)}\right)$，所以 $A\left(x_1^{(n)},\cdots,x_{k+1}^{(n)}\right)\to 0(n\to\infty)$。所以 A 为 $k+1$ 一致凸集。

$$\sup\left\{\left\|\begin{matrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{k+1})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_k(x_k) & f_k(x_k) & \cdots & f_k(x_{k+1})\end{matrix}\right\|: f_i\in S\left(X,\|\cdot\|_1\right)^*\right\}$$

$$\text{故}=\|f_1\|\cdots\|f_k\|\sup\left\{\left\|\begin{matrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \frac{f_1}{f_1}(x_1) & \frac{f_1}{f_1}(x_2) & \cdots & \frac{f_1}{f_1}(x_{k+1})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{f_k}{f_k}(x_k) & \frac{f_k}{f_k}(x_k) & \cdots & \frac{f_k}{f_k}(x_{k+1})\end{matrix}\right\|: f_i\in S\left(X,\|\cdot\|_1\right)^*\right\}$$

$$\le\|f_1\|\cdots\|f_k\|A(x_1,\cdots,x_{k+1})\le\left(\frac{1}{m'}\right)^k\|f_1\|_1\cdots\|f_k\|_1\frac{\varepsilon}{M}=\frac{1}{M}\left(\frac{1}{m'}\right)^k\varepsilon$$

故 $\left(X,\|\cdot\|_1\right)$ 是 k 一致凸。

参考文献

[1] 方习年. Banach 空间的凸性和光滑性及其应用[J]. 安徽工程大学学报, 2001, 16(3): 1-8.

[2] 乌日娜. Banach 空间的某些凸性、光滑性与可凹性的研究[D]: [硕士学位论文]. 内蒙古: 内蒙古师范大学, 2008.

[3] 商绍强. Banach 空间上凸集的凸性[J]. 应用泛函分析学报, 2009, 11(2): 170-177.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org