

The Unicity of the Meromorphic Solutions of Painlevé IV Difference Equations

Meijuan Zhang¹, Shanhua Lin²

¹College of Mathematics and Informatics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

²College of Mathematics and Computer Science, Quanzhou Normal University, Quanzhou Fujian

Email: jian076@163.com, zmjmaths@163.com

Received: Oct. 15th, 2018; accepted: Oct. 27th, 2018; published: Nov. 8th, 2018

Abstract

In this paper, we use Nevanlinna theory to discuss the unicity problems of the finite-order transcendental meromorphic solution of Painlevé IV difference equations with another meromorphic function that share three values.

Keywords

Complex Difference Equation, Meromorphic Solution, Unicity

潘勒韦IV型差分方程亚纯解唯一性

张美娟¹, 林珊华²

¹福建师范大学数学与信息学院, 福建 福州

²泉州师范学院数学与计算机科学学院, 福建 泉州

Email: jian076@163.com, zmjmaths@163.com

收稿日期: 2018年10月15日; 录用日期: 2018年10月27日; 发布日期: 2018年11月8日

摘要

本文利用Nevanlinna理论讨论了潘勒韦IV型差分方程的有限级超越亚纯解与另一个亚纯函数分担三个公共值的唯一性问题。

关键词

复差分方程, 亚纯解, 唯一性

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文采用 Nevanlinna 理论中的一些基本概念和标准符号[1] [2]。亚纯函数通常指定义在整个复平面上的亚纯函数。设 f 是亚纯函数, 用 $\rho(f)$ 表示亚纯函数 f 的增长级, 用 $\rho_2(f)$ 表示亚纯函数 f 的超级, 且定义如下

$$\rho_2(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ T(r, f)}{\log r}$$

定义集合 $E \subset (0, \infty)$ 的线性测度为 $mE = \int_E dt$, 以及对数测度为 $m_l E = \int_E \frac{dt}{t}$ 。如果亚纯函数 a 满足 $T(r, a) = S(r, f)$, 其中 $S(r, f) = o(T(r, f))(r \rightarrow \infty)$, 那么称 a 是 f 的小函数, 可能需除去一对数测度有限的例外集。设 f 和 g 为非常数亚纯函数, a 为任意复数, 如果 $f - a$ 与 $g - a$ 的零点相同并计重数, 则称 f 与 g CM 分担 a 。如果 f 与 g 的极点相同并计重数, 则称 f 与 g CM 分担 ∞ 。

潘勒韦方程是一类物理背景深厚且应用广泛的重要方程。近十年来, 人们通过引入 Nevanlinna 理论深入研究了复域微分和差分方程, 并取得了一些优秀的成果。随着 Halburd 和 Korhonen [3] 以及 Chiang 和 Feng [4] 的奠基性研究型成果的出现, 促进了差分的 Nevanlinna 理论的建立以及潘勒韦差分方程的发展。而后, Halburd [5], Ronkainen [6], 张继龙[7] 等人对非线性差分方程进行了分类, 给出了几类差分 Riccati 方程和潘勒韦 I-V 型差分方程。

设 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, m), b_j (j = 0, 1, 2, \dots, n)$ 均是 f 的小函数, 记 $R(z, f) = \frac{P(z, f)}{Q(z, f)}$ 是关于 z 亚纯, 关于 f 有理的函数, 其中 $P(z, f) = \sum_{i=0}^m a_i f^i(z), Q(z, f) = \sum_{j=0}^n b_j f^j(z)$, 并且 $P(z, f), Q(z, f)$ 的次数分别为 $\deg P(z, f) = m, \deg Q(z, f) = n$ 。

汪晓明[8]等人研究了潘勒韦 III 型差分方程

$$f(z+1)f(z-1) = R(z, f)$$

的有限级超越亚纯函数解的唯一性, 证明了在一定条件下, 如果潘勒韦 III 型差分方程的有限级超越亚纯函数 f 与另一个亚纯函数 g 有两个不同的有限分担值并且有完全相同的极点(计重数), 那么 $f \equiv g$ 。

1991 年, Ramani [9] 考察了潘勒韦 IV 型差分方程 $(f(z+1) + f(z))(f(z-1) + f(z)) = R(z)$, 其中该方程的所有系数均为常数且 $R(z)$ 是关于 z 有理的函数。

本文, 我们将 $R(z)$ 推广至 $R(z, f)$, 进而研究了以下潘勒韦 IV 型差分方程

$$(f(z+1) + f(z))(f(z-1) + f(z)) = \frac{P(z, f)}{Q(z, f)} \quad (1.1)$$

的有限级超越亚纯函数解的唯一性问题, 又置

$$\phi(z, f) = (f(z+1) + f(z))(f(z-1) + f(z))Q(z, f) - P(z, f) \quad (1.2)$$

我们得到了如下定理:

定理 1.1: 设 f 是差分方程(1.1)的有限级超越亚纯函数解, g 是一个亚纯函数, m, n 为正整数且满足 $m = n + 2$ 。 e_1, e_2 为两个互异的有穷复数, $\phi(z, f)$ 如(1.2)所示, 若 f 和 g CM 分担 e_1, e_2, ∞ , 且

$\phi(z, e_1) \neq 0, \phi(z, e_2) \neq 0$, 则 $f \equiv g$ 。

2. 引理

首先, 亚纯函数 f 的差分多项式 $H(z, f)$ 定义如下:

$$H(z, f) = \sum_{\lambda \in J} a_\lambda(z) \prod_{j=1}^{\tau_\lambda} f(z + \delta_{\lambda, j})^{\mu_{\lambda, j}}, \quad (2.1)$$

其中, J 是指标集, $\delta_{\lambda, j}$ 是复常数, $\mu_{\lambda, j}$ 是非负整数, 系数 $a_\lambda(z) (\neq 0)$ 是 f 的小函数。对 $H(z, f)$ 的每一个单项式 $\sum_{j=1}^{\tau_\lambda} f(z + \delta_{\lambda, j})^{\mu_{\lambda, j}}$, 定义其次数为 $d_\lambda = \sum_{j=1}^{\tau_\lambda} \mu_{\lambda, j}$ 。并定义 $H(z, f)$ 的次数为

$$\deg_f H(z, f) = \max_{\lambda \in J} \{d_\lambda\}.$$

接下来, 为证明定理 1.1, 我们需要下列一些引理。

引理 2.1 [10] 设 f 是超级 $\rho_2 < 1$ 的非常数亚纯函数, c 是一非零有穷复数, 则存在正数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) = o\left(\frac{T(r, f)}{r^{1-\rho_2-\varepsilon}}\right) = S(r, f)$$

对所有 r 成立, 至多除去一个对数测度为有限的集合。

引理 2.2 设 f 是超级 $\rho_2 < 1$ 的超越亚纯函数, 且满足差分方程 $H(z, f) = 0$, 其中 $H(z, f)$ 如(2.1)所定义。设 a 为 f 的小函数且满足 $H(z, a) \neq 0$, 则

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = S(r, f)$$

对所有 r 成立, 至多除去一个对数测度为有限的集合。

证明: 令 $f = g + a$, 并代入差分方程 $H(z, f) = 0$ 中, 于是得到

$$L(z, g) + D(z) = 0,$$

其中 $L(z, g) = \sum_\gamma b_\gamma(z) G_\gamma(z, g)$, 其每一项都是次数不小于 1 的关于 g 的多项式, 且 $T(r, D) = o(T(r, g))$, 显然 $D(z) \neq 0$, 否则 $D(z) \equiv 0$, 有 $L(z, 0) \equiv 0$, 即 $H(z, a) \equiv 0$, 与题设矛盾。

接下来, 我们来讨论 $m\left(r, \frac{1}{g}\right)$ 的情况。首先, 记 $E_1 = \{z \mid |z| = r \text{ 且 } |g(z)| \leq 1\}$, $E_2 = \{z \mid |z| = r \text{ 且 } |g(z)| > 1\}$, 则当 $z \in E_1$ 时, 由

$$\left| \frac{L(z, g)}{g(z)} \right| = \frac{1}{|g(z)|} \sum_\gamma b_\gamma(z) |g(z)^{l_\gamma} g(z+c_1)^{l_1} \cdots g(z+c_v)^{l_v}| \leq \sum_\gamma |b_\gamma(z)| \left| \frac{g(z+c_1)}{g(z)} \right|^{l_1} \cdots \left| \frac{g(z+c_v)}{g(z)} \right|^{l_v},$$

其中 $\sum_{j=0}^v l_j \geq 1$ 。再由引理 2.1, 有

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{L}{g}\right) &\leq m\left(r, \sum_\gamma |b_\gamma(z)| \left| \frac{g(z+c_1)}{g(z)} \right|^{l_1} \cdots \left| \frac{g(z+c_v)}{g(z)} \right|^{l_v}\right) \leq \sum_\gamma m\left(r, |b_\gamma(z)| \left| \frac{g(z+c_1)}{g(z)} \right|^{l_1} \cdots \left| \frac{g(z+c_v)}{g(z)} \right|^{l_v}\right) \\ &= \sum_\gamma \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| b_\gamma(re^{i\theta}) \left| \frac{g(re^{i\theta}+c_1)}{g(re^{i\theta})} \right|^{l_1} \cdots \left| \frac{g(re^{i\theta}+c_v)}{g(re^{i\theta})} \right|^{l_v} \right| d\theta \\ &\leq \sum_\gamma \left(m(r, b_\gamma(z)) + l_1 m\left(r, \frac{g(z+c_1)}{g(z)}\right) + \cdots + l_v m\left(r, \frac{g(z+c_v)}{g(z)}\right) \right) = S(r, f), \end{aligned}$$

则可得到

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{g(re^{i\theta})} \right| d\theta \leq m\left(r, \frac{D}{g}\right) + m\left(r, \frac{1}{D}\right) = m\left(r, \frac{L}{g}\right) + m\left(r, \frac{1}{D}\right) = S(r, f). \quad (2.2)$$

而当 $z \in E_2$ 时,

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{g(re^{i\theta})} \right| d\theta = 0. \quad (2.3)$$

所以由(2.2)及(2.3), 可得

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = I_1 + I_2 = S(r, f).$$

得证。

引理 2.3 [7] 设 f 是超级 $\rho_2 < 1$ 的亚纯函数, 且满足差分方程 $H(z, f)Q(z, f) = P(z, f)$, 其中 $H(z, f)$ 如(2.1)所示, $P(z, f), Q(z, f)$ 是 f 的多项式, 如(1.1)所示, 若

$$\deg_f H(z, f) < \max\{\deg P(z, f), \deg Q(z, f)\},$$

则 $m(r, f) = S(r, f)$ 。

引理 2.4 [11] 设 h 为非常数整函数, $f = e^h$, ρ 和 μ 分别表示 f 的级和下级,

- i) 若 h 为 p 次多项式, 则 $\rho = \mu = p$;
- ii) 若 h 为超越亚纯函数, 则 $\rho = \mu = \infty$ 。

引理 2.5 [11] 设 $f_j (j=1, 2, \dots, n)$ 于开平面亚纯, $f_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ 不为常数, $n \in \mathbb{N}^+$ 且满足

$$\sum_{j=1}^n f_j \equiv 1,$$

其中 $n \geq 3$ 。如果 $f_n \neq 0$, 且

$$\sum_{j=1}^n N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + (n-1) \sum_{j=1}^n \bar{N}(r, f_j) < (\lambda + o(1))T(r, f_k) \quad (r \in I, k=1, 2, \dots, n-1),$$

其中 $\lambda < 1$, 则 $f_n \equiv 1$ 。

3. 定理 1.1 的证明

由假设条件 $\phi(z, e_1) \neq 0, \phi(z, e_2) \neq 0$ 及引理 2.2, 有

$$m\left(r, \frac{1}{f-e_1}\right) = S(r, f), m\left(r, \frac{1}{f-e_2}\right) = S(r, f). \quad (3.1)$$

另外, 由 Nevanlinna 第二基本定理

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f-e_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-e_2}\right) + S(r, f) \\ &\leq N(r, g) + N\left(r, \frac{1}{g-e_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{g-e_2}\right) + S(r, f) \\ &\leq 3T(r, g) + S(r, f), \end{aligned} \quad (3.2)$$

同理可证

$$T(r, g) \leq 3T(r, f) + S(r, g), \quad (3.3)$$

所以

$$\rho(f) = \rho(g). \quad (3.4)$$

假设

$$\frac{f - e_1}{g - e_1} = e^A, \frac{f - e_2}{g - e_2} = e^B, \quad (3.5)$$

其中, A, B 是两个关于 z 的多项式。如果 $e^A \equiv 1$, 或者 $e^B \equiv 1$, 或者 $e^{B-A} \equiv 1$ 时, 则显然 $f \equiv g$ 。

下面假设 $e^A \neq 1$, $e^B \neq 1$, 且 $e^{B-A} \neq 1$ 。则由(3.2), (3.3)以及(3.5)可得

$$\begin{aligned} T(r, e^A) &\leq 4T(r, f) + S(r, f), \\ T(r, e^B) &\leq 4T(r, f) + S(r, f). \end{aligned} \quad (3.6)$$

因此 $\max\{\rho(e^A), \rho(e^B)\} \leq \rho(f)$ 。

令 $C = B - A$, 则由(3.5)式可得

$$f = e_1 + (e_2 - e_1) \frac{e^B - 1}{e^C - 1}, \quad (3.7)$$

或

$$f = e_2 + (e_2 - e_1) \frac{e^A - 1}{e^C - 1} e^C. \quad (3.8)$$

于是由(3.7)可得

$$T(r, f) \leq T(r, e^C) + T(r, e^B) + S(r, f), \quad (3.9)$$

所以 $\rho(f) \leq \max\{\rho(e^C), \rho(e^B)\}$, 又 $\max\{\rho(e^C), \rho(e^B)\} \leq \max\{\rho(e^A), \rho(e^B)\} \leq \rho(f)$, 故 $\rho(f) = \max\{\rho(e^A), \rho(e^B)\}$ 。

下面我们证明 $\deg(A) = \deg(B) = \deg(C) > 0$ 。首先, 我们假设

$$e^B - 1 = DB_1, e^C - 1 = DC_1,$$

其中, B_1, C_1, D 均为整函数, 于是(3.7)可以写成

$$f = e_1 + (e_2 - e_1) \frac{B_1}{C_1}.$$

结合(3.1)式子可得

$$T(r, f) = m\left(r, \frac{1}{f - e_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f - e_1}\right) + S(r, f) = N\left(r, \frac{1}{B_1}\right) + S(r, f). \quad (3.10)$$

由条件 $\deg(f(z+1) + f(z))(f(z-1) + f(z)) = 2 < m$, 所以由引理 2.3 有 $m(r, f) = S(r, f)$, 故

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) = N\left(r, \frac{1}{C_1}\right) + S(r, f). \quad (3.11)$$

另外由第二基本定理可得

$$T(r, e^B) \leq N(r, e^B) + N\left(r, \frac{1}{e^B}\right) + N\left(r, \frac{1}{e^B - 1}\right) + S(r, e^B) = N\left(r, \frac{1}{e^B - 1}\right) + S(r, f) \leq T(r, e^B) + S(r, f),$$

又

$$N\left(r, \frac{1}{e^B - 1}\right) = N\left(r, \frac{1}{B_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r, f),$$

所以

$$T(r, e^B) = N\left(r, \frac{1}{B_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r, f). \quad (3.12)$$

同理可证得

$$T(r, e^C) = N\left(r, \frac{1}{C_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r, f). \quad (3.13)$$

于是, 由(3.10)~(3.13)有

$$T(r, e^C) = T(r, e^B) + S(r, f). \quad (3.14)$$

对(3.8)式类似分析可得

$$T(r, e^C) = T(r, e^A) + S(r, f). \quad (3.15)$$

因此, 由(3.14)及(3.15)可得

$$\rho(e^A) = \rho(e^B) = \rho(e^C) = \rho(f), \quad (3.16)$$

又由于 A, B, C 为非常数多项式, 不妨设 $\deg(A) = d$, d 是一个非零正整数, 则由引理 2.4 及(3.16)式得

$$\deg(A) = \deg(B) = \deg(C) = d. \quad (3.17)$$

接下来, 我们引入 $\bar{f} = f(z+1)$, $\underline{f} = f(z-1)$, 则将(3.7)式代入(1.1)式中得到

$$\begin{aligned} & \left[2e_1 + (e_2 - e_1) \left(\frac{e^{\bar{B}} - 1}{e^{\bar{C}} - 1} + \frac{e^B - 1}{e^C - 1} \right) \right] \left[2e_1 + (e_2 - e_1) \left(\frac{e^B - 1}{e^C - 1} + \frac{e^B - 1}{e^C - 1} \right) \right] \sum_{j=0}^n b_j \left[e_1 + (e_2 - e_1) \frac{e^B - 1}{e^C - 1} \right]^j \\ &= \sum_{i=0}^m a_i \left[e_1 + (e_2 - e_1) \frac{e^B - 1}{e^C - 1} \right]^i \end{aligned}$$

又注意到 $m = n + 2$, 于是等式两边同时乘以 $(e^{\bar{C}} - 1)(e^C - 1)(e^C - 1)^{2+m}$, 则可化为

$$\begin{aligned} & \left\{ 2e_1(e^{\bar{C}} - 1)(e^C - 1) + (e_2 - e_1) \left[(e^{\bar{B}} - 1)(e^C - 1) + (e^B - 1)(e^{\bar{C}} - 1) \right] \right\} \\ & \cdot \left\{ 2e_1(e^C - 1)(e^C - 1) + (e_2 - e_1) \left[(e^B - 1)(e^C - 1) + (e^B - 1)(e^C - 1) \right] \right\} \\ & \cdot \sum_{j=0}^n b_j \left[e_1(e^C - 1) + (e_2 - e_1)(e^B - 1) \right]^j (e^C - 1)^{m-j} \\ &= (e^{\bar{C}} - 1)(e^C - 1) \sum_{i=0}^m a_i \left[e_1(e^C - 1) + (e_2 - e_1)(e^B - 1) \right]^i (e^C - 1)^{m-i+2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

令 $\bar{B} = B(z+1) = B(z) + s_1(z)$, $\underline{B} = B(z-1) = B(z) + s_2(z)$, $\bar{C} = C(z+1) = C(z) + t_1(z)$,

$\underline{C} = C(z-1) = C(z) + t_2(z)$ 。其中 $s_1(z), s_2(z), t_1(z), t_2(z)$ 均为次数至多是 $d - 1$ 的多项式, 于是(3.18)整理可得

$$\sum_{\mu=0}^m \sum_{\lambda=0}^{m+2} M_{\mu,\lambda} e^{\mu B + \lambda C} + 4e_2^2 \sum_{j=0}^n b_j e_2^j - \sum_{i=0}^m a_i e_2^i = 0, \quad (3.19)$$

其中 μ, λ 不同时为零, $M_{\mu,\lambda}$ 为关于 $a_i(z), b_j(z), e^{t_1(z)}, e^{t_2(z)}, e^{s_1(z)}, e^{s_2(z)}$ 的多项式。

特别地, 计算可知

$$4e_2^2 \sum_{j=0}^n b_j e_2^j - \sum_{i=0}^m a_i e_2^i = \phi(z, e_2) \neq 0, \quad (3.20)$$

于是, 等式(3.19)两边同时除以 $\phi(z, e_2)$, 并且移项得

$$-\sum_{\mu=0}^m \sum_{\lambda=0}^{m+2} \frac{M_{\mu,\lambda} e^{\mu B + \lambda C}}{\phi(z, e_2)} \equiv 1, \quad (3.21)$$

不妨记 $f_l^* = -\frac{M_{\mu,\lambda}}{\phi(z, e_2)} e^{\mu B + \lambda C}$, 则(3.21)可以写成 $\sum_{l=1}^q f_l^* \equiv 1$, 其中 q 是一个有穷正整数。

而且, 当 $\mu\lambda \neq 0$ 时, 我们断言

$$\deg(\mu B + \lambda C) = d.$$

事实上, 当 $\deg(\mu B + \lambda C) < d$ 时, 则 $e^{\mu B + \lambda C}$ 是 e^A 和 f 的小函数, 于是

$$T(r, e^{\mu B + \lambda C} e^{-\mu A}) = T(r, e^{-\mu A}) + S(r, f) = \mu T(r, e^A) + S(r, f),$$

又

$$T(r, e^{\mu B + \lambda C} e^{-\mu A}) = T(r, e^{(\mu+\lambda)C}) + S(r, f) = (\mu+\lambda)T(r, e^A) + S(r, f),$$

所以 $T(r, e^A) = S(r, f)$, 矛盾, 故 $\deg(\mu B + \lambda C) = d$ 。

最后, 由 $M_{\mu,\lambda}$ 的定义, 有 $\rho\left(-\frac{M_{\mu,\lambda}}{\phi(z, e_2)}\right) = \rho(M_{\mu,\lambda}) < \rho(e^{\mu B + \lambda C})$, 所以 $\rho\left(-\frac{M_{\mu,\lambda}}{\phi(z, e_2)}\right) \leq d-1$ 。又

$\rho(f_l^*) = \rho(e^{\mu B + \lambda C}) = d$, 其中 $l=1, 2, \dots, q-1$ 。所以由 $\rho\left(-\frac{M_{\mu,\lambda}}{\phi(z, e_2)}\right) < \rho(f_l^*)$, 可得 $T\left(r, -\frac{M_{\mu,\lambda}}{\phi(z, e_2)}\right) = S(r, f_l^*)$,

进而可以得到, 对任意的 $k=1, 2, \dots, q$, 有

$$N\left(r, \frac{1}{f_k^*}\right) = S(r, f_l^*), \bar{N}(r, f_k^*) = S(r, f_l^*),$$

于是, 存在一个 $\tau < 1$, 使得

$$\sum_{k=1}^q N\left(r, \frac{1}{f_k^*}\right) + (q-1) \sum_{k=1}^q \bar{N}(r, f_k^*) < (\tau + o(1)) T(r, f_l^*),$$

故由引理 2.5, 可知 $f_q^* \equiv 1$, 即存在 μ, λ , 使得

$$-\frac{M_{\mu,\lambda}}{\phi(z, e_2)} e^{\mu B + \lambda C} \equiv 1.$$

即 $\rho\left(-\frac{M_{\mu,\lambda}}{\phi(z, e_2)}\right) = \rho(e^{\mu B + \lambda C})$, 矛盾, 故假设不成立。

至此, 定理 1.1 证毕。

基金项目

本论文得到福建省中青年教育科研项目(JA15394)和福建自然科学基金项目(2018R0038)的资助。

参考文献

- [1] Hayman, W. (1964) Meromorphic Function. Clarendon Press, Oxford.
- [2] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [3] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Difference Analogue of the Lemma on the Logarithmic Derivative with Applications to Difference Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **314**, 477-487. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.010>
- [4] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of $f(z+\eta)$ and Difference Equations in the Complex Plane. *Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. <https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1>
- [5] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2007) Finite-Order Meromorphic Solutions and the Discrete Painlevé Equations. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **94**, 443-474. <https://doi.org/10.1112/plms/pdl012>
- [6] Ronkainen, O. (2010) Meromorphic Solutions of Difference Painlevé Equations. Ph.D. Thesis, Department of Physics and Mathematics, University of Eastern Finland, Joensuu.
- [7] Zhang, J.L. (2014) Meromorphic Solutions of Painlevé IV Difference Equations. *Advances in Difference Equations*, **2014**, 260. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-260>
- [8] 汪晓明, 高宗升, 陈敏凤. 潘勒韦 III 差分方程亚纯解的唯一性[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2017(6): 26-32.
- [9] Ramani, A., Grammaticos, B. and Hietarinta, J. (1991) Discrete Versions of Painlevé Equations. *Physical Review Letters*, **67**, 1829-1832. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.1829>
- [10] Halburd, R., Korhonen, R. and Tohge, K. (2014) Holomorphic Curves with Shift-Invariant Hyperplane Preimages. *Transactions of the American Mathematical Society*, **366**, 4267-4298. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-05949-7>
- [11] Yang, C.C. (1974) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2160-7583, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: pm@hanspub.org