Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(4), 527-532
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.94069

Hans汉斯

# Normality Concerning Meromorphic Functions and Shared Set

**Jinhua Cai, Guoqiang Dang**

School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong
Email: 2377795228@qq.com, dangguoqiang@126.com

Received: May 31st, 2019; accepted: Jun. 10th, 2019; published: Jun. 26th, 2019

## Abstract

**The normal family of meromorphic functions concerning shared set was studied. The following result was proved: Let $\mathscr{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain *D*, *a*, *b* and *c* be three finite complex numbers, where $a \neq b$, *k* and *q* be two positive integers, let $S=\{a,b\}$. If for each $f \in \mathscr{F}$, 1) $\forall z \in D$, $h\left(f^{(k)}(z)\right) \in S \Rightarrow f(z) \in S$, where $a_i(z)\left(i=1,2,\cdots,q-1\right)$ is holomorphic function and $h\left(f^{(k)}(z)\right)=\left(f^{(k)}(z)\right)^q+a_{q-1}(z)\left(f^{(k)}(z)\right)^{q-1}+\cdots+a_1(z)f^{(k)}(z)$; 2) $f-c$ have zeros with multiplicities at least $k+1$, then $\mathscr{F}$ is normal in *D*.**

## Keywords

**Meromorphic Functions, Normality, Shared Set**

# 亚纯函数分担集合的正规定则

**蔡金华，党国强**

广州大学数学与信息科学学院，广东 广州
Email: 2377795228@qq.com, dangguoqiang@126.com

收稿日期：2019年5月31日；录用日期：2019年6月10日；发布日期：2019年6月26日

## 摘　要

**讨论了亚纯函数分担集合的正规定则，主要结果为：设$\mathscr{F}$是区域*D*内的一族亚纯函数，*a*，*b*和*c*是三个**

文章引用: 蔡金华, 党国强. 亚纯函数分担集合的正规定则[J]. 理论数学, 2019, 9(4): 527-532.
DOI: 10.12677/pm.2019.94069

**有限复数，且 $a \neq b$，$k$和$q$是两个正整数，令 $S=\{a,b\}$。若对任意的 $f \in \mathscr{F}$，满足：1) $\forall z \in D$，$h\left(f^{(k)}(z)\right) \in S \Rightarrow f(z) \in S$，其中 $a_i(z)(i=1,2,\cdots,q-1)$ 是全纯函数，$h\left(f^{(k)}(z)\right)=\left(f^{(k)}(z)\right)^q+a_{q-1}(z)\left(f^{(k)}(z)\right)^{q-1}+\cdots+a_1(z)f^{(k)}(z)$；2) $f-c$ 的零点重级至少为 $k+1$，则 $\mathscr{F}$ 在$D$内正规。**

## 关键词

**亚纯函数，正规族，分担集合**



## 1. 引言及主要结果

设 $\mathscr{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数，如果对于 $\mathscr{F}$ 的任一函数序列 $\{f_n(z)\}$ 均可选出一个子序列 $\{f_{nj}(z)\}$ 在区域 $D$ 上按球距内闭一致收敛，则称 $\mathscr{F}$ 在 $D$ 内正规。

设 $f$ 和 $g$ 是区域 $D$ 内的两个亚纯函数，$a$ 是一个复数。若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在 $D$ 有相同的零点，则称 $f$ 与 $g$ 在区域 $D$ 内分担 $a$ 或称 $IM$ 分担 $a$；若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在 $D$ 有相同的零点并且所有零点的重级也相同，则称 $f$ 与 $g$ 在区域 $D$ 内 $CM$ 分担 $a$。

用记号 $f(z)=a \Rightarrow g(z)=a$ 来表示若 $f(z)=a$ 则 $g(z)=a$，如果 $f(z)=a \Rightarrow g(z)=a$ 且 $g(z)=a \Rightarrow f(z)=a$，我们记为 $f(z)=a \Leftrightarrow g(z)=a$。如果把复数 $a$ 替换为集合 $S$，我们记为 $f(z) \in S \Leftrightarrow g(z) \in S$。

1992 年，Schwick [1]首次把亚纯函数正规族与分担值联系起来，证明了

**定理 A** 设 $\mathscr{F}$ 为区域 $D$ 上的非常数亚纯函数，$a_1$，$a_2$ 和 $a_3$ 是三个互相判别的有穷复数。若对任意的 $f \in \mathscr{F}$，$f$ 与 $f'$ 分担 $a_i$，$i=1,2,3$，则 $\mathscr{F}$ 在 $D$ 内正规。

此后，与分担值结合的亚纯函数正规定则在文[2] [3] [4]中得到进一步研究。自然地，人们会问：如果将分担三个复数 $a_1,a_2,a_3$ 替换为分担集合 $S=\{a_1,a_2,a_3\}$，相应的结论是否成立？2007 年，刘晓俊和庞学诚[5]考虑亚纯函数及其一阶导数分担一个集合的正规性问题，证明了？

**定理 B** 设 $\mathscr{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数，$a_1$，$a_2$ 和 $a_3$ 是三个互相判别的有限复数，$S=\{a_1,a_2,a_3\}$，若对任意的 $f \in \mathscr{F}$，$f(z) \in S \Leftrightarrow f'(z) \in S$，其中 $z \in D$，则 $\mathscr{F}$ 在 $D$ 内正规。

一个自然的问题是将定理 B 中的 $f'$ 改为 $f^{(k)}$，结论是否仍然成立。2011 年，张汉等人[6]探究 $f$ 和 $f^{(k)}$ 分担一个集合的正规性，证明了

**定理 C** 设 $\mathscr{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数，$a_1$，$a_2$ 和 $a_3$ 为三个互相判别的有限复数，$S=\{a_1,a_2,a_3\}$，$k(>2)$ 是一个正整数，$a$ 为任意有限复数。若对任意的 $f \in \mathscr{F}$，$f-a$ 的零点和极点重级都 $\geq k$，且 $f(z) \in S \Leftrightarrow f^{(k)}(z) \in S$，其中 $z \in D$，则 $\mathscr{F}$ 在 $D$ 内正规。

2008 年，韩明华和顾永兴[7]探讨 $f^{(k)}$ 和 $f$ 分担两个值的情形，证明了

**定理 D** 设 $\mathscr{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数，$a_1$，$a_2$ 和 $c$ 是三个有限复数且 $a_1 \neq a_2$。若对任意的 $f \in \mathscr{F}$，满足，1) $f-c$ 的零点重级均 $\geq k+1$；2) $f^{(k)}(z)=a_i \Rightarrow f(z)=a_i$，其中 $i=1,2$，$z \in D$，那么 $\mathscr{F}$ 在 $D$

内正规。

2018 年，陈鸿辉等人[8]考虑$\left(f^{(k)}\right)^q$和$f$分担一个集合$S$的情况，证明了

**定理 E** 设$\mathscr{F}$为区域$D$内的一族亚纯函数，$a$，$b$和$c$是三个判别的有限复数且$a\neq b$，$k$是正整数，令$S=\{a,b\}$。若对任意的$f\in\mathscr{F}$，满足，1) $f-c$的零点重级均$\geq k+1$；2) $\left(f^{(k)}(z)\right)^q\in S\Rightarrow f(z)\in S$，其中$z\in D$，则$\mathscr{F}$在$D$内正规。

本文推广了定理 E，证明了

**定理 1** 设$\mathscr{F}$是区域$D$内的一族亚纯函数，$a$，$b$和$c$是三个有限复数，且$a\neq b$，$k$和$q$是两个正整数，令$S=\{a,b\}$。若对任意的$f\in\mathscr{F}$，满足，1) $f-c$的零点重级$\geq k+1$；2) $h\left(f^{(k)}(z)\right)\in S\Rightarrow f(z)\in S$，其中$z\in D$，$a_1,\cdots,a_{q-1}$是全纯函数，且$h\left(f^{(k)}(z)\right)=\left(f^{(k)}(z)\right)^q+a_{q-1}(z)\left(f^{(k)}(z)\right)^{q-1}+\cdots+a_1(z)f^{(k)}(z)$，则$\mathscr{F}$在$D$内正规。

下面的例子说明定理 1 中的条件“$f-c$的零点重级$\geq k+1$”是必须的。

**例 1** 令$D=\{z:|z|<1\}$，$k$和$q$是两个正整数，$S=\{-1,1\}$，$q=1$，$c=0$。$f\in\mathscr{F}=\{f_n(z)\}$，其中$f_n(z)=nz^k$，$n=2,3,\cdots$。显然$\left(f^{(k)}(z)\right)^q\in S\Rightarrow f(z)\in S$。但是，$\mathscr{F}$在$D$上不正规。

## 2. 引理

定理的证明需要下列引理。

**引理 1** (Zalcman-Pang 引理) [9]设$\mathscr{F}$为区域$D$内的一族亚纯函数，$k$为正整数，$\mathscr{F}$中的每个函数的零点重级至少为$k$，且存在一个正数$A$，若$f(z)=0$，必有$\left|f^{(k)}(z)\right|\leq A$。那么，若$\mathscr{F}$在$D$内不正规，则对于每一个$\alpha$，$0\leq\alpha\leq k$，存在

1) 函数列$f_n\in\mathscr{F}$；
2) 点列$z_n\in D$，$z_n\to z_0$；
3) 正数列$\rho_n\to 0$；
4) 实数$r$，$0<r<1$。

使得函数$g_n(\xi)=\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^{\alpha}}$在复平面 C 上按球面距离内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数$g(\xi)$，并且$g(\xi)$的零点重级均$\geq k$，它的级至多为 2。

**引理 2** [10]设$f(z)$为复平面上的一个超越亚纯函数，$k$为一个正整数，$b$为非零有限复数，则$f$或者$f^{(k)}-b$有无穷多个零点。

**引理 3** [11]设$f(z)=a_nz_n+a_{n-1}z_{n-1}+\cdots+a_0+\dfrac{q(z)}{p(z)}$，$a_0,a_1,\cdots,a_n(\neq 0)$是常数。$q(z)$和$p(z)$是两个互素的多项式，且$\deg q(z)<\deg p(z)=m$，$k$是正整数。若$f^{(k)}\neq 1$，则有

1) $n=k,n!a_n=1$；
2) $f(z)=\dfrac{z^k}{k!}+\cdots+a_1+a_0+\dfrac{1}{(az+b)^m}$，其中$a(\neq 0)$和$b$是常数；
3) 若$f(z)$的零点重级均$\geq k+1$，则结论 2) 中$m=1$，且$f(z)=\dfrac{(cz+d)^{k+1}}{az+b}$，其中$a(\neq 0),b$和$d$是常数。

**引理 4** [12]设$k$是一个正整数，$f$是一个有穷级的亚纯函数，且零点重级至少为$k$。设$a$是一个非零复数，若$f(z)$和$f^{(k)}(z)$分担 0，且$f^{(k)}(z)\neq a$，则$f$是一个常数。

## 3. 定理 1 的证明

假设 $\mathscr{F}$ 在 $D$ 内不正规，则 $\mathscr{F}$ 在 $z_0 \in D$ 内不正规。由引理 1，可知存在函数列 $f_n \in \mathscr{F}$，点列 $z_n \in D$，$z_n \to z_0$，正数列 $\rho_n \to 0$，使得函数 $g_n(\xi) = \dfrac{f_n(z_n + \rho_n \xi) - c}{\rho_n^{\alpha}}$ 在复平面 C 上按球面距离内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$，且 $g(\xi)$ 的级至多为 2，零点重级均 $\geq k+1$。

下面我们分两种情形进行讨论。

情形 1　$c \notin S$。即 $a \neq c$ 且 $b \neq c$。为了明确起见，不妨假设 $a \neq 0$。

我们断言

1) $h\left(g^{(k)}(\xi)\right) \neq a$；

2) $h\left(g^{(k)}(\xi)\right) \neq b$。

下面我们证明断言 1)，因为

$$g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi) - c}{\rho_n{}^{k}} \to g(\xi)$$

则

$$g_n^{(k)}(\xi) = f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) \to g^{(k)}(\xi)$$

$$\left(g_n^{(k)}(\xi)\right)^q = \left(f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi)\right)^q \to \left(g^{(k)}(\xi)\right)^q$$

其中 $\xi \in \{\xi : g(\xi) \neq \infty\}$。

可证 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right) \not\equiv a$，否则，$h\left(g^{(k)}(\xi)\right) \equiv a$，由 $h\left(f^{(k)}(\xi)\right)$ 的定义，可找到一个非零常数 $w$，使 $g^{(k)}(\xi) \equiv w$，进而可知 $g(\xi)$ 是一个次数为 $k$ 次的多项式。由于 $g(\xi)$ 的零点重级均 $\geq k+1$，则 $g(\xi)$ 为常数。矛盾。假设存在一点 $\xi_0$，使得 $h\left(g^{(k)}(\xi_0)\right) = a$，故 $\xi_0$ 不是 $g(\xi)$ 的极点。取 $\delta(\xi_0) > 0$，使 $g(\xi)$ 在 $\Delta = \{\xi : |\xi - \xi_0| < \delta\}$ 内是全纯的，因此在 $\Delta$ 内有

$$\begin{aligned}
&h\left(f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi)\right) - a \\
&= \left(f^{(k)}(z_n + \rho_n \xi)\right)^q + a_{q-1}(z_n + \rho_n \xi)\left(f^{(k)}(z_n + \rho_n \xi)\right)^{q-1} + \cdots + a_1(z_n + \rho_n \xi) f^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) - a \\
&= \left(g^{(k)}(z_n + \rho_n \xi)\right)^q + a_{q-1}(z_n + \rho_n \xi)\left(g^{(k)}(z_n + \rho_n \xi)\right)^{q-1} + \cdots + a_1(z_n + \rho_n \xi) g^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) - a \\
&= h\left(g_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi)\right) - a
\end{aligned}$$

由 Hurwitz 定理，可找到一个点列 $\{\xi_n\} \subset \Delta$，$\xi_n \to \xi_0$，使 $h\left(g_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n)\right) - a = 0$。由条件可知，$f_n(z_n + \rho_n \xi) = a$ 或者 $f_n(z_n + \rho_n \xi) = b$。

如果 $f_n(z_n + \rho_n \xi) = a$，可得 $g(\xi_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n(z_n + \rho_n \xi) - c}{\rho_n{}^{k}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a - c}{\rho_n{}^{k}} = \infty$。

如果 $f_n(z_n + \rho_n \xi) = b$，可得 $g(\xi_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n(z_n + \rho_n \xi) - c}{\rho_n^{k}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b - c}{\rho_n^{k}} = \infty$。

因此 $\xi_0$ 是 $g(\xi)$ 的极点，矛盾。所以断言 1)成立。同理可证断言 2)也成立。

因为 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right) \neq a$，根据 $h\left(f^{(k)}(\xi)\right)$ 的定义，可找到一个非零常数 $w$，使 $g^{(k)}(\xi) \neq w$。根据引理 2，可得 $g(\xi)$ 是超越亚纯函数。因为 $g(\xi)$ 的零点重级均 $\geq k+1$ 和 $g^{(k)}(\xi) \neq w$，则 $g(\xi)$ 不是多项式。根据引

理 3，令 $g(\xi)=\frac{w\xi^k}{k!}+\cdots+a_0+\frac{1}{A\xi+B}$，其中 $A(\neq 0),B,a_0,\cdots$ 是常数。由于 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)\neq b$，由 $h\left(f^{(k)}(\xi)\right)$ 的定义，可找到一个常数 $d$，使 $g^{(k)}\neq d$，其中 $d=0$ 或者 $d\neq 0$。经过简单的计算，可得 $g^{(k)}=w+\frac{(-1)^{(k)}k!A^k}{(A\xi+B)^{k+1}}$，所以 $g^{(k)}=d$ 有解，进而 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)=b$ 有解，与断言 2)矛盾。

情形 2 $c\in S$，即 $a=c$ 或 $b=c$。不妨假设 $a=c$。

可断言

3) $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)=a\Rightarrow g(\xi)=0$；

4) $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)=b\Rightarrow g(\xi)=0$。

下面我们证明断言 3)，使用情形 1 的方法，可找到一个点列 $\{\xi_n\}\subset\Delta$，$\xi_n\to\xi_0$，使 $h\left(g_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi_n)\right)-a=0$，由条件可知，$f_n(z_n+\rho_n\xi)=a$ 或者 $f_n(z_n+\rho_n\xi)=b$。

假设 $f_n(z_n+\rho_n\xi)=a$，可得 $g(\xi_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi)-c}{\rho_n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a-c}{\rho_n^k}=0$。

假设 $f_n(z_n+\rho_n\xi)=b$，可得 $g(\xi_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi)-c}{\rho_n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-c}{\rho_n^k}=\infty$，此时 $\xi_0$ 是 $g(\xi)$ 的极点，这与 $h\left(g^{(k)}(z_n+\rho_n\xi)\right)=a$ 矛盾，故这种情况不成立。

所以断言 3)成立，同理可证断言 4)成立。

子情形 2.1 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)\neq a$ 且 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)\neq b$。

根据情形 1 的表述，可知这种情况不成立。

子情形 2.2 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)\neq a$，$h\left(g^{(k)}(\xi)\right)=b$ 或 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)=a$，$h\left(g^{(k)}(\xi)\right)\neq b$。

为了明确起见，不妨设 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)\neq a$，则有 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)=b\Rightarrow g(\xi)=0$。可证 $b=0$，否则 $b\neq 0$。存在 $\xi_0$，使 $h\left(g^{(k)}(\xi_0)\right)=b\Rightarrow g(\xi_0)=0$。即 $\xi_0$ 是 $g(\xi)$ 的零点。因为 $g(\xi)$ 的零点重级均 $\geq k+1$，所以 $\xi_0$ 也是 $g^{(k)}(\xi)$ 的零点。即 $b=0$，矛盾。所以有 $g^{(k)}(\xi)=0\Rightarrow g(\xi)=0$。由于 $g(\xi)$ 的零点重级均 $\geq k+1$，可得 $g(\xi)=0\Rightarrow g^{(k)}(\xi)=0$。因此 $g(\xi)$ 和 $g^{(k)}(\xi)$ 分担 0。因为 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)\neq a$ 且 $a\neq b$，再根据 $h\left(f^{(k)}(\xi)\right)$ 的定义和情形 1 的表述，可知存在一个非零常数 $w$，使 $g^{(k)}\neq w$，由引理 4，可知 $g(\xi)$ 是一个常数，矛盾。

子情形 2.3 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)=a$ 且 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)=b$，即断言 3)和断言 4)同时成立。

因为 $h\left(g^{(k)}(\xi)\right)=a\Rightarrow g(\xi_0)=0$，显然 $a=0$。否则 $a\neq 0$，存在 $\xi_0$，使 $h\left(g^{(k)}(\xi_0)\right)=a\Rightarrow g(\xi_0)=0$，故 $\xi_0$ 是 $g(\xi)$ 的零点。由条件，可知 $\xi_0$ 也是 $g^{(k)}(\xi)$ 的零点，即 $a=0$。同理可得 $b=0$，这与 $a\neq b$ 矛盾。

综上所述，$\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规。定理 1 证毕。

## 基金项目

国家自然科学基金(编号：11271090)，广东省自然科学基金(编号：2016A030310257、2015A030313346)}，广州大学研究生创新能力培养资助计划(2018GDJC-D28)资助。

## 参考文献

[1] Schwick, W.K. (1992) Sharing Values and Normality. *Archiv der Mathematik*, **59**, 50-54. https://doi.org/10.1007/BF01199014

[2] Fang, M.L. and Zalcman, L. (2004) A Note on Normality and Shared Values. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **76**, 141-150. https://doi.org/10.1017/S1446788700008752

[3] Fang, M.L. and Zalcman, L. (2002) Normal Families and Shared Values of Meromorphic Function III. *Computational Methods and Function Theory*, **2**, 385-395. https://doi.org/10.1007/BF03321856

[4] Pang, X.C. and Zalcman, L. (2000) Normality and Shared Values. *Arkiv för Matematik*, **38**, 171-182. https://doi.org/10.1007/BF02384496

[5] 刘晓俊, 庞学诚. 分担值与正规族[J]. 数学学报, 2007, 52(2): 409-412.

[6] 张汉, 谢东, 张庆德. 涉及分担集的亚纯函数的正规定则[J]. 数学物理学报, 2011, 31(5): 1290-1294.

[7] Han, M.H. and Gu, Y.X. (2008) The Normal Family of Mermorphic Functions. *Acta Mathematica Scientia*, **28**, 759-762. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(08)60076-4

[8] 陈鸿辉, 蔡金华, 袁文俊. 涉及分担集合的亚纯函数正规定则[J]. 嘉应学院学报(自然科学), 2018, 36(11): 5-8.

[9] Zalcman, L. (1998) Normal Families: New Perspectives. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **35**, 215-230. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-98-00755-1

[10] Bergweiler, W. and Eremanko, A. (1995) On the Singularities of the Inverse to a Meromorphic Functions of Finite Order. *Revista Matemática Iberoamericana*, **11**, 355-373. https://doi.org/10.4171/RMI/176

[11] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 62-64.

[12] Fang, M.L. and Zalcman, L. (2003) Normal Families and Shared Values of Meromorphic Functions. *Annales Polonici Mathematici*, **80**, 137-141. https://doi.org/10.4064/ap80-0-11