Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(5), 627-631
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.95083

Hans汉斯

Orbifold Bundle and Chern Character

Yiwu Lin

Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong
Email: Linyiwu@tom.com

Received: Jul. 2nd, 2019; accepted: Jul. 22nd, 2019; published: Jul. 29th, 2019

Abstract

In this paper, we reformulate the notion of orbifolds and orbifold bundles, and then define the connection, with which we construct orbifold chern character.

Keywords

Orbifold, Groupoid, Orbifold Bundle, Connection, Orbifold Chern Character

Orbifold丛与陈特征

林奕武

广东金融学院，广东 广州
Email: Linyiwu@tom.com

收稿日期：2019年7月2日；录用日期：2019年7月22日；发布日期：2019年7月29日

摘 要

重新描述orbifold和orbifold丛的定义，并且提出了orbifold丛上联络的定义，从而诱导orbifold陈特征等概念。

关键词

Orbifold，群胚，Orbifold丛，联络，Orbifold陈特征

文章引用: 林奕武. Orbifold 丛与陈特征[J]. 理论数学, 2019, 9(5): 627-631.
DOI: 10.12677/pm.2019.95083

1. 引言

Orbifold 最早产生于代数几何领域，带有奇性的簇被视为最早出现的 orbifold。到了上世纪 50 年代，Satake [1] [2]首次在拓扑学和微分几何领域引入 orbifold 的概念。在微分几何中，orbifold 被视为光滑流形的推广，当时被称为 V-流形，即是带有奇点的“流形”。类似于光滑流形，orbifold 是一个拓扑空间，其上加以一个 orbifold 结构。orbifold 结构也是由空间的一个开覆盖构成，每张局部卡为 R^n 中的连通开集，模以一个有限子群得到的商集。orbifold 结构刻画了 orbifold 的局部奇性，但是缺乏局部相容性，所以不能很好的展现其整体结构。Haefliger [3]利用群胚的语言来表述 orbifold。群胚有良好的整体性，使若干代数拓扑的概念得以推广到 orbifold 领域中来。由于群胚的语言比较抽象，其几何直观性有所欠缺。

本文结合局部卡和群胚的语言。重新表述 orbifold 的概念。新的表述保留了 orbifold 结构，再利用群胚来规范局部卡之间的相容性。这种定义下的 orbifold 可以理解为对群胚的像空间进行加细，从而揉进了局部卡构成的开覆盖。新的表述既保留了原来局部奇性的刻画，同时也兼顾整体性，使很多微分几何的概念在 orbifold 领域得以推广。首先，我们重新描述 orbifold 丛，把 orbifold X 上的 orbifold 丛定义为一个 orbifold E，和一个丛投射 $p:E\to X$，使得在局部上，对于 X 的每一张 orbifold 卡 $(V_\alpha,G_\alpha,\pi_\alpha)$，$U_\alpha=V_\alpha/G_\alpha$ 上的纤维为 $(R^n\times V_\alpha)/G_\alpha$。这种描述本质上与 Ruan [4]的 orbifold 丛定义是等价的。

由于 orbifold 丛新的描述保留了过渡矩阵等语言，我们可以参考微分几何的技巧，通过构造曲率方阵，在 orbifold 丛上定义联络，使得向量场的微分并不会受到局部奇性的影响。即是对向量场的微分与局部群的作用可以交换。类似于微分几何，本文还进一步定义了 orbifold 丛的陈特征。

2. Orbifold

纸型

Orbifold 的定义可以用两种语言来描述。一种是局部卡的语言，另一种是群胚的语言。本节先简要介绍这两种语言，然后结合这两种语言，我们对 orbifold 的定义重新描述。

局部卡的语言首先是 Satake [1] [2]提出来的，但本节引用了 Ruan [4]的表述方式。

定义 1.1 [4]：设 X 为一个仿紧的 Hausdorff 拓扑空间，$n>0$。

1) X 上一个 n 维 orbifold 卡，是指一个三元组 (V,G,π)。其中 V 为 R^n 中的连通开子集，G 为 $diff(V)$ 的有限子群，$\pi:V\to X$ 是一个 G 不变的映射，并且诱导同胚 $V/G\to\pi(V)\subseteq X$。

2) 如果光滑嵌入 $\lambda:V_1\to V_2$ 满足 $\pi_1=\pi_2\circ\lambda$，则称 λ 为两个 orbifold 卡 $(V_1,G_1,\pi_1),(V_2,G_2,\pi_2)$ 之间的嵌入。

3) 对于一族 orbifold 卡 $\Gamma=\{(V_\alpha,G_\alpha,\pi_\alpha)\}_\alpha$，如果 Γ 局部相容，并且 $\{\pi_\alpha(G_\alpha)\}_\alpha$ 覆盖 X，则称 $\Gamma=\{(V_\alpha,G_\alpha,\pi_\alpha)\}_\alpha$ 为 X 的一个 orbifold 卡册。

4) 对于 X 的两个 orbifold 卡册 Γ_1,Γ_2，如果 Γ_1 中的每一张 orbifold 卡都能嵌入到 Γ_2 中的某一张 orbifold 卡，则称 Γ_1 为 Γ_2 的一个加细。如果两个 orbifold 卡册有一个共同的加细，则称它们是等价的。

局部卡定义的局部相容缺乏整体性。为此 Haefliger [3]提出了群胚的语言。群胚是指一个小范畴，其所有的态射都是等价。

定义 1.2 [5]：一个群胚 $\mathsf{G}=(G_0,G_1)$ 称为李群胚，如果其像空间 G_0 和态空间 G_1 都是光滑流形，5 个结构映射都光滑，且满足以下性质：

1) 源映射 $s:G_1\to G_0$ 为淹没映射；

2) 靶映射 $t:G_1\to G_0$ 也为淹没映射；

3) 复合映射 $m:G_1\ {}_s\times_t G_1\to G_1$，$gh:=m(g,h)$，满足结合律，其中

$G_1 {}_s\times_t G_1 = \{(h,g)\in G_1\times G_1 \mid s(h)=t(g)\}$；

4) 单位映射 $u:G_0\to G_1, x\to 1_x$，使得对任意 $h\in s^{-1}(x), g\in t^{-1}(x)$，有 $h1_x = h, 1_x g = g$；

5) 逆映射 $i:G_1\to G_1, g\mapsto g^{-1}$，使得对任意 $g\in G_1$，有 $gg^{-1}=1_x$。

定义 1.3 [5]：设 $\mathsf{G}=(G_0,G_1)$ 为一个李群胚，如果 $(s,t):G_1\to G_0\times G_0$ 为一个 proper 映射，且 s,t 都是局部微分同胚，则称 $\mathsf{G}=(G_0,G_1)$ 为一个 orbifold 群胚。

Orbifold 之间的映射由群胚同态来描述。

定义 1.4 [5]：设 $\mathsf{G}=(G_0,G_1),\mathsf{H}=(H_0,H_1)$ 为李群胚。若 $\phi_0:G_0\to H_0,\phi_1:G_1\to H_1$ 和是光滑映射，并且与 G 和 H 所有的结构映射都可以交换，则称 $\phi=(\phi_0,\phi_1):\mathsf{G}\to\mathsf{H}$ 为群胚同态。

定义 1.5 [4]：设 X 为一个仿紧的 Hausdorff 拓扑空间，$n>0$。若赋予 X 一个 orbifold 群胚 $\mathsf{G}=(G_0,G_1)$，使得，则 $X\cong G_0/G_1$ 称 $\mathrm{X}=(X,\mathsf{G})$ 为一个 n 维 orbifold。

群胚的语言比较抽象，并不能很清晰的体现 orbifold 的几何性质。因此，我们结合局部卡和群胚两种语言，重新描述 orbifold 的定义。

定义 1.6：设 X 为一个仿紧的 Hausdorff 拓扑空间，$n>0$。X 上的一个 orbifold 结构为一个 orbifold 卡册 $\Gamma=\{(V_\alpha,G_\alpha,\pi_\alpha)\}_\alpha$ 和一个 orbifold 群胚 $\mathsf{G}=(G_0,G_1)$，使得

$G_0=\coprod_\alpha V_\alpha$，$\mathsf{G}|_{V_\alpha}=(V_\alpha,G_\alpha,\pi_\alpha)$，且 $X\cong G_0/G_1$。

对于 orbifold 我们记为 (X,Γ,G)，有时简记为 (X,G)。

3. Orbifold 丛和的 Rham 上同调

Orbifold 丛最早是由 Satake [1] [2]提出来的。其定义的缺陷，就是丛的不再是丛。为此，Ruan [4]用群胚语言定义了 orbifold 的概念。

定义 2.1 [4]：设 $\mathsf{G}=(G_0,G_1)$ 为一个 orbifold 群胚，$p:E_0\to G_0$ 为平常的纤维丛，若存在 G_1 对 E_0 的作用 $\mu:G_1\times_{G_0}E_0\to E_0$，使得 G_1 作用在每个纤维上都是线性的，则称 E_0 为 orbifold$(G_0/G_1,\mathsf{G})$ 上的一个 orbifold 丛。

为了定义 orbifold 丛上联络的概念，我们利用定义 1.6 的语言，重新描述 orbifold 丛的定义。

定义 2.2：设 (X,G) 和 (E,H) 为两个 orbifold，$(p_0,p_1):(H_0,H_1)\to(G_0,G_1)$ 为群胚同态。若以下条件成立，

1) $H_0\cong G_0\times R^n, H_1\cong G_1\times R^n\cong G_1\times_{G_0}H_0$，

2) G_1 在 H_0 的每个纤维上的作用都是线性的，

则称 (E,H) 为 (X,G) 上的一个 orbifold 丛，$(p_0,p_1):(H_0,H_1)\to(G_0,G_1)$ 为丛投射。

定义 2.2 与定义 2.1 本质上是等价的。若 E_0 是定义 2.1 中的 orbifold 丛。令 $H_1=G_1\times_{G_0}E_0$，则 $\mathsf{H}=(H_0,H_1)$ 是一个 orbifold 群胚，并且 $(H_0/H_1,\mathsf{H})$ 是定义 2.2 中的 orbifold 丛。反之，若 (E,H) 是定义 3。2 中的 orbifold 丛。令 $E_0=H_0$ 即可的定义 2.1。

注 2.3：把定义 2.2 中的 R^n 换成 C^n，我们可以得到 orbifold 复丛的定义。

设 $(p_0,p_1):(H_0,H_1)\to(G_0,G_1)$ 为一个 orbifold 复丛投射。对任意 $g\in G_1$，g 在纤维上的作用相当于乘上一个方阵。因此，我们得到一个映射，

$\phi:G_1\to GL(n,C)$。

显然，ϕ 满足 cocycle 条件，即是对任意 $g_1,g_2\in G_1$ 有 $\phi(g_1g_2)=\phi(g_1)\phi(g_2)$。称 ϕ 为纤维丛 (E,H) 的过渡函数。我们有以下性质。

定理 2.4：(X,G) 上所有 n 维 orbifold 丛构成的集合与所有满足 n 维 cocycle 条件过渡函数构成的集合，即

$$\left\{\phi: G_1 \to GL(n,C) \mid \phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2), \text{对任意} g_1, g_2 \in G_1\right\}$$

之间存在一一对应。

证明： 由前面的分析知道每个 orbifold 丛对应着一个过渡函数。

反之，设 $\phi: G_1 \to GL(n,C)$ 满足 cocycle 条件。令

$$H_0 \cong G_0 \times R^n, H_1 \cong G_1 \times R^n \cong G_1 \times_{G_0} H_0.$$

定义结构映射

$$\begin{array}{cc} s: H_1 \to H_0 & t: H_1 \to H_0 \\ (g,v) \mapsto (s(g),v), & (g,v) \mapsto (t(g),\phi(g)v) \end{array}$$

和投射

$$(p_0,p_1):(H_0,H_1) \to (G_0,G_1),$$

其中

$$\begin{array}{cc} p_0: H_0 \to G_0 & p_1: H_1 \to G_1 \\ (x,v) \mapsto x \quad , & (g,v) \mapsto g \end{array}$$

则 $\mathrm{H} = (H_0,H_1)$ 是一个 orbifold 群胚，并且 $(p_0,p_1):(H_0,H_1) \to (G_0,G_1)$ 是一个从 $(H_0/H_1,\mathrm{H})$ 到 (X,G) 的丛投射。

对于 orbifold (X,G)，定义 (X,G) 上的 de Rham 复型为

$$A^p(\mathrm{G}) = \left\{\omega \in \Omega^p(G_0) \mid s^*\omega = t^*\omega\right\}$$

由[ALR]知，$dA^p(\mathrm{G}) \subseteq A^{p+1}(\mathrm{G})$。定义 (X,G) 上的 de Rham 上同调为

$$H^*(\mathrm{G}) \subseteq H^*\left(A^{p+1}(\mathrm{G}),d\right).$$

4. 联络

首先介绍单位分解。

定义 3.1： 设 (X,G) 为 orbifold，$\{\rho_i\}_i$ 为 X 上一族非负函数。若以下条件成立，

1) 对任意 i，$0 \le \rho_i \le 1$，$\sup pp\rho_i$ 紧并且存在 α，使得 $\sup pp\rho_i \subseteq \pi_\alpha(V_\alpha)$。
2) 对任意 $p \in X$，$\sum_i \rho_i(p)$ 是一个有限和。
3) $\sum_i \rho_i \equiv 1$。
4) 对任意 i，$\rho_i \circ \pi_\alpha$ 为 V_α 上光滑函数。

则称为 $\{\rho_i\}_i$ 为 X 上一个从属于 G 的单位分解。

利用微分几何的方法，容易验证任何 orbifold 上都有单位分解。

下面定义 orbifold 丛上的联络，并且证明所有 orbifold 丛都有联络。

定义 3.2： 设 $(p_0,p_1):(H_0,H_1) \to (G_0,G_1)$ 为从 (E,H) 到 (X,G) 的丛投射。(E,H) 上的联络定义为从 $p_0: H_0 \to G_0$ 上的平常联络 $D:\Gamma(H_0) \to \Gamma\left(T^*G_0 \otimes H_0\right)$，使得对任意 $\sigma_1,\sigma_2 \in \Gamma(H_0)$，若 $s^*\sigma_1 = t^*\sigma_2$，则有 $s^*D\sigma_1 = t^*D\sigma_2$。

对于的 G_0 每一个分支 V_α，取从 $H_0|_{V_\alpha}$ 的一个基底 S_α。A_α^β 为过渡矩阵，即 $S_\alpha = A_\alpha^\beta S_\beta$。$\{\rho_i\}_i$ 为 X 上一个从属于 G 的单位分解。构造联络方阵

$$\omega_\alpha = \sum_i \frac{1}{|G_\beta|}\left(t^{-1}\right)^*\left(\rho_i \circ \pi_\beta \circ s\right) dA_\beta^\alpha \left(A_\beta^\alpha\right)^{-1}.$$

其中，$\sup pp\rho_i \subseteq \pi_\beta\left(V_\beta\right)$。令 $D:\Gamma\left(H_0\right)\to\Gamma\left(T^*G_0\otimes H_0\right)$ 为

$$DS_\alpha = \omega_\alpha \otimes S_\alpha,$$

可以验证联络方阵满足

$$A_\alpha^\beta s^*\omega_\alpha\left(A_\alpha^\beta\right)^{-1} + dA_\alpha^\beta\left(A_\alpha^\beta\right)^{-1} = t^*\omega_\beta, \tag{3.1}$$

则 D 为 orbifold 丛 (E,H) 上的一个联络。

下面利用联络 D 构造陈特征。考虑曲率矩阵

$$\Omega_\alpha = d\omega_\alpha - \omega_\alpha\otimes\omega_\alpha.$$

由(3.1)知 $A_\alpha^\beta s^*\Omega_\alpha = t^*\Omega_\beta A_\alpha^\beta$。即是 $A_\alpha^\beta s^*\Omega_\alpha\left(A_\alpha^\beta\right)^{-1} = t^*\Omega_\beta$。类似于光滑的情形，对任意 α，我们可以构造

$$b_i\left(\Omega_\alpha\right) = tr\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega_\alpha\right)^i.$$

并且 $s^*b_i\left(\Omega_\alpha\right) = t^*b_i\left(\Omega_\beta\right)$。构造 $b_i(\Omega)$，使得 $b_i(\Omega)\big|_{V_\alpha} = b_i\left(\Omega_\alpha\right)$。于是，$b_i(\Omega)\in A^p(\mathrm{G})$。称 $b_i(\Omega)$ 为从 (E,H) 的第 i 个 chern 特征。

参考文献

[1] Satake, I. (1957) On a Generalization of Manifold. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **42**, 359-363. https://doi.org/10.1073/pnas.42.6.359

[2] Satake, I. (1956) The Gauss-Bonnet Theorem of V-Manifold. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **9**, 464-492. https://doi.org/10.2969/jmsj/00940464

[3] Haefliger, A. (2001) Groupoids and Foliations. In: Ramsay, A. and Renault, J., Eds., *Groupoid in Analysis*, *Geometry and Physics*, American Mathematical Society, Providence, RI, 83-100.

[4] Adem, A., Leida, J. and Ruan, Y. (2007) Orbifolds and Stringy Topology. In: *Cambridge Tracts in Mathematrics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1-56. https://doi.org/10.1017/CBO9780511543081

[5] Moerdijk, I. (2002) Orbifolds as Groupoids: An Introduction. In: Adem, A., Ed., *Orbifolds in Mathematics and Physics*, American Mathematical Society, Providence, RI, 205-222.