Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 362-369
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93048

Uniqueness of Entire Functions That Share Small Function with Their Difference Polynomials

Xiaohuang Huang, Dan Liu

Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
Email: 1838394005@qq.com, liudan@scau.edu.cn

Received: Apr. 26th, 2019; accepted: May 6th, 2019; published: May 21st, 2019

Abstract

In this paper, we study the uniqueness of difference operators about transcendental entire function $f(z)$ with a Borel entire exceptional function, which shares a small function $a(z)$ with its difference polynomial. Furthermore, under the above assumption, we replace the condition "Borel entire exceptional function" by "$\delta(0,f)>0$", and get the same result when $f(z)$ shares $a(z)$ CM with its difference polynomial.

Keywords

Entire Function, Shared Small Function, Difference Polynomials

整函数与其差分多项式的唯一性

黄小皇，刘　丹

华南农业大学应用数学研究所，广东　广州
Email: 1838394005@qq.com, liudan@scau.edu.cn

收稿日期：2019年4月26日；录用日期：2019年5月6日；发布日期：2019年5月21日

摘　要

本文研究关于涉及有穷级超越整函数$f(z)$在有一个**Borel**整例外函数的条件下，$f(z)$与其差分多项式$g(z)$ **IM**分担一个小函数$a(z)$的唯一性问题。进一步在上述前提下，把条件“**Borel**整例外函数”改为“$\delta(0,f)>0$”，且$f(z)$与其差分多项式$g(z)$ **IM**分担一个小函数$a(z)$，我们同样得到了相关的结果。

文章引用：黄小皇，刘丹．整函数与其差分多项式的唯一性[J]．理论数学, 2019, 9(3): 362-369.
DOI: 10.12677/pm.2019.93048

关键词

整函数，分担小函数，差分多项式

1. 引言

在本文中，假设读者熟知 Nevanlinna 值分布理论的相关基础知识以及常见符号[1] [2]。设 $f(z)$ 是复平面上的亚纯函数，$a \in C$ 为任意的复数，定义 a 关于 f 的亏量为 $\delta(a,f) = 1 - \varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{N(r,a)}{T(r,f)}$，当 $\delta(a,f) > 0$ 时，a 称为 f 的 Nevanlinna 亏值。定义 $\lambda(f)$ 与 $\mu(f)$ 分别为 $f(z)$ 的级与下级。设 a 为开平面内的亚纯函数，如果 $T(r,a) = S(r,f)$，则称 a 为 f 小函数。设 f 与 g 均为非常数亚纯函数，a 为 f 与 g 的公共小函数，如果 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点相同且每个零点重级也相同，则称 f 与 g CM 分担 a。如果 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点相同，不考虑零点重级，则称 f 与 g IM 分担 a。

设 k 为正整数。记 $N_{k)}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 为 $f-a$ 的重级 $\le k$ 的零点密指量，且计重数。$N_{(k}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 为 $f-a$ 的重级 $\ge k$ 的零点密指量且计重数。记 $\bar{N}_{k)}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 为 $f-a$ 的零点精简密指量，且不计重数。$\bar{N}_{(k}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 为 $f-a$ 的零点精简密指量，且不计重数。

设 F 与 G 均为非常数亚纯函数，且 F 与 G IM 分担 1。设 z_0 为 F 的一个重级为 p 的 1 值点，同时为 G 的一个重级为 q 的 1 值点。记 $\bar{N}_L\left(r,\dfrac{1}{F-1}\right)$ 为 F 的那些重级 $p > q$ 的 1 值点；$\bar{N}_E^{1)}\left(r,\dfrac{1}{G-1}\right)$ 为 F 的那些重级 $p = q = 1$ 的 1 值点；记 $\bar{N}_E^{(2}\left(r,\dfrac{1}{F-1}\right)$ 为 F 的那些重级 $p = q \ge 2$ 的 1 值点。以上所定义的计数函数每一点只计一次。同样可以定义 $\bar{N}_L\left(r,\dfrac{1}{G-1}\right)$，$\bar{N}_E^{1)}\left(r,\dfrac{1}{G-1}\right)$，$\bar{N}_E^{(2}\left(r,\dfrac{1}{F-1}\right)$。若 F 与 G IM 分担 1，则

$$\begin{aligned}\bar{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right) &= \bar{N}_E^{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right) + \bar{N}_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right) + \bar{N}_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right) + \bar{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\\ &= \bar{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\end{aligned}$$

设 f 为非常数有穷正级为 λ 的亚纯函数，α 为 f 的一个小函数。若 $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log^+ N\left(r,\dfrac{1}{f-\alpha}\right)}{\log r} < \lambda$，则称 α 为 f 的一个 Borel 例外函数。当 $\lambda = 0$ 时，定义 $f-\alpha$ 的零点个数为有穷个。

另外，我们需要定义一些差分算子的符号。设 f 为非常数亚纯函数，$m_1(z), m_2(z), \cdots, m_k(z)$ 为 f 的小函数，$c_1, c_2, \cdots, c_k$ 为判别的有穷复数。令

$$g(z) = m_1(z)f(z+c_1) + m_2(z)f(z+c_2) + \cdots + m_k(z)f(z+c_k)$$

为f的差分多项式。最近，许多人做了关于复差分唯一性的问题。2018 年，Huang-Zhang [3]证明了：

定理 A 设$f(z)$为开平面上的有穷级的超越整函数，$\alpha\in C$为f的一个 Borel 例外值，$c\in C$为非零有穷复数。设$a(z)\not\equiv 0$为$f(z)$的一个小函数，若$f(z+c)$与$f(z)$ CM 分担$a(z)$，则$f(z)\equiv f(z+c)$。

定理 B 设$f(z)$开平面有穷级的超越整函数，$c\in C$为有穷复数。设$a(z)\not\equiv 0$为$f(z)$的一个小函数，若$f(z+c)$与$f(z)$ CM 分担$a(z)$且$\delta(0,f)>0$，则$f(z)\equiv f(z+c)$。

定理 C 设$f(z)$为开平面有穷级的超越整函数，$c\in C$为有穷复数。设$a(z)\not\equiv 0$为$f(z)$的一个小函数。若$f(z)$与$\Delta_c f(z)$ CM 分担$a(z)$且$\delta(0,f)>0$，则$f(z)\equiv \Delta_c f(z)$。

本文推广并改进上述结果，证明了：

定理 1 设$f(z)$为开平面有穷级的超越整函数，$\alpha(z)$为f的一个 Borel 例外整函数，

$$g(z)=m_1(z)f(z+c_1)+m_2(z)f(z+c_2)+\cdots+m_k(z)f(z+c_k)$$

为f的差分多项式，其中$m_i(z)(i=1,2,\cdots,k)$为f的整小函数，$c_i(i=1,2,\cdots,k)$ k个判别的有穷复数。

又设$a(z)\not\equiv 0$为$f(z)$的一个整小函数，若$f(z)$与$g(z)$ IM 分担$a(z)$，则$f(z)\equiv g(z)$。

定理 2 设$f(z)$为开平面有穷级的超越整函数，

$$g(z)=m_1(z)f(z+c_1)+m_2(z)f(z+c_2)+\cdots+m_k(z)f(z+c_k)$$

为f的差分多项式，其中$m_i(z)(i=1,2,\cdots,k)$为f的整小函数，$c_i(i=1,2,\cdots,k)$为任意有穷复数。又设$a(z)\not\equiv 0$为$f(z)$与$g(z)$的一个公共小函数，若$f(z)$与$g(z)$ CM 分担$a(z)$且$\delta(0,f)>0$，则$f(z)\equiv g(z)$。

2. 几个引理

引理 1 [4] [5] [6] 设f为非常数有穷级亚纯函数，$c\in C$为非零有穷复数。则

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)=S(r,f),$$

其中$S(r,f)=o(T(r,f))$，除去r的一个集合E，且集合E的对数测度为有穷的。

引理 2 [1] [2] 设f为非常数亚纯函数，则

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)+kN(r,f)+S(r,f).$$

引理 3 [7] 设$H=\left(\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1}\right)-\left(\frac{G''}{G'}-\frac{2G'}{G-1}\right)$，其中$F$与$G$为两个非常数亚纯函数。若$F$与$G$ IM 分担 1 且$H\not\equiv 0$，则

$$N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\le N(r,H)+S(r,F)+S(r,G).$$

引理 4 [2] 设f与g均为非常数亚纯函数，$\lambda(f),\lambda(g)$分别为f与g的级。则

$$\lambda(f\cdot g)\le \max\{\lambda(f),\lambda(g)\}.$$

引理 5 [2] 设f与g均为非常数亚纯函数，$\lambda(f),\mu(g)$分别为f的级与g的下级。若$\lambda(f)<\mu(g)$，则

$$T(r,f)=o(T(r,g)).$$

引理 6 设f为非常数有穷级整函数。若α为f的一个 Borel 例外整函数，则$\delta(\alpha,f)=1$。

证 我们分为以下两种情形讨论：

情形 1 $\lambda>0$。设$\rho=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log^{+}N\left(r,\dfrac{1}{f-\alpha}\right)}{\log r}$。因$\alpha$为$f$的一个 Borel 例外整函数且$f$为有穷级整函数，则有$\rho<\lambda$。设$f-\alpha=He^{Q}$，其中$H$为$f-\alpha$的零点构成的典范乘积，以及$Q$为一非零多项式。由$\alpha$为$f$的整小函数，从而有$\rho(H)=\lambda(H)=\rho(f-\alpha)<\lambda(f)$。显然有$T(r,f-\alpha)=T(r,f)+S(r,f)$，这可推出$\lambda(f-\alpha)=\lambda(f)$。由引理 4 以及$e^{Q}$为正规增长函数，我们可以得到

$$\lambda(H)<\lambda(f-\alpha)=\lambda(f)\le\max\left\{\lambda(H),\lambda\left(e^{Q}\right)\right\}=\lambda\left(e^{Q}\right),$$

以及

$$\lambda\left(e^{Q}\right)\le\max\left\{\lambda(H),\lambda(f)\right\}=\lambda(f),$$

即$\lambda(f)=\lambda\left(e^{Q}\right)=\mu\left(e^{Q}\right)$。又由引理 5 可得$T(r,H)=o\left(T\left(r,e^{Q}\right)\right)$。因此

$$\begin{aligned}T(r,f)&=T(r,f-\alpha)+S(r,f)\\&=T\left(r,He^{Q}\right)+S(r,f)\\&\le T(r,H)+T\left(r,e^{Q}\right)+S(r,f)\\&\le T\left(r,e^{Q}\right)+S(r,f)+S\left(r,e^{Q}\right)\end{aligned},$$

反过来也可得到$T\left(r,e^{Q}\right)\le T(r,f)+S(r,f)+S\left(r,e^{Q}\right)$。这可推出$T(r,f)=T\left(r,e^{Q}\right)+S(r,f)$。故我们有

$$\delta(\alpha,f)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{f-\alpha}\right)}{T(r,f)}\le1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{H}\right)}{T\left(r,e^{Q}\right)}=1.$$

情形 2 $\lambda=0$。由我们引言中所定义的$\lambda=0$时$f-\alpha$的零点个数为有穷个，直接可得$N\left(r,\dfrac{1}{f-\alpha}\right)=o\left(T(r,f)\right)$，于是有$\delta(\alpha,f)=1$。证毕。

3. 定理 1 的证明

设

$$F=\frac{f-\alpha}{a-\alpha},G=\frac{g-\beta}{a-\beta},\tag{1}$$

其中$\beta=m_1(z)\alpha(z+c_1)+m_2(z)\alpha(z+c_2)+\cdots+m_k\alpha(z+c_k)$。因为$f$与$g$ IM 分担a，a为整小函数。所以F与G IM 分担 1。由(1)有$T(r,F)=T(r,f)+S(r,f)$。因为α为f的整 Borel 例外函数，则由引理 6 可以得到$N\left(r,\dfrac{1}{f-\alpha}\right)=S(r,f)$。由引理 1 可以得到

$$T(r,g)\le T(r,f)+S(r,f)=m\left(r,\frac{1}{f-\alpha}\right)+S(r,f)\le m\left(r,\frac{g-\beta}{f-\alpha}\right)+m\left(r,\frac{1}{g-\beta}\right)+S(r,f),$$

即 $T(r,g)=m(r,g)+S(r,f)$。故 $N\left(r,\frac{1}{g-\beta}\right)=S(r,f)$。从而有 $N\left(r,\frac{1}{F}\right)=S(r,f)$ 与 $N\left(r,\frac{1}{G}\right)=S(r,f)$。

定义 H 为引理 3 中的函数。假设 $H\not\equiv 0$，由引理 3 有

$$\begin{aligned}N(r,H)&\le \bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{G}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\\&+N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)\\&\le N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)\end{aligned}, \tag{2}$$

其中 $N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)$ 为 F' 的零点计数函数，而不是 F 与 $F-1$ 的零点计数函数。同样 $N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)$ 也可类似定义。由 Nevanlinna 第二基本定理可得

$$\begin{aligned}&T(r,F)+T(r,G)\\&\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\\&\quad -N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)+S(r,f)\\&\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)+S(r,f)\end{aligned}. \tag{3}$$

因为 F 与 G IM 分担 1，所以我们有

$$\begin{aligned}&\bar{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\\&=2\bar{N}_E^{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+2N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+2N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+2\bar{N}_E^{1)}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\end{aligned}. \tag{4}$$

结合(2)与引理 3 可得

$$\begin{aligned}&\bar{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\\&=\bar{N}_E^{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+3N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+3N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\\&\quad+2N_E^{(2}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)+S(r,f)\end{aligned}. \tag{5}$$

容易发现

$$N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+2N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+2N_E^{(2}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\le N\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\le T(r,G). \tag{6}$$

由(5)与(6)得

$$\begin{aligned}\bar{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)&\le 2N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+T(r,G)\\&\quad+N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)+S(r,f)\end{aligned}. \tag{7}$$

把(7)代入(3)可以得到

$$T(r,F) \le 2N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+S(r,f). \tag{8}$$

由引理 2 又有

$$\begin{aligned}2N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right) &\le 2N\left(r,\frac{1}{F'}\right)+N\left(r,\frac{1}{G'}\right)\\ &\le 2N\left(r,\frac{1}{F}\right)+N\left(r,\frac{1}{G}\right)\\ &= S(r,f)\end{aligned} . \tag{9}$$

由(8)与(9)可得 $T(r,f)=T(r,F)+S(r,f)=S(r,f)$。矛盾。

因此 $H\equiv 0$。由引理 3 以及两边积分可得到

$$\frac{1}{F-1}=\frac{A}{G-1}+B, \tag{10}$$

其中 $A(\ne 0),B$ 为常数。从(10)式又可以得到

$$F=\frac{(B+1)G+A-B-1}{BG+A-B}, G=\frac{(B-A)F+A-B-1}{BF-B-1}. \tag{11}$$

我们分为以下三种情况讨论。

情形 1 $B\ne 0,1$。由(11)可以得 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{F-\frac{B+1}{B}}\right)=\bar{N}(r,G)$。由 Nevanlinna 第二基本定理有

$$\begin{aligned}T(r,f)&=T(r,F)+S(r,f)\\ &\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{F-\frac{B+1}{B}}\right)+S(r,f),\\ &=\bar{N}(r,G)+S(r,f)=S(r,f)\end{aligned} \tag{12}$$

即 $T(r,f)=S(r,f)$。矛盾。

情形 2 $B=0$。由(11)有

$$F=\frac{A}{-G+A+1}, G=\frac{(A+1)F-A}{G}. \tag{13}$$

若 $A\ne 1$，从(13)可得 $N\left(r,\frac{1}{F-\frac{A-1}{A}}\right)=N(r,G)$。类似于情形 1 的证明过程我们同样可得矛盾。因此 $A=1$。由(10)可知 $F\equiv G$，即 $f\equiv g$。

情形 3 $B=-1$。由(11)有

$$F=\frac{A}{-G+A+1}, G=\frac{(A+1)F-A}{F}. \tag{14}$$

若 $A\ne -1$，从(14)可得 $F\cdot G\equiv 1$，即

$$\left(f-\alpha\right)\left(g-\beta\right)\equiv\left(a-\alpha\right)\left(a-\beta\right). \tag{15}$$

由(15)得到

$$\begin{aligned}2T(r,f)&=2T(f-\alpha)+S(r,f)=T\left(r,\frac{1}{(f-\alpha)^2}\right)+S(r,f)\\&=m\left(r,\frac{1}{(f-\alpha)^2}\right)+N\left(r,\frac{1}{(f-\alpha)^2}\right)+S(r,f)\\&\le m\left(r,\frac{g-\beta}{f-\alpha}\frac{1}{(f-\alpha)(g-\beta)}\right)+S(r,f)\\&\le m\left(r,\frac{g-\beta}{f-\alpha}\right)+m\left(r,\frac{1}{(a-\alpha)(a-\beta)}\right)+S(r,f)\\&\le T(r,a-\alpha)+T(r,a-\beta)+S(r,f)=S(r,f)\end{aligned} \tag{16}$$

即 $T(r,f)=S(r,f)$。矛盾。因此定理 1 得证。

4. 定理 2 的证明

假设 $f\not\equiv g$。因为 f 与 g CM 分担 a，则

$$\frac{g-a}{f-a}=e^H, \tag{17}$$

其中 H 为非零多项式。从(17)可得

$$g-a=e^H(f-a)-(f-a)+f-a=\left(e^H-1\right)(f-a)+f-a,$$

$$\text{即 } g=\left(e^H-1\right)(f-a)+f. \tag{18}$$

根据上式可得到

$$\frac{g}{\left(e^H-1\right)fa}=\frac{f-a}{fa}+\frac{1}{\left(e^H-1\right)a}=\frac{1}{a}-\frac{1}{f}+\frac{1}{\left(e^H-1\right)a},$$

即 $\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{\left(e^H-1\right)a}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{g}{\left(e^H-1\right)fa}$。

因此有

$$\begin{aligned}m\left(r,\frac{1}{f}\right)&=m\left(r,\frac{1}{\left(e^H-1\right)a}+\frac{1}{a}-\frac{g}{\left(e^H-1\right)fa}\right)\\&\le 3m\left(r,\frac{1}{a}\right)+2m\left(r,\frac{1}{e^H-1}\right)+m\left(r,\frac{g}{f}\right)+O(1).\\&\le 2m\left(r,\frac{1}{e^H-1}\right)+S(r,f)\end{aligned} \tag{19}$$

另一方面，由 Nevanlinna 第二基本定理

$$T\left(r,e^H\right)\le N\left(r,\frac{1}{e^H-1}\right)+S\left(r,e^H\right)\le T\left(r,e^H\right)+S\left(r,e^H\right),$$

于是有 $T\left(r,e^{H}\right)=N\left(r,\frac{1}{e^{H}-1}\right)+S\left(r,e^{H}\right)$。

因此我们有 $m\left(r,\frac{1}{e^{H}-1}\right)\le S\left(r,e^{H}\right)\le S\left(r,f\right)$。结合(19)立刻有 $m\left(r,\frac{1}{f}\right)=S\left(r,f\right)$，即 $\delta\left(0,f\right)=0$，这与 $\delta\left(0,f\right)>0$ 矛盾。因此 $e^{H}\equiv C$，其中 C 为非零常数。若 $C\equiv 1$，则有 $f\equiv g$，这与设矛盾。故 $C\not\equiv 1$，从(17)得 $g-a\equiv C\left(f-a\right)$。把上式代入(18)，且由(19)可得 $m\left(r,\frac{1}{f}\right)=S\left(r,f\right)$。即 $\delta\left(0,f\right)=0$，这与 $\delta\left(0,f\right)>0$ 矛盾。因此 $f\equiv g$。定理 2 得证。

基金项目

国家自然科学基金(NO.11701188)资助。

参考文献

[1] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer-Verlag, Berlin

[2] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[3] Huang, Z.B. and Zhang, R.R. (2018) Uniqueness of the Difference of Meromorphic Functions. *Analysis Mathematica*, **44**, 461-473.

[4] Heittokangas, Korhonen, R., Laine, I. and Rieppo, J. (2011) Uniqueness of Meromorphic Functions Sharing Values with Their Shifts. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **56**, 81-92. https://doi.org/10.1080/17476930903394770

[5] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Nevanlinna Theory for the Difference Operator. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, **31**, 463-478.

[6] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of f (z + η) and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1

[7] Yi, H.X. (1997) Uniqueness Theorems for Meromorphic Functions Whose n-th Derivatives Share the Same 1-Points. *Complex Variables*, *Theory and Application*, **34**, 421-436. https://doi.org/10.1080/17476939708815064